Einführung

in die

Grundlagen der Geometrie.

Von

Dr. Wilhelm Killing,
Professor der Mathematik an der Akademie zu Münster i. W.

Erster Band.

Mit 40 Figuren im Text.

Paderborn.
Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.
1893.
Zweigniederlassungen in Münster, Osnabrück und Mainz.

Der

Physiko-mathematischen Gesellschaft

in **Kasan**

zur hundertjährigen Gedächtnisfeier des Geburtstages

von

N. J. Lobatschewsky.

(1793—1856.)

Vorwort.

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie haben die Mathematiker in den letzten Jahrzehnten so lebhaft beschäftigt, daſs es angemessen erscheint, eine orientierende Zusammenstellung der bisher gewonnenen Resultate zu geben. Zwar sind die Forschungen keineswegs zum Abschluſs gelangt; auch läſst sich im einzelnen noch nicht übersehen, wie sich ein Glied an das andere anfügt, um ein sicheres Fundament zu liefern. Aber es sind bereits so viele Vorfragen erledigt, daſs die endgültige Lösung für eine nicht zu ferne Zeit erwartet werden muſs; und dieser Zeitpunkt wird um so früher eintreten, je mehr die Forscher allen in Betracht kommenden Punkten ihre Aufmerksamkeit zuwenden. Es würde aber verkehrt sein, wollte man versuchen, von wenigen Prinzipien aus die Wissenschaft systematisch aufzubauen. Denn abgesehen davon, daſs ein solches Verfahren augenblicklich noch nicht möglich ist, da sich Lücken zeigen, die vorläufig nicht ausgefüllt werden können, bietet es dem Anfänger auſserordentliche Schwierigkeiten, ohne ihm das volle Verständnis zu ermöglichen. Dagegen wird es nach jeder Richtung hin am besten sein, eine Reihe Einzelfragen allseitig zu beleuchten und die Folgerungen, die sich aus ihrer Beantwortung ergeben, zum Schluſs zu einem einzigen System zu vereinigen.

Der vorliegende erste Band behandelt diejenigen Raumformen, die mit der Erfahrung vereinbar sind, und überträgt ihre Theorie auf eine beliebige Zahl von Dimensionen. Dabei zeigt sich, daſs für jede Zahl von Dimensionen zwei Fragen gesondert beantwortet werden müssen, nämlich erstens: Welche Eigenschaften hat ein endliches Gebiet des Raumes? und zweitens: Welche Gesetze gelten für den Raum als Ganzes? Mit der Beantwortung der ersten Frage beschäftigen sich die beiden ersten Abschnitte für den dreidimensionalen Raum. Erst der vierte Abschnitt beantwortet die Frage, wie der Raum als Ganzes beschaffen sei, wofern in der Umgebung einer jeden Stelle die in den ersten Abschnitten gefundenen Gesetze gelten. Dazwischen schiebt sich als dritter Teil ein Überblick über den mehrdimensionalen Raum. Man wird es vielleicht tadeln, dafs ich nicht die Entwicklungen des vierten Abschnitts auf drei Dimensionen beschränkt und diese an den zweiten Abschnitt angeschlossen habe. Ich selbst habe lange geschwankt und endlich geglaubt, der hier befolgten Anordnung den Vorzug geben zu sollen.

Damit mein Buch seinen Hauptzweck vollständig erreichen kann, mufste ich jede einzelne Raumform so weit charakterisieren, dafs ihre wichtigsten Eigenschaften klar zu Tage treten. Dadurch ist der vorliegende Band zugleich ein Lehrbuch der nicht-euklidischen Raumformen geworden. Natürlich durfte ich eine volle Erschöpfung nicht anstreben, wenn das Werk nicht übermäfsig anwachsen sollte. Wer sich mit den hier nicht erwähnten Eigenschaften bekannt machen will, kann sich leicht selbst unterrichten. Für diesen Zweck möchte ich vor allem raten, auf die Original-Arbeiten zurückzugehen; wer das weniger liebt, möge für den dreidimensionalen Raum das bekannte Werk des Herrn Frischauf, für den mehrdimensionalen etwa meine »nicht-euklidischen Raumformen« wählen.

Für ein Gebiet, wie das hier behandelte, wo so manche vorgefafste Meinung beseitigt werden mufs, erachte ich es für äufserst wichtig, dafs jede prinzipielle Frage von den verschiedensten Seiten aus beleuchtet wird. Deshalb findet man für jeden fundamentalen Satz mehrere von einander unabhängige Beweise. So begründe ich im ersten Abschnitt die Lobatschewskysche, Riemannsche und

Kleinsche Raumform zuerst unter der stillschweigenden Voraussetzung, dafs alle geraden Linien auch als Ganze einander kongruent sind. Zwar zeigt sich später, dafs diese Annahme nicht notwendig ist und für manche Raumformen nicht gilt; aber die Erleichterung, welche aus ihrer Benutzung erwächst, ist so bedeutend, dafs man anfangs nur ungern darauf verzichten wird. Sobald dann der Leser durch den vierten Abschnitt auf das Willkürliche dieser Annahme aufmerksam gemacht ist, erkennt er auch, an welche Stelle diese Partieen in einem systematischen Aufbau gesetzt werden müssen. Schon im ersten Abschnitt finden sich aber zwei Herleitungen, die von jener Annahme durchaus unabhängig sind. Während diese beiden Beweise unendlich kleine Gebilde benutzen, fügt der zweite Abschnitt neue Beweise hinzu, die vor jenen manche Vorzüge besitzen, da mittlerweile die Projektivität selbständig hat begründet werden können. Ebenso giebt der letzte Abschnitt drei verschiedene Wege an, die geeignet sind, zu den Clifford-Kleinschen Raumformen zu führen.

Natürlich habe ich mich nach Kräften bemüht, dem Anfänger das Eindringen in die neuen Theorieen soweit zu erleichtern, als es die in der Sache liegenden Schwierigkeiten gestatten. Dagegen habe ich es mir durchaus versagt, philosophische Fragen zu berühren. Gewifs hätte mein Buch an Interesse gewonnen, wenn ich mir diese Beschränkung nicht auferlegt hätte; aber derartige Fragen gehören ihrer Natur nach nicht in den Gang, sondern an das Ende der Entwicklung.

Der zweite Band, der sich mit den Grundbegriffen der Geometrie befafst und manche im ersten Bande nur angeregte Frage zum Abschlufs bringt, ist zum gröfsten Teile bereits seit längerer Zeit fertig gestellt und wird hoffentlich bald erscheinen können.

Während der Bearbeitung des Buches sind zwei Werke erschienen, die einen ähnlichen Zweck verfolgen. Herr Lindemann hat im zweiten Bande seines Werkes über Geometrie, das er im Anschlufs an die Vorlesungen von Clebsch bearbeitet hat, den

Grundlagen der Geometrie einen längern Abschnitt gewidmet. So sehr ich mich freue, in allen wesentlichen Punkten mit diesem Gelehrten übereinzustimmen, erachte ich doch neben der seinigen eine eingehendere Darlegung für notwendig. Dagegen weicht das Werk des Herrn Veronese: J fondamenti della Geometria, in seiner ganzen Anlage so sehr von dem meinigen ab, daſs ich kein Bedenken trage, auch nach dem Erscheinen dieses Werkes mein Buch der Öffentlichkeit zu übergeben.

Es trifft sich sehr schön, daſs der vorliegende Band gerade zum hundertjährigen Geburtstage Lobatschewskys erscheinen kann. Da ist es doppelte Pflicht, dankbar der Verdienste des groſsen Geometers zu gedenken, der beinahe gleichzeitig mit Gauſs auf diesem Gebiete gearbeitet und der zuerst die Ergebnisse anhaltender Forschung in zahlreichen Schriften bekannt gegeben hat.

Münster i. W., den 1. September 1893.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichnis.

Die angehängten Ziffern beziehen sich auf den Litteratur-Nachweis.

Erster Abschnitt. Berechtigung der nicht-euklidischen Raumformen.

Zweiter Abschnitt. Die projektive Geometrie.

Erster Abschnitt.

Berechtigung der nicht-euklidischen Raumformen.

§ 1.

Das sogenannte elfte Axiom Euklids.

In dem berühmtesten Lehrbuch der Geometrie, den Elementen Euklids,[1]) werden den Lehrsätzen und Konstruktionen die notwendigsten Definitionen, Axiome und Postulate vorausgeschickt. Die Definitionen (ὅροι) betreffen Punkt, Linie, Fläche, Gerade, Ebene, Kreis, Winkel, Dreieck und Viereck; als Axiome (*κοιναὶ ἔννοιαι*) werden die allgemeinen Gröſsensätze hingestellt. Daran schlieſsen sich die Postulate (*αἰτήματα*), welche uns hier besonders interessieren und deshalb in wörtlicher Übersetzung mitgeteilt werden sollen. Es sind folgende fünf:

1. Es wird gefordert, daſs man von einem beliebigen Punkte nach einem beliebigen andern Punkte eine gerade Linie ziehen könne,

2. und daſs eine begrenzte gerade Linie in ihrer Richtung unbegrenzt verlängert werden könne,

3. und daſs um einen beliebigen Mittelpunkt und mit einem beliebigen Radius ein Kreis beschrieben werden könne,

4. und daſs alle rechten Winkel einander gleich seien,

5. und daſs, wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien schneidet und die Summe der innern an derselben Seite liegenden Winkel kleiner ist als zwei Rechte, die beiden Geraden, wofern sie ins Unendliche verlängert werden, auf derjenigen Seite zusammenstoſsen, auf welcher die Winkel kleiner sind als zwei Rechte.

Hier mufs zunächst auffallen, dafs die beiden letzten Postulate ihrem Inhalt nach von den drei ersten wesentlich verschieden sind: die ersteren betreffen die Möglichkeit gewisser Konstruktionen, die letzteren stellen eigentliche Behauptungen auf. Man hat denn auch in späterer Zeit diese beiden Postulate den *κοιναὶ ἔννοιαι* hinzugefügt und speziell das *αἴτημα έ* als elftes Axiom bezeichnet. Aber seit langem hat man es als einen Mangel empfunden, dafs dieser Satz ohne Beweis in den Anfang der Geometrie gesetzt ist. Zum eigentlichen Axiom ist derselbe eben zu speziell: zwei gerade Linien, in derselben Ebene gelegen und von einer dritten Geraden geschnitten — warum, so mufs man fragen, kommt es da auf die Winkelsumme an? Wer bei Euklid selbst die Antwort auf diese Frage sucht, mufs recht lange warten. In den sechsundzwanzig ersten Sätzen wird auf dieses *αἴτημα* keinerlei Rücksicht genommen. Erst die Propositio 27 beweist den Satz: Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, dafs die Wechselwinkel gleich sind, so sind die Geraden parallel. Daraus schliefst Propositio 28, dafs auch dann die Geraden parallel sind, wenn die innern, an derselben Seite der schneidenden Geraden liegenden Winkel zwei Rechte betragen. Endlich bringt Propos. 29 den Satz: »Wenn zwei parallele Linien von derselben Geraden geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel gleich u. s. w.«, und beim Beweise gebraucht Euklid sein *αἴτημα έ*, um es sodann an keiner späteren Stelle wieder zu benutzen. Somit hat Euklid einfach die Umkehrung eines gewissen Satzes (Prop. 28) als Forderung ohne Beweis an die Spitze gestellt. Dafs ein solches Verfahren mangelhaft ist, kann keinem Zweifel unterliegen.

Andererseits gehört aber die 29. Proposition, bei deren Beweis das fragliche Postulat benutzt wird, zu den fundamentalsten Sätzen im ganzen Lehrgebäude Euklids. Die Lehre von der Gleichflächigkeit und der Ähnlichkeit ebener Figuren, der pythagoreische Lehrsatz und die gesamte rechnende Geometrie, damit auch die (allerdings erst lange nach Euklids Zeiten vollständig entwickelte) Trigonometrie, endlich auch der gröfste Teil der Stereometrie stützen sich auf die Parallelentheorie, also auf den genannten Lehrsatz. Somit entbehren alle diese Teile einer wirklich befriedigenden Grundlage. Demnach mufs die Frage aufgeworfen werden, ob nicht vielleicht das elfte Axiom als Folge aus den übrigen Voraussetzungen Euklids bewiesen werden könne, oder ob es nicht durch einen andern Grundsatz ersetzt werden kann, der diesen Namen auch wirklich verdient.

Es mufs unsere erste Aufgabe sein, die bisher zu diesem Zwecke gemachten Versuche zu prüfen.

§ 2.

Andere Formen des Axioms.

In Euklids System kommt alles darauf an zu zeigen, dafs durch jeden Punkt nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden kann. Man hat daher mehrfach diesen Satz selbst geradezu als Axiom hingestellt. Aber alsdann hat die Theorie wiederum keine genügende Grundlage, und die Mängel des Verfahrens sind ungeändert geblieben.

Zuweilen hat man auch folgenden Satz für selbstverständlich ausgegeben: Zwei Gerade, welche derselben dritten parallel sind, sind auch einander parallel. Dieser Satz kann seine Beliebtheit wohl nur der äufsern Ähnlichkeit mit dem Satze verdanken: Zwei Gröfsen, welche derselben dritten gleich sind, sind einander gleich. Aber es mufs schon auffallen, dafs der entsprechende Satz in der Stereometrie allgemein bewiesen wird, was zu der Eigenschaft eines Grundsatzes wenig pafst. Selbst jene Ähnlichkeit fällt aber vollständig weg, sobald man das Wort »parallel« durch den darin liegenden Begriff ersetzt. Dann erhält der Satz etwa folgende Fassung:

Liegen drei Gerade in derselben Ebene und werden zwei unter ihnen von der dritten nicht geschnitten, so schneiden sie auch einander nicht.

Bei diesem Ausspruch wird man unbedingt einen Beweis verlangen, und man mufs gestehen, dafs man, solange dieser Beweis nicht geliefert wird, nicht weiter gekommen ist, als mit der Voraussetzung Euklids.

Nicht so deutlich, wie bei den beiden angegebenen Versuchen, tritt die Mangelhaftigkeit zu Tage, wenn man folgendes Axiom aufstellt:

Durch jeden Punkt innerhalb eines ebenen Winkelfeldes kann man eine gerade Linie ziehen, welche beide Schenkel schneidet.

Sobald man die Möglichkeit einer einzigen solchen Linie voraussetzt, kann man nachweisen, dafs es noch beliebig viele andere Linien mit derselben Eigenschaft giebt. Hierbei ist ferner zu bemerken, was allerdings an dieser Stelle nicht bewiesen werden soll, dafs es genügt, die Voraussetzung für einen beliebig kleinen Winkel zu machen. Zeichnet man aber in eine Zeichenebene, wie sie uns zu Gebote steht, einen Winkel und entfernt sich im Winkelfelde recht weit vom Scheitel, so wird man stets nicht nur eine, sondern beliebig viele gerade Linien ziehen können, von denen beide Schenkel getroffen werden. Aber für unsere Zeichnungen stehen uns immer nur gar zu kleine Flächen zur Verfügung; wollten wir den Punkt in der Entfernung von Millionen Meilen vom Scheitel annehmen, so könnten wir es keineswegs als unbedingt sicher annehmen, dafs der Satz noch richtig ist. Demnach kann dieser Satz nicht einmal als durch die Erfahrung bewiesen angesehen werden.

Es ist überhaupt ein Mangel der in diesem Paragraphen angegebenen Versuche, denen sich noch manche ähnliche anreihen liefsen, dafs uns keine Erfahrung über ihre unbedingte Richtigkeit Aufschlufs giebt. Andererseits eignen sie sich alle auch ihrer äufsern Form nach nicht zu Grundsätzen; sie bezeichnen also jedenfalls keinen wesentlichen Fortschritt gegenüber dem von Euklid eingeschlagenen Verfahren.

Scheinbar fehlerlos ist folgende Voraussetzung:

Eine Gröfse kann nicht ganz in einer kleineren Gröfse enthalten sein.

Wenn wir diesen Satz ganz allgemein als richtig annehmen, so läfst sich leicht zeigen, dafs durch jeden Punkt nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden kann. Angenommen nämlich, durch den Punkt P gingen zwei verschiedene Gerade, welche eine in derselben Ebene liegende Gerade AB nicht schnitten, so liefsen sich auf den durch P gezogenen Geraden zwei Richtungen PM und PN so bestimmen, dafs für einen auf AB gewählten Punkt C der gestreckte Winkel ACB innerhalb des Winkels MPN fiele, der kleiner ist als zwei Rechte.

Aber auch diese Behandlung ist fehlerhaft. Der Satz gilt ohne jeden Zweifel für allseitig begrenzte Gröfsen; aber man darf ihn keineswegs von vorn herein auf unendliche Gröfsen übertragen. Mit demselben Rechte könnte man annehmen, das Axiom Euklids: Der Teil ist stets kleiner als das Ganze, mufs allgemein richtig sein. Dies Axiom gilt aber selbst bei Euklid nicht allgemein. Um das zu erkennen, lasse man in einer Geraden die Punkte A, B, C der Reihe nach auf einander folgen; durch A sei ein beliebiger Strahl AD und durch B sei BE gleichgerichtet mit AD gezogen; dann sind die Winkel DAC und EBC gleich, obgleich der letztere nur einen Teil des ersteren bildet. Wenn man nun auch wohl sagen kann, der Unterschied beider Gröfsen, nämlich der Streifen DABE müsse im Vergleich zu den beiden Winkelfeldern als null bezeichnet werden, so zeigt sich hieran schon, dafs für unendliche Gebilde ganz andere Gesetze gelten, als für allseitig begrenzte.

In der That, wollte man die Erwägungen, aus denen die gemachte Voraussetzung hervorgegangen ist, auf die Analysis anwenden, so würde man zu grofsen Irrtümern geführt werden. Darauf brauchen wir aber hier nicht einzugehen. Nimmt man nämlich auch den obigen Satz für die Ebene als richtig an, so giebt es jedenfalls Flächen, für welche er nicht mehr richtig ist. Auf diese Flächen werden wir im § 6 eingehen und dann zeigen, dafs es gar nicht gestattet ist, die fragliche Eigenschaft für unendliche Gröfsen allgemein als richtig vorauszusetzen.[2])

§ 3.

Die Richtung der Geraden.

Wir gehen dazu über, ein Beweisverfahren zu prüfen, welches den Versuch macht, die Parallelentheorie auf den Begriff der Richtung zu gründen. Man sagt etwa: Eine gerade Linie ist bestimmt durch den Anfangspunkt und die Richtung; zwei gerade Linien, welche dieselbe Richtung, aber verschiedenen Anfangspunkt haben, heifsen parallel; der Winkel mifst den Richtungsunterschied zweier Geraden; folglich sind die beiden Winkel gleich, welche zwei Parallele mit derselben geraden Linie bilden.

Dieser Gedanke dürfte von Leibnitz herrühren, der ihn meines Wissens zuerst in seinen Studien über die Grundlagen der Geometrie entwickelt. Jedoch ist dies Verfahren mangelhafter als das von Euklid eingeschlagene, da man hier die Schwierigkeit verschleiert, während sie von Euklid offen ausgesprochen wird.

Soll denn der Begriff der Richtung ein Grundbegriff oder ein abgeleiteter sein? Nach den Lehrbüchern, in denen diese Methode angewandt wird, scheint er als Grundbegriff angesehen zu werden, da jede Definition fehlt. Indessen mufs man dann doch zum mindesten wissen, woran man gleiche und ungleiche Richtung erkennt. Hierauf fehlt jede Antwort. Vielfach gründet man den Begriff des Winkels auf den des Richtungsunterschiedes, aber dann kann man nicht angeben, wann Richtungsunterschiede gleich oder ungleich sind. Somit wird hier ein Wort eingeführt, dem man erst dann einen Inhalt geben kann, wenn man die gesamte Parallelentheorie bereits voraussetzt.

Nun kann man auch, da man doch den Begriff des Winkels nicht entbehren kann, eine Definition von gleicher und ungleicher Richtung aufzustellen versuchen. Diejenige, welche der hier beliebten Anschauung zu Grunde liegt, kann etwa so ausgesprochen werden: Zwei Geraden haben gleiche oder ungleiche Richtung, wenn sie mit einer beide schneidenden Geraden gleiche oder ungleiche Winkel bilden. Aber diese Definition ist unerlaubt, solange die Parallelentheorie nicht erwiesen ist; man darf nur sagen: sie haben gleiche oder ungleiche Richtung in Bezug auf eine bestimmte dritte Gerade; dann ist es aber ungewifs, ob zwei Gerade, welche mit einer bestimmten Geraden gleiche Winkel bilden, auch von jeder Geraden unter gleichen Winkeln geschnitten werden.

Diesen Gedanken spricht Gaufs[3]) in folgender Weise aus: »Diese Bedeutung (nämlich die der Identität der Richtung zweier nicht koincidierender gerader Linien) ist so lange leer und ohne Haltung, bis wir wissen, was wir uns bei einer solcher Identität denken und woran wir dieselbe erkennen sollen. Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit e i n e r dritten geraden Linie erkannt werden, so wissen wir ohne vorangegangenen Beweis noch nicht, ob eben dieselbe Gleichheit auch bei den Winkeln mit einer vierten geraden Linie statt haben werde: soll die Gleichheit der Winkel mit jeder andern geraden Linie das Kriterium sein, so wissen wir wiederum nicht, ob gleiche Lage (Richtung) ohne Koincidenz möglich ist.«

§ 4.

Der Thibautsche Beweis.

Unter den Versuchen, die Parallelentheorie aus den übrigen Axiomen Euklids herzuleiten, gewährt das von Thibaut eingeschlagene Verfahren dadurch besonderes Interesse, dafs sein Urheber, der mit Gaufs zugleich Professor der Mathematik in Göttingen war, den Versuch zu einer Zeit (1818) veröffentlichte, wo Gaufs bereits mehrfach auf das Verfehlte hingewiesen, neue Beweise für das elfte Axiom zu suchen, und erklärt hatte, wir seien nicht weiter gekommen, als Euklid vor 2000 Jahren bereits gewesen sei. Dieser Thibautsche »Beweis« fand anfangs wenig Beachtung; erst später erlangte er teilweise grofse Beliebtheit und ist dann in manche Lehrbücher übergegangen. Das Verfahren ist folgendes:

Für ein Dreieck ABC verlängert man AB über B hinaus nach D, BC über C nach E und CA über A nach F. Nun läfst man zunächst vom Strahl BD den Winkel $DBC = x$ beschreiben; dann verschiebt man den Strahl in der Linie BC, bis sein Anfangspunkt nach C gelangt, und dreht den Strahl CE, bis er die Richtung CA deckt, wobei er den Winkel $ECA = y$ beschreibt; endlich verschiebt man den Strahl wieder, bis sein Anfangspunkt nach A kommt, und dreht ihn um A, so dafs er den Winkel $FAB = z$ beschreibt. Jetzt hat der Strahl eine volle Umdrehung gemacht, also einen Winkel von 360° beschrieben, oder es ist

$$x + y + z = 360^\circ.$$

Bezeichnet man aber die Winkel des Dreiecks mit α, β, γ, so ist $x = 180^\circ - \beta$, $y = 180^\circ - \gamma$, $z = 180^\circ - \alpha$, und demnach $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Man kann das Verfahren dadurch abkürzen, dafs man BD hinlänglich grofs, nämlich gröfser als $AB + BC + CA$ annimmt, und dann die Verschiebungen jedesmal wegläfst. Bei der Drehung um B gelange BD in die Richtung BC und D auf E; dann drehe man CE um C, bis es in die Richtung CA und E auf F zu liegen kommt; endlich drehe man AF um A, bis F in die Richtung AB gelangt. Dadurch hat BD seine ursprüngliche Richtung wieder erhalten und ist nur in seiner Richtung verschoben.

Das Verfahren scheint für manchen etwas Bestechendes an sich zu haben, dürfte jedoch schwerlich jemanden volle Befriedigung gewähren. Das ist auch ganz natürlich, da der Beweis eine Lücke enthält, und zwar an der Stelle, wo es heifst: Da der Strahl wieder in seine Anfangslage gekommen sei, habe er denselben Winkel beschrieben, als ob er um einen Punkt eine volle Umdrehung gemacht habe. Hier wird angenommen, es sei gleichgültig, ob man die Drehung um denselben Punkt oder der Reihe nach um verschiedene Punkte mache. Das folgt aber keineswegs aus den übrigen Voraussetzungen Euklids, ist vielmehr eine ganz neue Voraussetzung, der man etwa folgenden Ausdruck geben kann:

Wenn ein Strahl in der Ebene sich der Reihe nach um verschiedene seiner Punkte dreht und schliefslich wieder die Anfangslage erhält, so ist der von ihm beschriebene Winkel ein Vielfaches von 360°.

Etwas allgemeiner würde folgender Ausspruch sein:

Die Summe der Winkel, welche eine beliebig in der Ebene bewegte Gerade erzeugt, ist bis auf Vielfache von vier Rechten nur von ihrer Anfangs- und Endlage abhängig.

Somit stützt sich auch dieser Versuch wieder auf eine unbewiesene Voraussetzung, bei der man sogar, wenn man streng verfahren will, positive und negative Drehungen unterscheiden mufs.

Bei der Beliebtheit des Thibautschen Versuches ist es vielleicht nicht ohne Interesse, noch auf einem andern Wege das Mangelhafte des Beweisverfahrens zu zeigen. Man lasse von einem Punkte O drei Strahlen OA, OB, OC ausgehen, welche nicht in derselben Ebene liegen. Die ebenen Winkel BOC, COA, AOB mögen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet werden; die in OA zusammenstofsenden Ebenen b und c seien unter dem Winkel α zu einander geneigt, und ebenso sei an OB der Körperwinkel β und an OC der Winkel γ. Man erweitere die Ebene a über OC, die Ebene b über OA, und die Ebene c über OB. Dreht man die Erweiterung der Ebene a um OC, bis sie, den Nebenwinkel von γ beschreibend, in die Ebene b und ihre Erweiterung fällt, und drehe jetzt um OB, bis der Nebenwinkel von β, und endlich um OA, bis der Nebenwinkel von α beschrieben wird, so ist man wieder in dieselbe Ebene gekommen.

Dennoch hat man hier nicht einen Winkel von 360°, sondern einen kleineren Winkel beschrieben. Wenn also hier die Winkelsumme, welche eine Ebene bei einer Reihe gewisser Drehungen beschreibt, durch welche sie in ihre Anfangslage zurückgeführt wird, abhängig ist von den Geraden, um welche je eine Drehung ausgeführt wird, so darf die Unabhängigkeit nicht bei Drehungen einer Geraden in einer Ebene als selbstverständlich vorausgesetzt werden.[4])

§ 5.

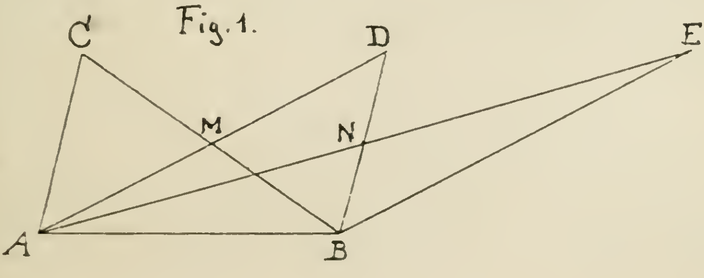
Legendres Untersuchungen.

Manche andere Versuche müssen hier, um nicht gar zu weitläufig zu werden, mit Stillschweigen übergangen werden. Ich möchte nur kurz daran erinnern, dafs der bekannte Philosoph Chr. von Wolf die Parallelentheorie auf die Voraussetzung gründet, dafs in der Ebene alle Punkte, welche von einer Geraden derselben Ebene gleichen Abstand haben, einer geraden Linie angehören. Hiermit ist eigentlich schon zu viel vorausgesetzt; man braucht nur für einen einzigen Abstand anzunehmen, dafs drei derartige Punkte auf einer Geraden liegen, und kann daraus die Parallelentheorie ableiten.

Besondere Bedeutung ist den Untersuchungen Legendres beizulegen. Während man bis dahin zunächst versucht hatte, den Hauptsatz über die Parallelen (Euklids Propos. 29) zu beweisen, und darauf den Satz über die Winkelsumme eines Dreieck gestützt hatte, suchte Legendre zunächst den Satz zu beweisen, dafs die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt.

Durch beliebig oftmalige Wiederholung einer von Euklid (Elemente I, 16) angegebenen Konstruktion zeigt Legendre, dafs diese Winkelsumme zwei Rechte nicht übersteigen kann. Dies

Fig. 1.



Verfahren, welches wir im folgenden noch benutzen werden, soll hier auseinander gesetzt werden. Die Winkel des vorgelegten Dreiecks ABC sollen mit α, β, γ bezeichnet werden. Man halbiere (Fig. 1) die Seite BC in M, ziehe AM und mache MD = AM. Wegen der Kongruenz der Dreiecke ACM und DBM ist $\sphericalangle$ ABD $= \beta + \gamma$, also die Summe dieser Winkel kleiner als zwei Rechte. Halbiert man jetzt DB in N und macht NE = AN, so ist der Winkel ABE $= \beta + \gamma +$ CAM, also die letztere Summe kleiner als zwei Rechte. Macht man diese Konstruktion bei passender Wahl der Seiten, so kann man bewirken, dafs CAM nicht kleiner als $\frac{1}{2}\alpha$ ist. Folglich ist gewifs $\beta + \gamma + \frac{1}{2}\alpha < 2R$. Wiederholt man die Konstruktion beliebig oft, so folgt, wenn n eine Potenz von 2 ist, dafs auch $\beta + \gamma + \frac{n-1}{n}\alpha < 2R$ oder dafs $\beta + \gamma + \alpha < 2R + \frac{1}{n}\alpha$ ist. Da aber $\frac{1}{n}\alpha$ beliebig klein gemacht werden kann, so kann $\alpha + \beta + \gamma$ nicht gröfser als $2R$ sein.

Daran schliefst sich folgende Erwägung: Wenn in einem einzigen Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte beträgt, so teilt jede von einer Ecke ausgehende Gerade das Dreieck in zwei andere von derselben Winkelsumme. Durch passende Zusammensetzung derartig gefundener Dreiecke gelangt man zu dem Satze, dafs jedes Dreieck dieselbe Winkelsumme besitzt. Somit verdanken wir Legendre den Beweis des Satzes:

Wenn in einem Dreieck die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt, so gilt dasselbe für jedes Dreieck.

Weiter konnte aber Legendre nicht gelangen; er machte allerdings verschiedene Versuche, aber fühlte sich von denselben selbst nicht befriedigt.

Indem man Legendres Untersuchungen weiter fortführte, hat man wohl das elfte Axiom Euklids durch folgende Behauptung ersetzt:

Es ist nicht möglich, die Winkelsumme eines Dreiecks unter jede angebbare Gröfse sinken zu lassen.

Gewifs wird mancher geneigt sein, es als selbstverständlich hinzustellen, dafs in keinem Dreieck die Summe aller drei Winkel etwa 1° beträgt. Aber wir müssen uns erinnern, dafs uns für

Zeichnungen nur ganz kleine Flächen zu Gebote stehen; wir können aber nicht wissen, was bei hinreichender Vergröfserung der Dreiecke eintritt.[5])

§ 6.

Die Geometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung.

Wir wollen jetzt direkt nachweisen, dafs das fünfte Postulat Euklids keine Folgerung aus seinen übrigen Voraussetzungen ist. Dieser Nachweis gründet sich auf ein allgemeines Prinzip, das auch in andern Fällen benutzt werden kann und das wir deshalb hier anführen wollen. Gegeben sei ein System E von Begriffen und Urteilen; bei derjenigen Vorstellung, welche wir gewöhnlich mit diesem System verbinden, ist eine gewisse Behauptung A nicht nur mit E vereinbar, sondern scheint eine Folge der in E vereinigten Urteile zu sein. Jetzt ändern wir die mit E verbundene Vorstellung, natürlich so, dafs auch für die neue Vorstellung die in E enthaltenen Urteile gelten; bei dieser neuen Vorstellung möge eine Behauptung B mit E vereinbar sein; wenn dann die Behauptungen A und B einander ausschliefsen, so kann A keine Folge des Systems E sein.

Mit den ersten Voraussetzungen Euklids können aufser der gewöhnlichen noch manche andere Vorstellungen verbunden werden. So lange wir z. B. blofs die Sätze der ebenen Geometrie betrachten, können wir jedem solchen Satze einen andern zur Seite stellen, welcher für gewisse andere Flächen gilt. Diese neuen Flächen werden dadurch erhalten, dafs man die Ebene ohne Dehnung und Zusammenziehung biegt; sie besitzen also die Eigenschaft, auf eine Ebene abwickelbar zu sein. Von solchen Flächen sind aus dem elementaren Unterricht der Kegel und der Cylinder bekannt. Ich möchte aber hier besonders auf diejenige Fläche hinweisen, welche entsteht, wenn eine Gerade sich parallel zu ihrer Anfangslage längs einer Parabel bewegt. Nun lehrt die Mathematik, dafs bei beliebiger Biegung einer Fläche, wofern jede Dehnung ausgeschlossen ist, alle Längen und alle Winkel ungeändert bleiben. Ersetzt man also die Ebene durch eine solche Fläche und jede in der Ebene gelegene Gerade durch eine auf der Fläche gezogene kürzeste Linie, so gelten folgende Sätze:

Durch zwei Punkte der Fläche geht stets eine einzige kürzeste Linie; je zwei kürzeste Linien haben höchstens einen einzigen Punkt gemeinschaftlich; durch jeden Punkt der Fläche geht nur eine einzige kürzeste Linie, welche eine gegebene kürzeste Linie bei unbegrenzter Verlängerung nicht schneidet; die Winkelsumme in jedem, aus kürzesten Linien gebildeten Dreieck beträgt zwei Rechte.

Diese Vorstellung liefert genau dieselben Sätze, welche in der euklidischen Ebene gelten, kann also für den bezeichneten Zweck nicht benutzt werden. Indessen deutet sie doch den Weg an, welcher uns zu einer Entscheidung führt.

Alle in die Ebene abwickelbaren Flächen haben die Eigenschaft, so in sich verschoben werden zu können, dafs alle Längen und alle Winkel ungeändert bleiben. Dazu ist nur notwendig, mit jeder Verschiebung eine gewisse Biegung zu verbinden; jedoch ist jede Dehnung oder Verkürzung ausgeschlossen. Von Flächen, denen diese Eigenschaft zukommt, giebt es drei Klassen, nämlich a) diejenigen, welche sich in die Ebene, b) die, welche sich auf eine Kugel abwickeln lassen, und c) eine dritte Klasse, sattelförmige Flächen, welche aus einem hier nicht zu erörternden Grunde als Flächen konstanter negativer Krümmung bezeichnet werden. Von den Flächen der dritten Art sollen einige Eigenschaften hier mitgeteilt werden.

Durch je zwei Punkte einer solchen Fläche giebt es eine einzige kürzeste Linie. Alle Punkte, deren kürzeste (geodätische) Entfernung von einem festen Punkte konstant ist, liegen auf einer geschlossenen Linie. Bewegt man die Fläche ohne Dehnung so in sich, dafs ein Punkt in Ruhe bleibt, so wird jeder andere Punkt in einer geschlossenen Linie bewegt, welche wir der Kürze wegen geradezu als Kreis bezeichnen wollen. Man kann die Fläche auch derartig in sich bewegen, dafs ein Punkt die Lage eines beliebigen andern Punktes erhält. Bei jeder solchen Bewegung behält jede kürzeste Linie die in ihrem Namen liegende Eigenschaft bei, jeder Kreis bleibt Kreis mit demselben geodätischen Radius. Mag man den Winkel zweier geodätischen Linien einfach gleich setzen dem von den betreffenden Tangenten gebildeten Winkel, oder mag man ihn auf der Fläche selbst durch Vermittlung des Kreises messen, so gelangt man beidemal zu derselben Gröfse. Gleiche

Winkel, und nur solche, können zur Deckung gebracht werden. Man kann also aus denselben Gründen, wie in der euklidischen Ebene, auch auf einer solchen Fläche das Winkelfeld als Gröſse betrachten. Überhaupt kann man alle Sätze Euklids, bei denen er das Parallelaxiom nicht gebraucht, auf die vorliegende Fläche übertragen. Aber die weitere Untersuchung lehrt, daſs die Winkelsumme für ein aus kürzesten Linien gebildetes Dreieck weniger als zwei Rechte beträgt. Dementsprechend gilt die Parallelentheorie nicht, vielmehr kann man durch jeden Punkt auſserhalb einer geodätischen Linie unendlich viele ziehen, welche die gegebene nicht treffen, wenn man die Linien auch noch so weit verlängert. Hierdurch kann man bewirken, daſs ein gestreckter Winkel ganz in das Feld eines Winkels fällt, welcher kleiner ist als zwei Rechte. Wenn überhaupt die Scheitel zweier Winkel nicht zusammenfallen, so kann man ein Winkelfeld ganz in ein kleineres hineinlegen, so daſs es nur einen Teil des kleineren bildet.

Der Beweis aller dieser Sätze kann hier nicht mitgeteilt werden; für denselben muſs namentlich auf die Arbeiten des Herrn Beltrami verwiesen werden.[6])

§ 7.

Projektive Verschiebung einer Kreisfläche in sich.

Die starre Bewegung des Raumes stellt sich analytisch dar als spezieller Fall der allgemeinen projektiven Umgestaltung. Letztere wird dadurch erhalten, daſs man die drei Koordinaten durch linear-gebrochene Funktionen mit demselben Nenner ersetzt. So ist die allgemeinste projektive Umgestaltung der Ebene durch die Gleichungen gegeben:

$$x' = \frac{a'x + b'y + c'}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{a''x + b''y + c''}{ax + by + c},$$

wo x und y die rechtwinkligen Koordinaten des gegebenen, x', y' die des entsprechenden Punktes bedeuten, während a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' konstante Gröſsen, die Transformations-Koeffizienten, sind.

Eine allgemeine Eigenschaft einer solchen Umgestaltung besteht darin, daſs alle geraden Linien wieder in Gerade verwandelt werden.

Denn wenn $\varkappa x + \lambda y + \mu = 0$ die Gleichung einer geraden Linie ist, so verwandelt sie sich in $\varkappa' x' + \lambda' y' + \mu' = 0$, wo die $\varkappa'$, λ', μ' von $\varkappa$, λ, μ und den Koeffizienten der Transformation abhangen.

Auch bleibt das Doppelverhältnis von irgend vier Punkten einer Geraden ungeändert; wenn also A, B, C, D vier Punkte einer geraden Linie sind, und diese in A′, B′, C′, D′ umgeändert werden, so ist $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$.

Wir können die Koeffizienten a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″, c″ in der mannigfachsten Weise so beschränken, dafs sie nur von drei Gröfsen abhängig sind. Dies gilt von der Gesamtheit der starren Bewegungen in der Ebene. Auch auf folgendes System wollen wir hinweisen. Wir setzen

$$u = \frac{\mu x - \varkappa y}{\nu x - \lambda y - (\varkappa\nu - \lambda\mu)}, \quad v = \frac{\nu x - \lambda y}{\nu x - \lambda y - (\varkappa\nu - \lambda\mu)},$$

und bestimmen, dafs links u′, v′ gesetzt werden soll, wenn rechts x, y durch x′, y′ ersetzt werden. Wenn nun zwischen u, v und u′, v′ die Transformationen der starren Bewegung

$$u' = u \cos t + v \sin t + m, \quad v' = u \sin t + v \cos t + n$$

zugelassen werden, so wird dadurch zwischen (x, y) und (x′, y′) ein gewisses System projektiver Beziehungen festgesetzt. Dabei bleiben die Punkte $(\varkappa + \lambda i, \mu + \nu i)$ und $(\varkappa - \lambda i, \mu - \nu i)$ ungeändert. Auf diese Vorstellungen kann man eine Art ebener Geometrie gründen, und diese ist mit der der euklidischen Ebene identisch. Hierauf näher einzugehen, ist nicht nötig. Dagegen wird es gut sein, ein anderes System recht genau zu betrachten.

Man gestatte, das Innere eines Kreises projektivisch so umzugestalten, dafs der begrenzende Kreis stets in Deckung mit seiner Anfangslage verbleibt. Aufser den Sätzen, welche wir bereits oben für jede projektivische Transformation angegeben haben, müssen wir, was allerdings auch mit Leichtigkeit aus den unten mitzuteilenden Formeln hervorgeht, den Satz voraussetzen, dafs das hier betrachtete System gestattet, einen beliebigen Innenpunkt in jeden andern zu verwandeln, und dafs bei der Ruhe eines Punktes noch eine einfache Unendlichkeit von Transformationen möglich ist. Sind a und b zwei Punkte im Innern, so mufs ihre Verbindungsgerade den Kreis in zwei Punkten p und q schneiden. Wir wählen den Punkt p von a aus über b;

dann ist das Doppelverhältnis $\frac{ap}{bp} : \frac{aq}{bq}$ stets positiv und gröfser als eins. Demnach bleibt $\log\left(\frac{ap}{bp} : \frac{aq}{bq}\right)$ bei jeder hier gestatteten Transformation ungeändert; ferner ist diese Gröfse stets positiv und nähert sich unbegrenzt der Null, je näher a und b einanderkommen, während sie unendlich wird, wenn einer der beiden Punkte auf den Kreis fällt. Wir fassen diese Gröfse als das Analogon zum Abstand der beiden Punkte a und b auf.

Der Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt des Kreises liegt, bleibt ungeändert bei jeder hier möglichen Transformation, welche den Mittelpunkt ungeändert läfst. Um den Winkel zweier anderen geraden Linien zu definieren, nehme man eine hier gestattete projektive Umgestaltung vor, welche den Schnittpunkt in den Mittelpunkt bringt. Den Winkel, welchen die jetzt erhaltenen Geraden einschliefsen, bezeichnet man als Winkel der gegebenen Geraden. Bei dieser Bedeutung bleibt der Winkel ungeändert, wenn man in irgend einer projektiven Weise das Kreisinnere in sich umgestaltet; und für den so definierten Winkel gelten auch die Gröfsensätze.

Dadurch haben wir die Analoga zu allen durch die ersten Definitionen Euklids bestimmten ebenen Gebilden erhalten, und hierfür gelten seine Axiome und Postulate mit Ausnahme des fünften Postulats. Man beweist demnach auch die Kongruenzsätze für das Dreieck, sowie alle weiteren Sätze, bei denen die Parallelentheorie nicht benutzt wird. Speziell kann man in der oben angegebenen Weise zeigen, dafs die Summe der Winkel eines Dreiecks nicht gröfser sein kann als zwei Rechte.

Dagegen kann die Parallelentheorie nicht bestehen bleiben. Durch jeden Punkt lassen sich unendlich viele Gerade ziehen, welche eine den Punkt nicht enthaltende gegebene Gerade im Innern des Kreises und somit für die hier geltende Anschauung überhaupt nicht treffen. Benutzen wir also den Legendreschen Satz, dafs, wenn die Winkelsumme eines Dreiecks zwei Rechte beträgt, dann auch durch jeden Punkt nur eine einzige nicht schneidende Gerade in der Ebene hindurchgeht, so folgt, dafs hier die Winkelsumme kleiner ist als zwei Rechte.

Wir wollen wenigstens noch die einfachsten Formeln mitteilen, welche für die angegebenen Transformationen gelten. Den Radius des Kreises setzen wir gleich eins und wählen den Mittelpunkt zum Anfangspunkte des Koordinatensystems, so daſs die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

ungeändert bleiben muſs. Um den gemeinschaftlichen willkürlichen Faktor der neun Koeffizienten passend zu verwenden, setzen wir folgende Beziehungen zwischen denselben fest:

$$a'^2 + a''^2 - a^2 = 1,\ b'^2 + b''^2 - b^2 = 1,\ c'^2 + c''^2 - c^2 = -1,$$
$$a'b' + a''b'' - ab = 0,\ a'c' + a''c'' - ac = 0,\ b'c' + b''c'' - bc = 0.$$

Damit bleiben drei Koeffizienten willkürlich. Soll hier der Mittelpunkt in einen beliebigen andern Punkt des Innern gebracht werden, so sind dadurch $c' : c$ und $c'' : c$ gegeben, und hieraus lassen sich alle Koeffizienten bis auf einen bestimmen.

Soll eine Gerade $mx + ny = p$ den Kreis schneiden, so muſs diejenige neue Gleichung, welche man aus der Verbindung der vorstehenden Gleichung mit der des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ erhält, einen positiven Ausdruck unter dem Wurzelzeichen haben; es muſs also der Ausdruck $m^2 + n^2 - p^2$ positiv sein, und da man m, n, p mit einem beliebigen Faktor multiplizieren darf, ist es gestattet, die Beziehung

$$m^2 + n^2 - p^2 = 1$$

zwischen den Koeffizienten vorauszusetzen. Nimmt man dieselbe Beziehung zwischen den Koeffizienten m', n', p' einer zweiten geraden Linie an, so wird der Winkel φ, den die beiden Geraden mit einander bilden, durch die Gleichung bestimmt:

$$\cos \varphi = mm' + nn' - pp'.$$

Dies beweist man in folgender Weise: Formt man die Gleichungen $mx + ny - p = 0$ und $m'x + n'y - p' = 0$ durch Transformationen um, zwischen deren Koeffizienten die angegebenen Beziehungen bestehen, so bleibt die rechte Seite $mm' + nn' - pp'$ ungeändert; dieser Ausdruck hat aber den Wert $\cos \varphi$, wenn p und p' beide null sind; folglich hat er ihn ganz allgemein.

Bildet die Gerade $mx + ny - p = 0$ mit der x-Achse den Winkel α, so ist $\cos \alpha = m$; und wenn dieselbe Gerade mit der y-Achse den Winkel β bildet, so ist $\cos \beta = n$. Nun ist $m^2 + n^2 = 1 + p^2$, also für ein nicht verschwindendes p immer $m^2 + n^2 > 1$ oder $\cos^2 \alpha > 1 - \cos^2 \beta$ oder da α und β beides spitze Winkel sind, $\cos\alpha > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ oder $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$, somit die Winkelsumme in diesem Dreieck kleiner als zwei Rechte.

Somit haben wir hier eine Anschauung gewonnen, welche mit den geometrischen Begriffen vereinbar ist, aber die Parallelentheorie keineswegs nach sich zieht. Diese Anschauung kann aber auch auf den Raum übertragen werden. Man transformiere das Innere einer Kugel in der Weise durch projektive Umgestaltungen, dafs die begrenzende Fläche immer in sich verbleibt. Dann geht jede Ebene wieder in eine Ebene, jede Gerade wieder in eine Gerade über. Der Abstand zweier Punkte und der Winkel zweier Ebenen und zweier schneidenden Geraden werden entsprechend den obigen Festsetzungen definiert. Die jetzt erhaltenen Resultate entsprechen genau den für die Ebene gefundenen, und in den Beweisen tritt auch keine Änderung ein.[7])

§ 8.

Beziehung der Parallelentheorie zur Erfahrung.

Nachdem wir bewiesen haben, dafs das fünfte Postulat Euklids keine Folgerung aus seinen übrigen Voraussetzungen bildet, müssen wir die Frage stellen, ob dasselbe nicht wenigstens von der Erfahrung verlangt wird. Darüber kann allerdings kein Zweifel herrschen, dafs dies Axiom sowie alle Folgerungen aus demselben aufs schönste mit der Erfahrung übereinstimmen, und es dürfte für die Anwendungen auf Astronomie und Physik meines Erachtens nicht das geringste Bedürfnis vorliegen, die Berechtigung noch eigens zu prüfen. Damit ist aber die Mathematik der hier gestellten Aufgabe nicht überhoben.

Zunächst könnte man eine direkte Prüfung versuchen. Wenn uns eine Gerade AB und aufserhalb derselben ein Punkt P gegeben ist, so fällen wir von P auf AB die Senkrechte PQ und errichten in P auf PQ die Senkrechte MN. Jetzt ziehe man von P nach einem Punkte D von QA die QD, und lege den Winkel PDQ als Wechselwinkel in P an PQ an. Fällt der zweite Schenkel genau mit PM zusammen, so ist damit ein direkter Beweis erbracht. Aber jeder noch so feine Strich mit dem Bleistift ist keine wirkliche Linie, sondern bedeckt einen Teil der Fläche. Zudem steht uns keine wirkliche Ebene für die Zeichnung zu Gebote; was wir als Ebene benutzen, ist im besten Falle ein Teil einer Kugelfläche. Somit kann ein Versuch der bezeichneten Art niemals eine volle Entscheidung liefern.

Zweitens könnte man versuchen, einen Satz, der mit dem Parallelaxiom steht oder fällt, durch die Erfahrung zu prüfen. Hierfür eignet sich am besten der Satz, dafs die Winkelsumme eines Dreiecks zwei Rechte beträgt. Um aber diese Messungen direkt vornehmen zu können, ohne sich wiederum bereits auf Sätze der Geometrie zu stützen, die aus dem Parallelaxiom fliefsen, darf man nur drei Punkte auf der Erde hierfür wählen. [So kann ich das von Lobatschewsky eingeschlagene Verfahren (man vergleiche: Frischauf, absolute Geometrie S. 137, 138) nicht für streng halten.] Eine derartige Messung ist z. B. für das Dreieck: Inselsberg, Brocken, hoher Hagen, ausgeführt und hat auf zwei rechte Winkel geführt. Aber keine unserer Messungen ist absolut genau, und deshalb können wir nur gewisse Grenzen angeben, zwischen denen die Fehler liegen. Somit ist nur die angenäherte, aber nicht die absolute Richtigkeit des Satzes erwiesen.

Endlich giebt es noch eine dritte Art der Prüfung. Man nimmt an, das Parallelaxiom sei unrichtig, und prüft, ob alle Folgerungen, welche aus dieser Annahme hervorgehen, mit der Erfahrung vereinbar sind. Ehe wir eine solche Prüfung vornehmen können, müssen wir diese Folgerungen erst ziehen. Zu dieser Aufgabe gehen wir jetzt über. Wenn wir aber dann die Übereinstimmung mit der Erfahrung prüfen wollen, so müssen wir wohl beachten, dafs der Geist unwillkürlich bereit ist, die durch direkte Erfahrung gewonnenen Anschauungen, für welche immer nur ein ganz kleines Gebiet zur Verfügung steht, zu verallgemeinern und als allgemein gültig anzusehen. Nun wird sich allerdings zeigen, dafs, wenn das Parallelaxiom ausgeschlossen ist, in gröfseren Entfernungen mehrfach andere Gesetze gelten, als der aus kleinen Gebieten gewonnenen Anschauung entsprechen. Namentlich möchte ich von vorn herein bemerken, dafs es häufig schwer ist, die neuen Sätze durch eine Figur zu erläutern, die naturgemäfs auf einen kleinen Raum beschränkt werden mufs.

§ 9.

Hülfssätze zur Einführung in die Lobatschewskysche Geometrie.

Diejenige Geometrie, welche sämtliche Voraussetzungen Euklids, also auch das elfte Axiom benutzt, bezeichnen wir als die euklidische. Indem wir aber alle übrigen Voraussetzungen beibehalten und nur dies eine Axiom ausschliefsen, soll die zu erhaltende Raumform als die Lobatschewskysche bezeichnet werden. Zur Einführung in dieselbe möchten wir das treffliche Werk des Herrn Frischauf: Einleitung in die absolute Geometrie (Leipzig 1876) dringend empfehlen. Es ist aber gut, wenn verschiedene Methoden angegeben werden können, welche geeignet sind, in ein noch unbekanntes Gebiet einzuführen, und deshalb erscheint es angemessen, im folgenden einen andern Weg mitzuteilen.[8])

Wir setzen dabei alle diejenigen Sätze voraus, für deren Beweis Euklid sein fünftes Postulat nicht benutzt, speziell die Propositionen 1—28 (incl.) des ersten Buches. Auch erinnern wir an den Legendreschen Beweis (§ 5 S. 9) dafür, dafs die Winkelsumme für ein Dreieck ebenso grofs oder kleiner ist als zwei Rechte. Demnach ist die Summe der Winkel eines Vierecks jedenfalls nicht gröfser als vier Rechte.

Der weitern Entwicklung schicken wir noch folgende Sätze voraus.

a) Errichtet man auf einer Geraden zwei Senkrechte, und macht dieselben gleich, so sind auch die Winkel gleich, welche diese Senkrechten mit der Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte einschliefsen; sind aber die Senkrechten ungleich, so ist von den zwei Winkeln der an der kleineren Seite anliegende der gröfsere.

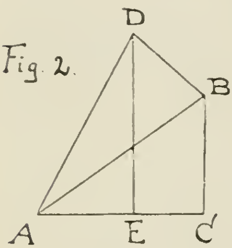
Umgekehrt, wenn in einem Viereck zwei Seiten auf derselben dritten senkrecht stehen, so sind diese beiden Seiten gleich oder ungleich, jenachdem die an der vierten Seite anliegenden Winkel des Vierecks gleich oder ungleich sind; bei ungleichen Winkeln ist die an dem kleineren anliegende Seite die gröfsere.

Man bringe, was nach den Annahmen möglich ist, das Viereck DECB (Fig. 2) in eine solche Lage, dafs E und C, sowie die Richtung CB und ED ihre Lagen vertauschen. Dann folgen die beiden ersten Teile des Satzes unmittelbar, während sich die beiden letzten leicht indirekt ergeben.

b) Wenn in einem Viereck drei Winkel Rechte sind, so ist jede der den vierten Winkel einschliefsenden Seiten nicht kleiner als ihre Gegenseite.

Wenn (Fig. 3) im Viereck BCEF die Winkel B, C, E Rechte sind, so ist $F < R$. Dann stehen BF und CE auf BC senkrecht, und es ist $F < E$, also nach dem vorangehenden Satze $BF > CE$. Betrachtet man die auf CE senkrecht stehenden Linien CB und EF, so folgt $EF \geqq BC$.

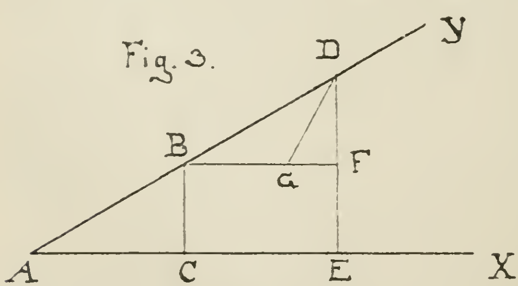
c) Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse übereinstimmen, aber der eine spitze Winkel im einen gröfser ist als im andern, so ist die gegenüberliegende Kathete im ersten gröfser als im zweiten.



Man gebe den Dreiecken die in Fig. 2 angegebene Lage, wobei $AD = AB$ ist. Dann mufs wegen der Sätze über die Summe der Winkel eines Dreiecks die AB von DE zwischen A und B getroffen werden. Da aber $\sphericalangle\, ADB = ABD$ ist, so mufs EDB $<$ CBD sein; und jetzt folgt der Satz aus a).

d) Der senkrechte Abstand der Punkte des einen Schenkels eines Winkels vom andern Schenkel wächst unbegrenzt, wenn man nur die Entfernung der Punkte vom Scheitel genügend wachsen läfst.

Wenn (Fig. 3) der Winkel XAY beliebig gegeben ist, und ebenso eine Strecke G, so wollen wir nachweisen, dafs es auf AY einen Punkt L giebt, für welchen die von L auf AX gefällte Senkrechte gröfser ist als G. Zum Beweise nehme ich auf AY beliebig den Punkt B an und fälle $BC \perp AX$; man mache $BD = AB$, fälle $DE \perp AX$ und errichte in B die Senkrechte auf BC, welche DE zwischen D und E in F trifft. Dann ist (nach b) $FE \geqq BC$, und wenn man von D die Senkrechte

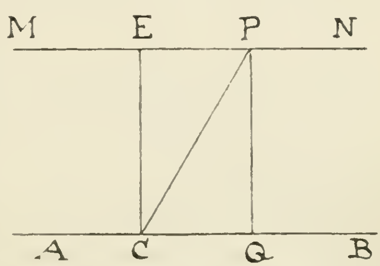


DG auf BF fällt, so ist DF entweder = DG oder > DG; ersteres, wenn F mit G zusammenfällt, letzteres im andern Falle, da dann DF Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DFG ist. Nun ist die Summe der Winkel des Dreiecks ABC < 2R, folglich ∢ DBG > BAC, also (nach c) auch DG > BC. Somit ist schliefslich DE > 2BC.

Wiederhole ich dieselbe Konstruktion hinreichend oft, so mufs sich eine ganze Zahl r finden, für welche r . BC > G ist; folglich giebt es Punkte L von der verlangten Eigenschaft.

e) Gegeben sei eine unbegrenzte Gerade AB und aufserhalb derselben ein Punkt P. Von P fällen wir auf AB die Senkrechte PQ (Fig. 4) und errichten in P die Senkrechte PMN auf PQ. Dann kann MN die AB nicht schneiden. Dasselbe gilt von jeder in P begrenzt gedachten Halbgeraden PS, welche gegen MN in der entgegengesetzten Halbebene liegt, als AB. Entweder wird nun jede Halbgerade PT, welche in einem der Winkelfelder QPM und QPN liegt, die AB treffen, oder es giebt solche, für welche das nicht der Fall ist. Wenn das erstere eintritt, so geht durch P nur die eine gerade Linie MN, welche mit AB keinen Punkt gemeinschaftlich hat. Ziehen wir nun von P eine Gerade PC nach einem beliebigen Punkte C von QA, und legen den Winkel QCP als Wechselwinkel in P an PC, so mufs, da der zweite Schenkel desselben die AB nicht treffen darf, dieser zweite Schenkel mit PM zusammenfallen. Macht man also auf PM die PE = QC, so steht CE auf AB und MN senkrecht. Da aber C auf AB willkürlich gewählt werden kann, so folgt, dafs jede Gerade, welche auf AB senkrecht steht, auch MN rechtwinklig trifft, und dafs jede gemeinschaftliche Senkrechte gleich PQ ist.

Fig. 4.



Errichtet man aber in einem beliebigen Punkte zwischen P und Q eine Senkrechte M'N' auf PQ, so trifft diese keine der beiden Linien AB und MN. Jede Linie durch P, mit alleiniger Ausnahme von MN, trifft aber die AB, folglich auch jedesmal die M'N'.

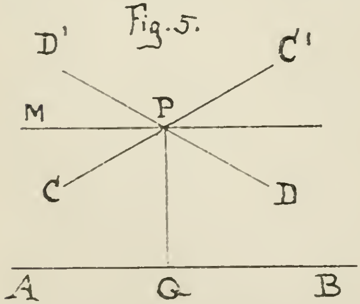
Endlich sei K ein beliebiger Punkt auf der Verlängerung von PQ über P hinaus. Man trage darauf, so oft es angeht, die PQ von P aus ab. Die weiteren Endpunkte seien P_1, $P_2 \ldots P_n$, so daſs $P_nK < PQ$ ist. Dann errichte man in den einzelnen Punkten $P_1 \ldots P_n$, K die Senkrechten $M_1N_1, \ldots, M_nN_n$, $M_{n+1}N_{n+1}$ auf dieser Geraden. Dann geht, wie bereits bewiesen, durch K eine einzige Parallele zu M_nN_n. Ziehe ich also eine von $M_{n+1}N_{n+1}$ verschiedene Gerade l durch K, so trifft diese die M_nN_n. Da aber jeder Punkt auf M_nN_n nach dem vorhin Bewiesenen von $M_{n-1}N_{n-1}$ den Abstand PQ hat, also durch jeden Punkt auf M_nN_n nur die eine Gerade geht, welche die $M_{n-1}N_{n-1}$ nicht trifft, so schneidet l auch die $M_{n-1}N_{n-1}$ u. s. w. Somit geht durch jeden Punkt der Ebene eine einzige Gerade, welche zu einer gegebenen Linie der Ebene parallel ist.

§ 10.

Zwei gerade Linien in einer Lobatschewskyschen Ebene.

a) Wir betrachten von jetzt an nur die zweite in § 9 e) aufgestellte Möglichkeit. Es möge sich also im Winkelfelde QPM eine weitere Halbgerade ziehen lassen, welche die QA nicht trifft. Dann giebt es jedenfalls in diesem Winkelfelde noch weitere Halbgerade von derselben Eigenschaft, und infolge der Stetigkeit muſs eine gewisse Halbgerade PC die Grenze zwischen den schneidenden und nicht schneidenden Halbgeraden sein. Es soll also jede im Winkelfelde QPC gelegene Halbgerade schneiden; aber die im Winkelfelde MPC gelegenen sollen nicht schneiden. Macht man $\sphericalangle$ QPD = QPC, so werden PC und PD für alle durch P begrenzten Halbgeraden die Grenze zwischen den schneidenden und nicht schneidenden sein. Verlängern wir PC über P als PC′ und ebenso PD als PD′, so sollen die Geraden CC′ und DD als die durch P gezogenen Parallelen zu AB, und jede in den beiden Scheitelwinkeln CPD′ und C′PD enthaltene Gerade als nicht-schneidende bezeichnet werden.

Fig. 5.



Der Schlufs des vorigen Paragraphen zeigt, dafs eine ganz entsprechende Voraussetzung für jeden Punkt der Ebene gemacht werden mufs.

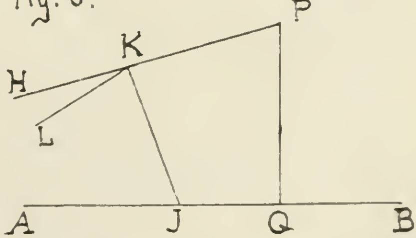
Der Winkel QPC wird von Lobatschewsky als der zum Abstand QP gehörige Parallelwinkel bezeichnet; derselbe kann sich offenbar mit dem Abstande ändern.

b) Fällt man von C′ die Senkrechte C′R auf AB, so mufs nach § 9 a) die $C'R > PQ$ sein. Ferner mufs C′R die PD treffen, etwa in S; dann ist $C'R > C'S$, und somit auch gröfser als die von C′ auf PD gefällte Senkrechte. Da die letztere aber nach § 9 d) über jede Gröfse wächst, wenn man nur PC′ hinlänglich grofs nimmt, so wird auch die Linie C′R unbegrenzt wachsen. Somit giebt es auf jeder Linie, welche zu einer Geraden parallel ist, Punkte, deren senkrechter Abstand von der Geraden über alle Grenzen anwächst.

c) Ganz Entsprechendes gilt von der Geraden PM. Fällt man von M die Senkrechte MT auf AB, so schneidet dieselbe die PC, etwa in U; dann ist $MT > MU$, und da letztere beliebig grofs gemacht werden kann, wenn man nur M weit genug von P wegrücken läfst, so erlangt der Abstand der auf PM gelegenen Punkte von AB jede beliebige Gröfse. Die kürzeste Entfernung der beiden Linien ist die gemeinschaftliche Senkrechte; von da an entfernen sie sich nach beiden Richtungen unbegrenzt von einander.

d) Nehmen wir jetzt an, die Geraden EF und AB hätten eine gemeinschaftliche Senkrechte h, welche kleiner wäre als PQ. Dann mufs auf der Geraden EF ein Punkt liegen, dessen Abstand von AB gleich PQ ist. Folglich kann man (Fig. 6) durch P im Winkelfelde QPM eine Gerade ziehen, welche mit AB eine gemeinsame Senkrechte von der Länge h hat. Diese Gerade sei PH,

Fig. 6.



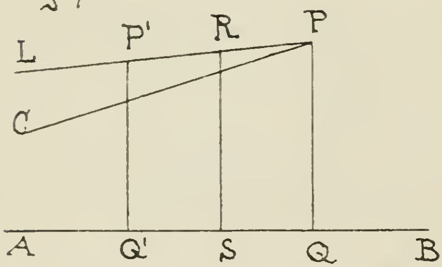
und es stehe KI auf PH und AB senkrecht und sei gleich h. Dann müssen (nach a) durch K im Winkelfelde HKI noch andere gerade Linien gezogen werden können, welche AB nicht treffen.

Eine solche sei KL. Verbinden wir P mit einem beliebigen Punkte der Halbgeraden KL, so tritt sie im Schnittpunkt auf diejenige Seite von KL, in welcher AB nicht liegt; folglich kann sie die AB nicht treffen. Somit giebt es im Winkelfelde HPQ nicht schneidende Halbgeraden (von P aus); PH kann also nicht selbst die Parallele sein, vielmehr mufs die letztere die KI zwischen K und I schneiden. Daher giebt es auf der Parallelen einen Punkt, dessen Abstand von AB kleiner als h ist. Dies führt zu dem Satze:

Wenn die Gerade PC parallel zu BA ist, so nähern sich die Punkte von PC der BA nach der einen Seite unbegrenzt, und nach der andern Seite entfernen sie sich unbegrenzt von ihr.

e) Es sei PC die eine Parallele von P aus zu BA, und PL irgend eine nicht schneidende Linie (Fig. 7). Dann zeigt man wie in b) und c), dafs der Abstand der auf PL gelegenen Punkte von AB unbeschränkt grofs wird, wenn man nur sich weit genug vom Punkte P entfernt. Wenn aber der Winkel QPL als spitz vorausgesetzt wird, so nimmt der Abstand anfangs ab;

Fig. 7.



somit mufs auf PL ein zweiter Punkt P' vorkommen, dessen Abstand P Q' von AB gleich PQ ist. Ist dann R die Mitte von PP' und S die von QQ', so steht die Gerade RS sowohl auf AB als auf PL senkrecht. Zugleich giebt RS den kürzesten Abstand der beiden Linien an. [Man konnte dies auch in folgender Weise zeigen. Steht LV $\perp$ AB und ist LV $>$ PQ, so mufs $\sphericalangle$ VLP $<$ LPQ sein, also selbst ein spitzer; nun geht, wenn man die Senkrechte L'V' von allen zwischen P und L liegenden Punkten L' fällt, der Winkel PL V' von einem stumpfen in einen spitzen über; er mufs also auch einmal ein rechter werden.] Daraus folgt:

Irgend zwei nicht-schneidende Gerade haben eine gemeinschaftliche Senkrechte und in dieser einen kürzesten Abstand von endlicher Gröfse.

f) Demnach können wir jetzt auch den Satz d) umkehren und sagen:

Wenn sich eine gerade Linie nach der einen Richtung hin einer zweiten unbegrenzt nähert, ohne sie je zu treffen, so ist sie zu ihr parallel.

Wenn daher eine Gerade PC für den Punkt P eine Parallele zu AB ist, so ist sie es auch für jeden andern ihrer Punkte; ebenso gilt die Eigenschaft des Nicht-Schneidens für alle Punkte der betreffenden Geraden, wenn sie für einen gilt.

Wenn in der Ebene eine Gerade AB gegeben ist, so zerfallen die sämtlichen übrigen Geraden in drei Klassen:

1. schneidende Gerade, welche mit AB einen Punkt gemeinschaftlich haben,

2. parallele Gerade, welche sich der AB nach der einen Richtung unbegrenzt nähern, ohne sie je zu treffen, und sich nach der andern von ihr unbegrenzt entfernen,

3. nicht schneidende Gerade, deren Abstände ein bestimmtes Minimum besitzen; von da ab entfernen sich die Punkte der nichtschneidenden unbegrenzt von AB.

g) Beim Ausdruck des Parallelismus von geraden Linien wollen wir zugleich die Richtung angeben, nach welcher hin sich die Geraden einander unbegrenzt nähern; so soll heifsen, PC sei zu BA parallel, dafs die Richtungen PC und BA eine unbegrenzte Annäherung besitzen.

h) Aus den Sätzen d) und e) ergiebt sich weiter, dafs, wenn PC zu BA, auch BA zu PC parallel ist, und dafs, wenn PL zu den nicht-schneidenden Linien für AB gehört, dies auch umgekehrt gilt.

i) Wenn drei Geraden in einer Ebene liegen und wenn zwei von ihnen der dritten nach derselben Richtung hin parallel sind, so sind sie auch unter einander parallel.

Wenn AB zu CD und zu EF parallel ist, so kann man einen Punkt auf AB bestimmen, dessen senkrechter Abstand sowohl von CD wie von EF beliebig klein ist; diese Abstände seien k und l; dann ist die Verbindungslinie der Fufspunkte schon kleiner als k + l, daher um so mehr der senkrechte Abstand.

§ 11.

Gerade Linien im Lobatschewskyschen Raume.

Auch aus der Stereometrie müssen wir einige Sätze vorausschicken, welche vom Parallelaxiom unabhängig sind.

a) Zwei Ebenen, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, schneiden sich in einer geraden Linie.

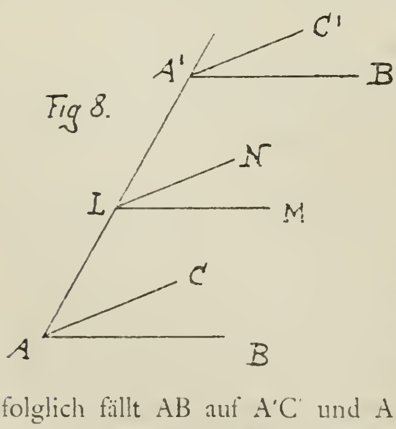
b) Wenn drei Ebenen einander je in drei Kanten a, b, c schneiden und wenn a und b, einen Punkt gemeinschaftlich haben, so geht auch c durch diesen Punkt.

c) Wenn eine Gerade senkrecht steht auf zwei Geraden einer Ebene, welche durch ihren Fuſspunkt gehen, so steht sie auf allen in derselben Ebene durch ihren Fuſspunkt gehenden Geraden senkrecht.

d) Errichtet man in jeder von zwei sich schneidenden Ebenen auf der Schnittlinie in demselben Punkte die Senkrechte, so ist die Gröſse des von diesen beiden Senkrechten gebildeten Winkels unabhängig von dem Punkte, in welchem die Senkrechten errichtet sind.

A und A′ mögen in der Kante der beiden Ebenen liegen, und BA, B′A′, CA, C′A′ mögen auf der Kante senkrecht stehen, die beiden ersten sollen in der ersten, die letzten in der zweiten Ebene liegen. Um zu beweisen, daſs die Winkel BAC und B′A′C′ (Fig. 8) gleich sind, halbiere man AA′ in L, und ziehe durch L in den beiden Ebenen LM und LN senkrecht zu AA′. Nun bewege man die Figur so, daſs die Schenkel des Winkels LMN ihre Lage vertauschen. Dann vertauschen auch die Richtungen LA und LA′, sowie die Ebenen BMB′ und CNC′ ihre Lage; folglich fällt AB auf A′C′ und AC auf A′B′.

Fig 8.



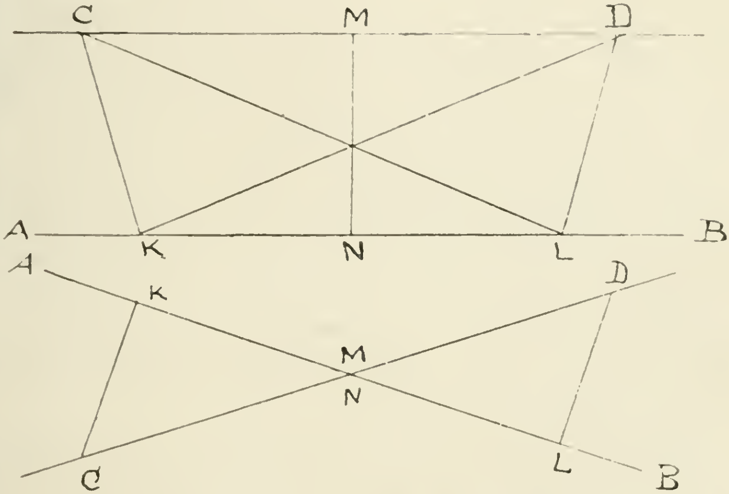
e) Wenn der Neigungswinkel zweier Ebenen ein Rechter ist, so fällt die in einem Punkte der Kante auf der einen Ebene errichtete Senkrechte in die andere Ebene, und umgekehrt.

f) Zwei Gerade, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, liegen in einer Ebene.

g) Für zwei windschiefe Gerade giebt es einen kürzesten Abstand in einer Geraden, welche auf beiden senkrecht steht; von den Fufspunkten aus entfernen sich die Punkte der einen Geraden immer weiter von der andern.

Die Geraden seien AB und CD (Fig. 9); dann läfst sich durch AB und einen beliebigen Punkt von CD eine Ebene legen.

Fig 9.

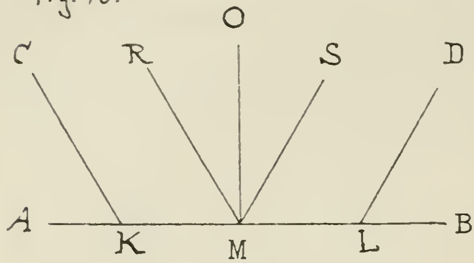


Da CD diese Ebene schneidet, so wächst (entsprechend § 9 d) die Entfernung ihrer Punkte von der Ebene nach beiden Richtungen unbegrenzt. Dasselbe gilt also auch für die Abstände von der Geraden AB. Wenn also CK $\perp$ AB steht, und wenn gewisse Punkte von CD der AB näher liegen als C, so läfst sich ein solcher Punkt D finden, dafs die von D auf AB gefällte Senkrechte DL gleich CK ist. Dann ist CKL $\cong$ DLK, also CL $=$ DK, daher auch CDK $\cong$ DCL, also $\sphericalangle$ KCD $=$ LDC. Nun halbiere man CD in M und KL in N, so ist zunächst CKM $\cong$ DLM, also MK $=$ ML; somit auch wegen der Kongruenz der Dreiecke CMN und DMN die MN $\perp$ KL. Ferner ist CKN $\cong$ DLN, und demnach MN $\perp$ CD.

Dasselbe kann man auf folgendem Wege zeigen:

Wiederum sei CK ⊥ AB, DL ⊥ AB, CK = DL. Man suche die Mitte M von KL, errichte durch M in jeder der beiden Ebenen ABC und ABD auf der Schnittlinie AB die Senkrechten MR und MS und halbiere deren Winkel durch MO. Nun drehe man die Figur um MO, bis MR und MS und damit die Ebenen ABC und ABD ihre Lage vertauschen. Dann fällt C auf D, D auf C, also nimmt auch die Mitte N von CD wieder ihre Anfangslage ein. Da aber nur die Gerade MO ihre Lage beibehält, so liegt N in MO, und es ist ∢ MNC = MND oder MN steht auf beiden Geraden senkrecht.

Fig. 10.



Einen zweiten Punkt M′ in CD, dessen Abstand M′N′ von AB gleich MN wäre, kann es nicht geben, da sonst die durch die Mitten von MM′ und NN′ gelegte Gerade auf AB und CD senkrecht stände, und die Fortsetzung des Verfahrens zeigen würde, daſs die Geraden überall denselben Abstand hätten, was mit § 9 d) nicht übereinstimmt.

Daher kann es auch keinen Punkt M′ auf CD geben, dessen Abstand M′N′ von AB kleiner wäre als MN; denn sonst müſste, da der Abstand unbegrenzt wächst, für einen Punkt M′ die Senkrechte M′N′ = MN sein.

Als Winkel der beiden windschiefen Geraden bezeichnen wir den Neigungswinkel derjenigen Ebenen, welche beide durch die gemeinschaftliche Senkrechte gehen und von denen die eine die Gerade AB, die andere die CD enthält.

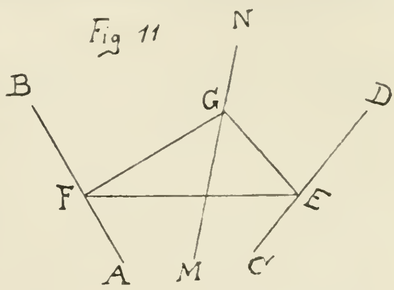
Auf die Berechtigung dieser Definition wollen wir nicht eingehen; wir bemerken nur, daſs durch den Abstand und den Winkel die gegenseitige Lage zweier Geraden vollständig bestimmt ist.

Während die voranstehenden Sätze von der Annahme über die Parallelen unabhängig sind, legen wir jetzt die in § 10 aufgestellte Voraussetzung zu Grunde.

h) Wenn von den drei Kanten, welche durch den Schnitt dreier Ebenen erhalten werden, zwei sich nicht schneiden, sondern einen kürzesten Abstand haben, so ist auch die dritte für jede der beiden ersten eine nicht-schneidende Linie. Die Fufspunkte der drei gemeinschaftlichen Senkrechten fallen zu je zweien zusammen.

AB und CD (Fig. 11) seien zwei nicht schneidende Gerade in derselben Ebene, so dafs sie eine gemeinschaftliche Senkrechte EF haben. Aufserhalb dieser Ebene wähle man einen Punkt M; dann haben die Ebenen MAB und MCD eine Gerade MN gemeinschaftlich. Wir errichten in der Ebene ABMN auf AB in F die Senkrechte FG, so steht AB auf der Ebene FEG senkrecht, folglich auch die Ebene ABCD auf der Ebene FEG, somit (nach e) auch CE senkrecht auf FEG, speziell auf EG. Die in G auf der Ebene GEF errichtete Senkrechte liegt (nach f) sowohl in der Ebene CEG, wie in AFG, mufs also mit ihrer Schnittlinie zusammenfallen.

Fig. 11



i) Sind von den drei Schnittlinien dreier Ebenen zwei parallel, so sind sie alle unter einander parallel.

Von den drei Kanten l, m, n seien l und m parallel; schnitten sich l und n, so müfste (nach b) ihr Schnittpunkt auch auf m liegen; hätten aber l und n eine gemeinsame Senkrechte, so gälte (nach h) dasselbe für l und m.

k) Zwei Gerade, welche einer dritten nach derselben Richtung parallel sind, sind auch unter einander parallel.

l und m seien beide zu n parallel; man lege durch einen Punkt A auf l und jede der Linien m und n eine Ebene. Der Schnitt dieser beiden Ebenen ist (nach i) sowohl zu m als zu n parallel. Da aber durch A nur eine einzige Gerade geht, welche zu n nach der festgesetzten Richtung parallel ist, so wird der Schnitt durch l gebildet, und diese Linie ist auch zu m parallel.

§ 12.

Lage einer Geraden zu einer Ebene im Lobatschewskyschen Raume.

a) Alle Geraden, welche durch einen Punkt gehen und eine gegebene Ebene schneiden, liegen im Innern eines gewissen geraden Kegels.

Drehen wir einen Winkel um den einen Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene oder eine gerade Kegelfläche, jenachdem der Winkel ein Rechter ist oder nicht. In einer Ebene II liege (wie in Fig. 5 S. 22) die Gerade AB, aufser ihr der Punkt P, PQ stehe auf AB senkrecht, und C'C sei die durch P zu BA gezogene Parallele. Dreht man die Figur um PQ, so beschreibt AQ eine Ebene I, CC' einen Kegelmantel. Alle im Winkelfelde QPC durch P gezogenen Geraden treffen die Gerade AB, daher treffen auch alle von P ausgehenden und im Innern des Kegels gelegenen Geraden die Ebene I.

b) Wenn eine Ebene und ein Punkt aufserhalb derselben gegeben ist, so kann man durch den Punkt als Spitze einen geraden Kegel (den Parallelkegel) legen, welcher folgende Eigenschaften hat:

1. Jede durch die Spitze gelegte und auf der gegebenen Ebene senkrechte Ebene schneidet diese und den Kegelmantel in parallelen Geraden;

2. Zieht man durch die Spitze eine aufserhalb des Kegels verlaufende Gerade und legt hierdurch eine zur Ebene senkrechte Ebene, so wird deren Schnittlinie die gezogene Gerade nicht schneiden.

c) Zieht man durch den Scheitel des Parallelkegels eine Gerade aufserhalb desselben, so hat deren Entfernung von der Ebene ein bestimmtes Minimum; die kürzeste Verbindungslinie steht auf der Geraden und der Ebene senkrecht; vom Fufspunkt aus nach beiden Seiten erreicht der Abstand der Geraden von der Ebene jede beliebig gewählte Gröfse.

Wenn PH aufserhalb des Kegels liegt, so lege man eine auf I senkrecht stehende Ebene hindurch und bezeichne deren Schnitt mit I als QA. Dann giebt es (nach § 10 d) eine Gerade KI, welche auf PH und AB senkrecht steht (vergl. Fig. 6 S. 23). Da KI in der zu I senkrecht stehenden Ebene QPH liegt und mit der Kante einen rechten Winkel bildet, so steht sie (nach § 11 e) auch auf der Ebene I senkrecht. Die von jedem andern Punkte der PH auf I gefällte Senkrechte trifft (nach § 11 e) wieder die QA und wächst daher (nach § 10 c) nach beiden Richtungen unbegrenzt.

d) Jede Kante des Parallelkegels einer Ebene nähert sich der Ebene unbegrenzt; sie ist parallel zu jeder in der Ebene gelegenen Geraden, mit welcher sie wieder in einer Ebene liegt.

Ist PC eine Kante des Kegels, so lege man wieder durch sie die zu I senkrechte Ebene II und fälle von einem beliebigen Punkte von PC die Senkrechte auf I. Diese liegt in II und steht auf der Kante senkrecht. Daher folgt der erste Teil des Satzes aus § 10 d. Der zweite Teil folgt aus § 11 i; denn es wird behauptet, dafs PC parallel ist einer in I liegenden Geraden l, welche mit PC in einer Ebene III liegt.

e) Die Geraden des Raumes zerfallen in Bezug auf eine Ebene in drei Gruppen: schneidende, parallele und nicht-schneidende; für die letzten erreicht der Abstand ein bestimmtes Minimum, für die Parallelen wird der Abstand unbegrenzt kleiner, ohne je zu verschwinden.

f) Wenn eine Gerade zu einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel ist, so ist sie zu der Ebene selbst parallel.

Ein entsprechender Satz gilt für nicht-schneidende Gerade, wenn angenommen wird, dafs zwei derartige Gerade jedesmal in derselben Ebene liegen.

§ 13.

Gegenseitige Lage mehrerer Ebenen im Lobatschewskyschen Raume.

a) Wenn eine Ebene und einer ihrer Parallelkegel gegeben ist, und wenn man dann durch die Spitze des Kegels eine Ebene legt, welche ihn in zwei Kanten trifft, so schneidet sie auch die gegebene Ebene.

Da die zweite Ebene in das Innere des Parallelkegels eintritt, so mufs sie nach § 12 a) die erste Ebene treffen.

b) Wenn eine Ebene den zu einer gegebenen Ebene parallelen Kegel längs einer Kante berührt, so nähert sie sich dieser Ebene unbegrenzt. Durch jeden Punkt der zweiten Ebene geht eine zur ersten parallele Gerade.

Wenn die Ebene III längs PC den Kegel berührt, so hat sie mit der Ebene I (nach § 12) keinen Punkt gemeinschaftlich. Zudem werden die Senkrechten immer kleiner, welche von Punkten von PC auf I gefällt werden. Ist l in III zur Richtung PC parallel gezogen, so wähle man auf l einen Punkt R, so dafs die Senkrechte RS auf PC, und zugleich die von S auf I gefällte Senkrechte ST beliebig klein wird. Dann wird auch RT und somit auch die von R auf I gefällte Senkrechte beliebig klein.

c) Wenn eine durch die Spitze eines Parallelkegels zu einer Ebene gelegte zweite Ebene ganz aufserhalb des Kegels liegt, so haben die beiden Ebenen einen kürzesten Abstand in einer gemeinsamen Senkrechten und entfernen sich von da an unbegrenzt weit von einander. Die eine Ebene enthält keine zur andern parallele Gerade.

Wenn die Ebene V ganz aufserhalb des Kegels liegt, so projiziere man die von P auf I gefällte Senkrechte auf V. Die Projektion wird ein Punkt, wenn PQ auf beiden Ebenen senkrecht steht, sonst eine Gerade PH. Diese hat (nach § 12 c) mit der Ebene I eine gemeinsame Senkrechte IK, und da letztere in der Ebene PQH liegt, welche auf V senkrecht steht, so steht sie auf der Ebene V senkrecht (§ 11 e). Von der gemeinschaftlichen Senkrechten an entfernt sich jede Gerade der Ebene V, also auch diese selbst, unbegrenzt von der ersten Ebene.

d) Inbetreff der gegenseitigen Lage zweier Ebenen sind also drei Fälle möglich: entweder schneiden sie sich, oder sie nähern sich unbegrenzt, ohne einander je zu treffen, oder sie haben einen kürzesten Abstand in einer gemeinsamen Senkrechten. Den zweiten Fall bezeichnen wir als den des Parallelismus, den dritten als den des Nichtschneidens.

e) Konstruiert man durch irgend zwei Punkte einer Ebene die Parallelkegel für eine zweite Ebene, so hat die erste Ebene zu den beiden Kegeln gleiche Lage: entweder schneiden beide Ebenen oder beide Ebenen berühren oder sie liegen beide ganz aufserhalb.

f) Wenn eine Gerade zu einer Ebene parallel ist, so geht nur eine einzige parallele Ebene hindurch; dagegen gehen durch eine die Ebene nicht schneidende Gerade zwei zur Ebene parallele Ebenen.

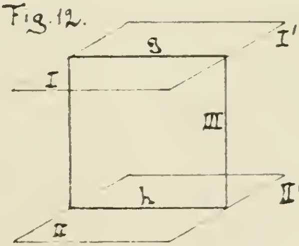
Zum Beweise konstruiere man durch einen Punkt der Geraden als Spitze den Parallelkegel für die Ebene. Durch jede Kante geht nur eine Tangentialebene, dagegen durch einen von der Spitze aus ins Äufsere des Kegels gezogene Gerade zwei Tangentialebenen.

g) Durch eine zu einer Ebene parallele Gerade gehen aufser der parallelen Ebene nur solche Ebenen, welche die gegebene Ebene schneiden; dagegen kann man durch eine nicht-schneidende Gerade schneidende, parallele und nicht-schneidende Ebenen legen.

h) Werden zwei Ebenen durch dieselbe dritte Ebene in parallelen Geraden geschnitten und sind die innern Winkel (Wechselkeile) gleich, welche die dritte Ebene nach verschiedenen Seiten hin mit den beiden Ebenen bildet, so sind die Ebenen parallel.

Die Ebene III (Fig. 12) schneide die beiden andern Ebenen in zwei parallelen Geraden g und h. Die erste Ebene werde von g in die Teile I und I′, die zweite durch h in II und II′ zerlegt, wo I und II auf derselben Seite gegen III liegen; der Neigungswinkel zwischen I und III sei gleich dem zwischen II′ und III. Nun bringe man die Figur in eine solche Lage, dafs g und h, I und II′ ihre Lage vertauschen, was möglich ist; dann vertauschen auch I′ und II die Lage. Schnitten sich die Ebenen, so wäre die Schnittgerade zu g und h parallel, läge also entweder ganz in I und II, oder in I′ und II′. Dann würde die Umlegung eine zweite Schnittlinie ergeben.

Fig. 12.



i) Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene in parallelen Geraden geschnitten, so beträgt die Summe der innern an derselben Seite gelegenen Winkel (Keile) zwei Rechte.

Dieser Satz folgt aus g) und h).

k) Wenn drei Ebenen sich in parallelen Kanten schneiden, so ist die Summe ihrer innern Winkel (Keile) zwei Rechte.

Zum Beweise lege man durch die eine Kante die zur gegenüberliegenden Ebene parallele Ebene.

l) Geht man von einer Geraden aus und betrachtet alle zu ihr nach derselben Richtung hin zu ziehenden Parallelen, so bildet deren Gesamtheit eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche durch ein stetiges, in sich abgeschlossenes System von Bewegungen in sich bewegt wird. Der Lobatschewskysche Raum läfst eine vierfache Unendlichkeit von Bewegungen zu, bei denen jede Gerade der bezeichneten Art wieder mit einer andern derartigen Geraden in Deckung gelangt. Die Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit bieten grofse Ähnlichkeit mit denen der euklidischen Ebenen, ohne mit letzteren identisch zu werden.

m) Wenn drei Ebenen einander in drei sich schneidenden Kanten begegnen, so ist die Summe ihrer Neigungswinkel (Keile) gröfser als zwei Rechte.

Dieser Satz kann in derselben Weise gezeigt werden, wie in der euklidischen Geometrie.

Man kann z. B. um den Schnittpunkt der drei Ebenen als Mittelpunkt eine Kugel beschreiben. Dann ist der Neigungswinkel zweier Ebenen gleich dem Winkel, den die entsprechenden Bogen bilden; letzterer kann aber durch das zugehörige Zweieck gemessen werden, wobei einem gestreckten Winkel die Fläche der Halbkugel entspricht. Die Summe der drei Zweiecke, welche bei den drei Ebenen erhalten werden, ist aber gröfser als die Fläche der Halbkugel.

Man kann auch in bekannter Weise zeigen, dafs in jeder dreiseitigen körperlichen Ecke die Summe der drei Seiten (d. h. der drei ebenen Winkel, welche je zwei Kanten mit einander bilden), kleiner ist als vier Rechte. Konstruiert man zu einer Ecke die Polarecke, so mufs für deren Seiten a', b', c' die Beziehung gelten: $a' + b' + c' < 4R$. Da aber $a' = 2R - \alpha$, $b' = 2R - \beta$, $c' = 2R - \gamma$ ist, wo α, β, γ die Neigungswinkel der gegebenen Ecke sind, so ist auch:

$$(2R - \alpha) + (2R - \beta) + (2R - \gamma) < 4R, \text{ oder } 2R < \alpha + \beta + \gamma.$$

n) Wenn die drei Kanten dreier Ebenen je nicht-schneidende Linien sind, so ist die Summe der Neigungswinkel (Keile) kleiner als zwei Rechte.

Die kürzesten Abstände liegen in einer Ebene (nach § 11 h); die Winkel zwischen zwei solchen Senkrechten sind aber die Neigungswinkel; somit ist die Summe der letzteren gleich der Summe der Winkel eines ebenen Dreiecks.

o) Die Gesamtheit aller Geraden, welche durch einen Punkt gehen, bildet eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche in sich verbleibt, wenn der Punkt in seiner Anfangslage verbleibt. Die Geometrie dieser Mannigfaltigkeit ist identisch mit der Sphärik.

p) Die Gesamtheit aller Geraden, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, verbleibt in sich, wenn die Ebene beliebig in sich bewegt wird. Dieser zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit kommen also dieselben Eigenschaften zu wie der Ebene.

§ 14.

Die einfachsten krummen Gebilde des Lobatschewskyschen Raumes.

Am Schlufs des vorigen Paragraphen haben wir drei verschiedene Bündel von Geraden kennen gelernt, denen folgende Eigenschaften gemeinsam sind:

1. durch jeden Punkt geht eine einzige Gerade des Bündels,

2. läfst man nur Bewegungen zu, bei denen die Gesamtheit der Geraden in sich verbleibt, so kann man doch eine Gerade in die Lage jeder andern bringen und bei der Ruhe einer Geraden noch eine Bewegung des Systems ausführen.

Diesen Bedingungen genügen die drei bezeichneten Bündel: der erste umfafst alle Geraden, welche durch einen festen Punkt gehen; zu dem zweiten gehören alle Geraden, welche zu einer festen Richtung parallel sind, und der dritte wird von allen Geraden gebildet, welche auf einer Ebene senkrecht stehen.

Der folgenden Entwicklung schicken wir folgende Hülfssätze voraus:

Irgend zwei Gerade des Systems liegen in derselben Ebene; diese Ebene wird von der Symmetrie-Ebene der beiden Geraden in einer Linie geschnitten, welche ebenfalls dem System angehört.

Wenn g und h zwei Linien des Systems sind und beide in derselben Richtung genommen werden (d. h. im ersten Falle beide nach dem festen Punkte zu, im zweiten Falle in der Richtung des Parallelismus, im dritten nach der festen Ebene zu), so kann man jedem Punkte A auf g einen auf h liegenden Punkt B so zuordnen, dafs die Gerade AB mit g und h gleiche Winkel bildet.

Den ersten Satz zeigt man am einfachsten für die einzelnen Bündelarten gesondert, wenn es auch leicht ist, ihn aus den zwei allgemeinen charakteristischen Eigenschaften herzuleiten. Der zweite folgt dann unmittelbar aus dem ersten. Man kann aber auch durch einfache Stetigkeitsbetrachtungen erst den zweiten herleiten und dann hieraus den ersten unmittelbar folgern.

a) Es sei ein derartiger Bündel von Geraden gegeben; auf einer dieser Geraden wählt man einen Punkt A beliebig und sucht eine Fläche, welche durch A gehen und jede Gerade des Bündels rechtwinklig schneiden soll. Nachdem der Bündel und der Punkt gegeben sind, wird durch die angegebenen Bedingungen eine einzige Fläche bestimmt. Diese ist eine Kugel, wenn die Geraden durch denselben Punkt gehen; wenn die Geraden parallel sind, so wird die Fläche nach Lobatschewskys Vorgange als Grenzfläche bezeichnet, und wenn die Geraden auf derselben Ebene senkrecht stehen, so haben alle Punkte der Fläche von der Ebene gleichen Abstand und die Fläche selbst heifst eine Fläche gleichen Abstandes.

Der Beweis dieser Behauptungen, sowie des Satzes, dafs jede solche Fläche starr in sich verschoben werden kann, wird (allerdings ganz einfache) infinitesimale Grenzbetrachtungen nicht entbehren können. Indem wir dieselben dem Leser überlassen, stellen wir eine zweite Entstehungsweise dieser Flächen auf.

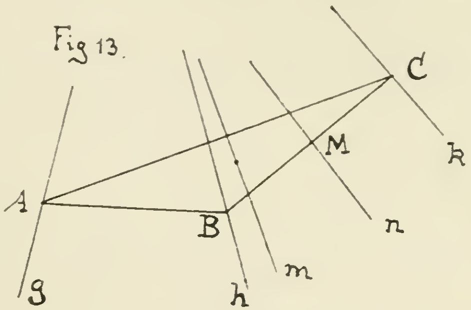
b) Man geht von einer Geraden g des Systems und einem Punkte A aus, der auf g liegt; für jede zweite Gerade h des Systems bestimmt man den Punkt B so, dafs die Verbindungsgerade der Punkte A und B mit den Geraden g und h gleiche Winkel bildet; dann soll jeder derartige Punkt B der Fläche angehören.

Dafs im ersten Falle alle so erhaltenen Punkte B von dem festen Punkte und im dritten von der festen Ebene gleichen Abstand haben, bedarf keines Beweises. Wir wollen aber den Nachweis, dafs die so erhaltene Fläche in sich verschiebbar ist, auf einem Wege liefern, der für die drei Klassen von Bündeln gleichmäfsig gilt. Zu dem Ende haben wir nur zu zeigen:

Wenn g, h, k irgend drei Geraden des Systems sind, und wenn AB mit g und h, AC mit g und k gleiche Winkel bildet, so bildet auch BC mit h und k gleiche Winkel.

Zum Beweise nehmen wir zuvörderst an, dafs die drei Geraden nicht in einer Ebene liegen und dafs die Symmetrieebenen I von g und h, und II von g und k einander schneiden. Da die Punkte in I von A und B, die in II von A und C gleichen Abstand haben, so sind die Punkte der Schnittgeraden m von B und C gleichweit entfernt. Legt man also durch m und die Mitte M von BC eine Ebene III, so ist diese die Symmetrie-Ebene von B und C. Die durch h und k gelegte Ebene wird mit III eine Gerade n gemeinschaftlich haben, welche dem System angehört und auf BC in M senkrecht steht. Dreht man die Ebene (hk) um diese Gerade, bis B auf C fällt, so müssen, weil durch jeden Punkt nur eine Gerade des Systems geht, die Geraden h und k ihre Lage vertauschen. Somit bildet BC mit h und k gleiche Winkel.

Fig 13.



Wenn die Symmetrie-Ebenen von (g, h) und (g, k) einander nicht schneiden, so nehme man eine Gerade l so hinzu, dafs einmal die Symmetrie-Ebenen von (g, h) und (g, l), andererseits die von (l, h) und (l, k) einander schneiden. Vermittelst des ersten Paares gilt der Satz für h und l; vermittelst des zweiten für h und k.

Liegen aber g, h, k in derselben Ebene, so füge man eine Gerade i des Systems hinzu, welche dieser Ebene nicht angehört. Aus (g, h, i) folgt der Satz für (h, i), aus (g, i, k) für (i, k) und dann aus (i, h, k) für (h, k).

c) Die erste Entstehungsart der Flächen ist mit der zweiten identisch; denn wenn die Geraden h, k . . dem Punkte A immer näher kommen, so mufs der Winkel an A sich immer mehr einem Rechten nähern. Auch sieht man, dafs, wenn alle Geraden durch O gehen, wegen der Gleichheit der Winkel OAB und OBA auch

OA = OB sein mufs. Ebenso, wenn die Geraden g, h . . . auf derselben Ebene in A′, B′ . . . senkrecht stehen, so folgt aus der Gleichheit der Winkel A′AB und B′BA, dafs auch AA′ = BB′ ist. Die zweite Entstehungsweise führt also für die erste Bündelart zur Kugel, für die dritte zur Fläche gleichen Abstandes (von einer Ebene).

d) Für eine Fläche der bezeichneten Art wird jede Gerade des Bündels am besten als Achse bezeichnet. Dann lassen sich die durchgeführten Entwicklungen in folgender Form aussprechen:

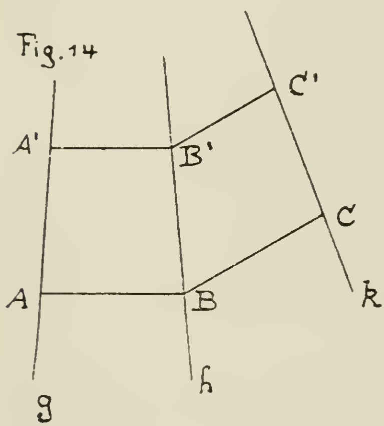
Jede Achse steht im Schnittpunkt auf der Fläche senkrecht.

Jede Sehne bildet mit den durch ihre Endpunkte gelegten Achsen gleiche Winkel.

e) Schneidet man auf jeder Achse vom Schnittpunkte aus nach derselben Richtung gleiche Strecken ab, so liegen deren Endpunkte wieder auf einer Fläche derselben Art.

Es seien g, h, k irgend drei Achsen, A, B, C ihre Schnittpunkte; schneidet man auf g, h, k von A aus nach derselben Richtung AA′ = BB′ = CC′ ab, so bildet (Fig. 14) A′B′ mit g und h, A′C′ mit g und k gleiche Winkel. Konstruiert man also für denselben Bündel nach b) diejenige Fläche, welche durch A′ geht, so umfafst sie auch die Punkte B′ und C′. Liegen z. B. A, B, C auf einer Grenzfläche, so müssen auch die Punkte A′B′C′ auf einer Grenzfläche liegen.

Fig. 14



f) Alle Grenzflächen sind einander kongruent.

Zur Bestimmung der ersten Grenzfläche sei ein Punkt A und eine von A ausgehende Richtung g gegeben; ebenso für die zweite ein Punkt E und eine hiervon ausgehende Richtung m. Man bringe die zweite Gerade m in eine solche Lage, dafs die Punkte A und E zusammenfallen und die Richtungen g und m identisch werden. Dann fallen auch die Parallelen des zweiten Systems mit denen des ersten zusammen.

g) Die vorstehenden Betrachtungen können auf die Ebene beschränkt werden und führen zum Kreise, zur Grenzlinie und zur Linie gleichen Abstandes. Danach ist die Grenzlinie eine Linie, welche alle in der Ebene zu einer Richtung parallelen Geraden senkrecht schneidet. Die Linie gleichen Abstandes hat von einer in ihrer Ebene gelegenen Geraden überall denselben Abstand.

h) Die Grenzfläche kann einerseits betrachtet werden als Kugel mit unendlich grofsem Radius, andererseits als Fläche gleichen Abstandes für einen unendlich grofsen Abstand.

Man gehe aus (Fig. 15) von einer Ebene I, nehme in ihr einen Punkt A und errichte in A auf I die Senkrechte g (in A begrenzt); in g wähle man einen Punkt O als Mittelpunkt einer Kugel, welche durch A hindurchgehen soll. Man nimmt in I einen beliebigen Punkt P, zieht PO und bestimmt auf PO den Punkt B so, dafs $\sphericalangle$ OAB = OBA ist. Läfst man O immer weiter rücken, so nähert sich PO immer mehr der Parallelen; also nähert sich auch B immermehr dem Schnittpunkt B' der Parallelen mit der Grenzfläche.

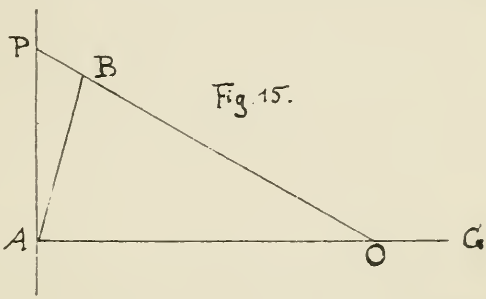


Fig. 15.

Jetzt nimmt man eine Ebene II, welche ebenfalls die Gerade g zur Senkrechten hat, und konstruiert durch A die Fläche, deren Punkte von II denselben Abstand haben. Je weiter man die Ebene II von I aus verschiebt, um so näher rückt (Fig. 16) der Fufspunkt G der von P auf II gefällten Senkrechten (nach § 10, b—e) an g heran. Diese Senkrechte nähert sich also unbeschränkt der durch P zu g gezogenen Parallelen.

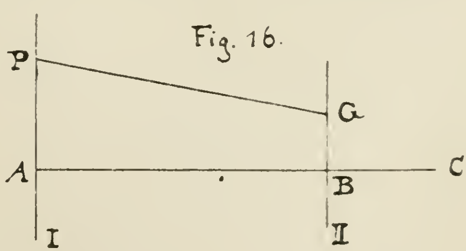


Fig. 16.

i) Wieder sei die Ebene I und auf ihr ein Punkt A gegeben.

Wir suchen alle Flächen der bezeichneten Art, welche die Ebene I in A berühren und auf derselben Seite der Ebene liegen. Dann ist hierdurch eine einzige Grenzfläche bestimmt; das Innere dieser Grenzfläche ist mit Kugeln angefüllt, der Raum zwischen der Grenzfläche und der Ebene mit Flächen gleichen Abstandes.

k) Wenn eine Ebene durch eine Achse einer Grenzfläche hindurchgeht, so schneidet sie die Fläche in einer Grenzlinie; wenn sie keine Achse derselben enthält, so schneidet sie in einem Kreise oder berührt in einem Punkte oder liegt ganz aufserhalb der Fläche.

Wenn die Ebene eine Achse, also eine aus der Schar der Parallelen enthält, so liegen deren unendlich viele in ihr. Man kann also hierauf die angegebene Konstruktion anwenden. — Wenn aber die Ebene keine Achse enthält, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt P derselben die Parallele l zu den Achsen. Wenn diese auf der Ebene senkrecht steht, so kann entweder P in der Fläche liegen oder aufserhalb oder innerhalb derselben. Im ersten Falle findet Berührung in P statt; im zweiten Falle kann die Ebene nicht in das Innere der Fläche treten, im dritten mufs sie aber in das Äufsere gelangen. Dreht man aber um l, so bewegt man die Ebene und die Fläche in sich, also findet der Schnitt in einem Kreise statt. Steht l nicht auf der Ebene senkrecht, so sei m ihre Projektion auf die Ebene; zum Winkel (lm) als Parallelwinkel gehört ein gewisser Abstand. Diesen Abstand trage man als PQ auf m ab, so wird die in Q gezogene Parallele auf der Ebene senkrecht stehen. Wir haben also wieder den vorigen Fall.

l) Der Schnitt einer Ebene mit einer Fläche gleichen Abstandes ist entweder ein Kreis oder eine Grenzlinie oder eine Linie gleichen Abstandes; das erste findet statt, wenn die Ebene mit derjenigen Ebene, von welcher die Fläche überall denselben Abstand besitzt, eine gemeinschaftliche Senkrechte hat; das zweite, wenn diese Ebenen parallel sind; das dritte, wenn die Ebenen sich schneiden. Für den Fall, dafs die Schnittlinie ein Kreis ist, kann sie in einen Punkt zusammenschrumpfen oder imaginär sein.

Wenn die Ebenen I und II eine gemeinschaftliche Senkrechte $MN = b$ haben, kann ein Schnitt der Ebene II mit derjenigen Fläche, deren Punkte von I den Abstand a haben, nur eintreten, wenn die Fläche mit II auf derselben Seite gegen I liegt und wenn $b < a$ ist. Sind beide Bedingungen erfüllt, so entfernt sich die II immer weiter von I, erhält also auch für gewisse Punkte den Abstand a. Dreht man aber die ganze Figur um MN, so werden die drei Gebilde in sich verbleiben, also mufs auch die Schnittlinie in sich bewegt werden, mufs also ein Kreis sein. (Für $b = a$ haben wir eine Berührung, wobei die Ebene II im übrigen ganz im Äufsern der Fläche liegt, da die Entfernung von I zunimmt.)

Dafs jede zu I parallele und jede die I schneidende Ebene die Fläche in einer Linie trifft, folgt unmittelbar aus § 13. Im letzten Falle haben die Punkte der Schnittlinie mit der Fläche auch konstante Entfernung von der Schnittlinie der Ebenen; der Schnitt besteht also in einer Linie gleichen Abstandes. Im Falle des Parallelismus mufs der Übergang zwischen Kreis und Linie gleichen Abstandes, die Grenzlinie, eintreten, was man auch direkt durch eine Bewegung zeigt, bei welcher die Ebenen in sich verschoben werden.

m) Auf der Grenzfläche wird die Gerade (Hauptlinie) durch die Grenzlinie vertreten; denn dies ist der Schnitt mit einer durch eine Achse gehenden Ebene. Für diese Linie zeigt man leicht, dafs sie die kürzeste Linie ist, welche auf einer solchen Fläche zwischen zwei ihrer Punkte gezogen werden kann. Ferner folgt aus § 13, h—l, dafs die Summe der Winkel eines aus solchen Linien gebildeten Dreiecks zwei Rechte beträgt, und dafs durch jeden Punkt nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Hauptlinie gezogen werden kann. Auf jeden dieser Sätze kann man aber das ganze Lehrgebäude Euklids stützen; somit gelten auf der Grenzfläche die Gesetze der euklidischen Ebene, speziell die Ähnlichkeitslehre und die Kreismessung.

n) Auf der Fläche gleichen Abstandes ist die Hauptlinie eine Kurve gleichen Abstandes, deren Schnittebene eine und damit unendlich viele Achsen enthält. Auch jede derartige Linie hat auf der Fläche die Eigenschaften der kürzesten Linie. Konstruiert man aus solchen Linien ein Dreieck, so ist seine Winkelsumme (nach § 13 n) kleiner als zwei Rechte. Daraus folgt, dafs auf einer solchen Fläche die Gesetze der Lobatschewskyschen Ebene gelten. Dafs speziell für den Schnitt von Hauptlinien dieselben

Gesetze gelten, wie für Gerade in der Lobatschewskyschen Ebene, ergiebt sich aus dem zweiten Teile von § 13 f.

o) Wir haben es nicht für nötig gehalten, zu jedem der letzten Sätze, welche für die Grenzfläche und die Flächen gleichen Abstandes gelten, die entsprechenden Eigenschaften der Kugel ausdrücklich anzuführen. Wir möchten aber auf dies Entsprechen wenigstens hingewiesen haben.

§ 15.

Die Trigonometrie im Lobatschewskyschen Raume.

Die cyklometrischen Funktionen sin, cos, tangens und cotangens sollen überall denselben Wert haben, wie in der gewöhnlichen Trigonometrie; es soll also $\sin 0 = 0$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin 90° = 1$ sein u. s. w. Es sollen auch dieselben Formeln zwischen den Funktionen eines Winkels gelten; die Additions-Theoreme sollen ungeändert bleiben, — kurz, wir wollen hier ganz dieselben Funktionen anwenden, welche aus dem elementaren Unterrichte bekannt sind.

Obwohl diese Bemerkung für diesen § und für manche spätere Stelle vollkommen ausreicht, kann sie doch kaum als befriedigend angesehen werden, da man nicht weifs, wie diese Funktionen gewonnen werden können. Bei der gebräuchlichen Begründung mufs die Ähnlichkeitslehre benutzt werden, welche sich wesentlich auf die Parallelen-Theorie stützt. Wir müssen daher andere Wege suchen, auf denen sie hergeleitet werden können. Ein solcher wird sich in § 24 angeben lassen; da derselbe jedoch Sätze benutzt, die erst dort bewiesen werden sollen, kann er hier nicht gut mitgeteilt werden.

Ein zweiter Weg eröffnet sich uns unter Benutzung der Sätze, welche in § 14, m) für die Grenzfläche erwiesen sind. Wenn auf einer solchen Flächen aus Stücken von Grenzlinien ein rechtwinkliges Dreieck gebildet ist, so darf das Verhältnis der dem einen spitzen Winkel α gegenüberliegenden Seite zur Gegenseite des rechten Winkels als Sinus von α definiert werden. Ähnliche Definitionen dürfen wir von den übrigen Funktionen aufstellen. Die hierdurch gewonnenen Funktionen sind aber identisch mit den gebräuchlichen Funktionen desselben Namens; man hat eben in den bekannten Beweisen der hierfür geltenden Sätze die Ebene nur durch die Grenzfläche zu ersetzen.

Drittens können wir die Funktionen rein analytisch definieren. Dabei dürfen wir jedoch den Winkel nicht nach Graden, Minuten und Sekunden messen, sondern müssen seine Gröfse durch Zahlen bestimmen. Zu dem Ende beschreiben wir um den Scheitel des Winkels mit einem beliebigen Radius einen Kreis. Wenn der Umfang des Kreises die Länge u, der im Winkelfelde gelegene Bogen die Länge l hat, so setzen wir

$$\frac{2\pi l}{u} = \alpha,$$

wo π die bekannte Zahl 3,14159 ... ist. Diese Zahl α hängt nur von dem Winkel, aber nicht von dem Radius des benutzten Kreises ab; sie kann demnach als Mafs des Winkels betrachtet werden. Bei der getroffenen Festsetzung hat der rechte Winkel die Gröfse $\frac{\pi}{2}$ und ein Winkel von m Grad die Mafszahl $\frac{\pi m}{180}$.

Für jede reelle Zahl α definieren wir jetzt die Funktionen Sinus und Cosinus durch die unendlichen, stets konvergierenden Reihen:

$$(1)\quad \sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots$$

$$(2)\quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots,$$

und setzen $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Für diese Funktionen gelten alle Beziehungen, welche gewöhnlich auf geometrischem Wege hergeleitet werden. So erhält man durch Quadrierung und Addition: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Auf ähnliche Weise ergeben sich rein analytisch die Formeln:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Auch die weiteren Gesetze, wie

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0\ldots,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \cos\alpha,$$

lassen sich durch blofse Benutzung der Reihen herleiten.

Auch der folgende Weg führt analytisch zu denselben Funktionen. Man geht aus von der Zahl e = 2,71828 ..., welche durch die Formel

$$(3)\ e = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

als der Grenzwert definiert wird, dem sich die m^{te} Potenz der Summe $1+\frac{1}{m}$ für immer gröfser werdende Werte von m nähert. Nun weist man für jede reelle Zahl x die Beziehung nach:

$$(4)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Will man auch imaginäre Exponenten zulassen, so müssen hierfür dieselben Gleichungen bestehen, wie für reelle Exponenten; man mufs also $e^{\alpha i}$ durch die Gleichung definieren:

$$e^{\alpha i} = 1 + \alpha i + \frac{(\alpha i)^2}{2!} + \frac{(\alpha i)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left\{1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots\right\} + i\left\{\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots\right\}$$

Ersetzt man hierin αi durch $-\alpha i$, so folgt:

$$e^{-\alpha i} = \left\{1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right\} - i\left\{\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots\right\}.$$

Für die einzelnen Klammern führe man neue Zeichen ein und setze:

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Nun ist einerseits:

$e^{(\alpha+\beta)i} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$, andererseits

$e^{(\alpha+\beta)i} = e^{\alpha i}\,.\,e^{\beta i} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin b)$

$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$,

woraus sich das Additions-Theorem ergiebt.

Jetzt bezeichnen wir den kleinsten positiven Wert, für welchen $\cos\alpha = 0$ ist, mit $\frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1,\quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i,\quad e^{2\pi i} = 1,\quad \sin\pi = 0,\quad \cos\pi = -1,$$

und für jedes ganzzahlige k:

$$\cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha,\ \sin(2k\pi+\alpha) = \sin\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha,$$

u. s. w.

Dividiert man die Gleichungen für $e^{\alpha i}$ und $e^{-\alpha i}$, so folgt:

$$e^{2\alpha i} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha},$$

wo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gesetzt ist. Hier nimmt man beiderseits den natürlichen Logarithmus (dessen Grundzahl = e ist) und erhält:

$$2\alpha i = \log\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}.$$

Gewisse andere Untersuchungen führen aber auf die Formel:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right).$$

Ersetzt man hierin x durch $i\operatorname{tg}\alpha$, so folgt:

$$\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5\alpha - \tfrac{1}{7}\operatorname{tg}^7\alpha + \dots$$

Diese Gleichung gestattet für kleine Werte von $\operatorname{tg}\alpha$ das zugehörige α zu berechnen. Speziell folgt aus $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, und dann lehrt die vorstehende Reihe, daſs aus den vorstehenden analytischen Entwicklungen für π derselbe Wert 3,14 . . . folgt, der geometrisch aus der Kreismessung erhalten werden kann.

Neben den Kreisfunktionen führen wir die vier Hyperbelfunktionen ein, und zwar den hyperbolischen Sinus (Sh), den hyperbolischen Cosinus (Ch), die hyperbolische Tangens (Th) und die hyperbolische Cotangens (Coth). Das geschieht durch die Formeln:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{i}\sin(xi) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{Ch} x = \cos(xi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x},\quad \operatorname{Coth} x = \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh} x}.$$

Alle diese Funktionen lassen sich beim Gebrauch von Wurzeln durch eine einzige darstellen; es gelten nämlich die Gleichungen:

$$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1,\quad \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x} = 1 - \operatorname{Th}^2 x.$$

Auch besteht für diese Funktionen ein Additionstheorem, welches durch die Formeln dargestellt wird:

$$\mathrm{Sh}(x \pm y) = \mathrm{Sh}x\,\mathrm{Ch}y \pm \mathrm{Ch}x\,\mathrm{Sh}y$$
$$\mathrm{Ch}(x \pm y) = \mathrm{Ch}x\,\mathrm{Ch}y \pm \mathrm{Sh}x\,\mathrm{Sh}y.$$

Die vier Funktionen haben für positive Werte des Argumentes, (auf die es hier allein ankommt) auch positive Werte, und zwar wächst der Hyperbelsinus von null bis unendlich, der Hyperbelcosinus von eins bis unendlich; die Hyperbeltangens wächst von null bis eins, während Cotangens hyp. von unendlich bis eins fällt.

Nach dem Vorgange Lobatschewskys[9]) nehmen wir zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks drei Beziehungen scheinbar willkürlich an und leiten daraus Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln für ein beliebiges Dreieck her. Dann werden wir zeigen, dafs alle diese Beziehungen ein in sich widerspruchloses System bilden und dafs sie den in den vorangehenden §§ aufgestellten Sätzen genügen.

Indem wir a, b, c als die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks voraussetzen und dabei annehmen, a läge dem spitzen Winkel α, b dem spitzen Winkel β gegenüber, gehen wir von den Gleichungen aus:

$$\mathrm{Sh}\frac{a}{k} = \mathrm{Sh}\frac{c}{k}\sin\alpha,\quad \mathrm{Sh}\frac{b}{k} = \mathrm{Sh}\frac{c}{k}\sin\beta,\quad \mathrm{Ch}\frac{c}{k} = \mathrm{Ch}\frac{a}{k}\,\mathrm{Ch}\frac{b}{k},$$

wo k eine gewisse Länge bezeichnet. Aus der ersten Gleichung schaffen wir vermittelst der dritten a weg und führen b ein, indem wir folgende Veränderung vornehmen:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{\mathrm{Sh}^2\frac{c}{k} - \mathrm{Sh}^2\frac{a}{k}}{\mathrm{Sh}^2 c} = \frac{\mathrm{Ch}^2\frac{c}{k} - \mathrm{Ch}^2\frac{a}{k}}{\mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}} =$$

$$\frac{\mathrm{Ch}^2\frac{c}{k}\,\mathrm{Ch}^2\frac{b}{k} - \mathrm{Ch}^2\frac{c}{k}}{\mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}\,\mathrm{Ch}^2\frac{b}{k}} = \frac{\mathrm{Ch}^2\frac{c}{k}\left(\mathrm{Ch}^2\frac{b}{k} - 1\right)}{\mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}\,.\,\mathrm{Ch}^2\frac{b}{k}} = \frac{\mathrm{Th}^2\frac{b}{a}}{\mathrm{Th}^2\frac{c}{k}},\ \text{oder}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Th}\frac{b}{k}}{\mathrm{Th}\frac{c}{k}};\ \text{ebenso}\ \cos\beta = \frac{\mathrm{Th}\frac{a}{k}}{\mathrm{Th}\frac{c}{k}}.$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen folgt leicht:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{Th}\frac{a}{k}}{\operatorname{Sh}\frac{b}{k}},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{Th}\frac{b}{k}}{\operatorname{Sh}\frac{a}{k}},\ \cos\beta = \operatorname{Ch}\frac{b}{k}\sin\alpha,\ \cos\alpha = \operatorname{Ch}\frac{a}{b}\sin\beta.$$

Ein beliebiges Dreieck teile man durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke; dann ergeben sich unmittelbar die Gleichungen:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{Sh}\frac{a}{k}} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{Sh}\frac{b}{k}} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{Sh}\frac{c}{k}},$$

wo die Seiten a, b, c je den Winkeln α, β, γ gegenüberliegen.

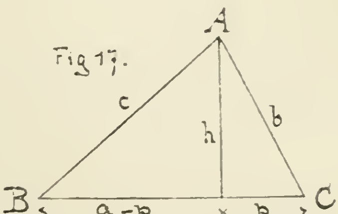
Die Höhe h, von A auf a gefällt (Fig. 17), teile letztere in die Teile p und a — p; dann ist

$$\operatorname{Ch}\frac{c}{k} = \operatorname{Ch}\frac{h}{k}\operatorname{Ch}\frac{a-p}{k} = \frac{\operatorname{Ch}\frac{b}{k}}{\operatorname{Ch}\frac{p}{k}}\left(\operatorname{Ch}\frac{a}{k}\operatorname{Ch}\frac{p}{k} - \operatorname{Sh}\frac{a}{k}\operatorname{Sh}\frac{p}{k}\right)$$

$$= \operatorname{Ch}\frac{a}{k}\operatorname{Ch}\frac{b}{k} - \operatorname{Sh}\frac{a}{k}\operatorname{Sh}\frac{b}{k}\cos\gamma.$$

Indem wir die entsprechenden Gleichungen hinzunehmen, erhalten wir bereits fünf Gleichungen. Weitere Formeln, welche wir analytisch durch Verbindung der vorstehenden herleiten, können keine neuen Beziehungen herbeiführen. Alle Beziehungen, welche sich durch irgend eine Zerlegung des gegebenen Dreiecks in zwei rechtwinklige ergeben können, sind also in den vorstehenden fünf Gleichungen enthalten.

Fig. 17.



Diese liefern aber nur drei von einander unabhängige Beziehungen, wie man am besten in folgender Weise zeigt. Ersetzt man k durch ki, so gehen die vorstehenden Gleichungen in die der sphärischen Trigonometrie über, wofern der Radius der Kugel gleich k ist. Wenn man also aus unsern Voraussetzungen irgend welche Beziehungen zwischen den in einem Dreieck vorhandenen Längen und Winkeln herleitet, so entsprechen dieselben gewissen

Formeln der sphärischen Trigonometrie; letztere sind mit einander vereinbar und enthalten für das Dreieck drei willkürliche Gröfsen; dasselbe gilt also auch von unsern Formeln.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich noch folgendes. Wenn durch Verbindung mehrerer Dreiecke eine neue Figur entsteht, so sind die Beziehungen zwischen den in dieser letzten Figur vorkommenden Gröfsen unabhängig von den Hülfsfiguren. Wenn man z. B. gewisse Beziehungen für ein Viereck ABCD dadurch erhält, dafs man die Diagonale AC zieht, so müssen damit vereinbar sein alle Beziehungen, welche sich durch das Ziehen der Diagonale BD ergeben.

Auch mit den einfachsten geometrischen Konstruktionen müssen die Formeln vereinbar sein. Diese kommen aber auf die beiden Aufgaben hinaus: Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten; und ein Dreieck zu konstruieren, von dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Es genüge, über die erste einige Worte zu sagen. Damit eine geometrische Lösung möglich ist, mufs die Summe zweier Seiten jedesmal gröfser sein als die dritte. Ist aber $a + b > c > a - b$, so folgt

$$\mathrm{Ch}\frac{a}{k}\mathrm{Ch}\frac{b}{k} - \mathrm{Ch}\frac{a-b}{k} > \mathrm{Ch}\frac{a}{k}\mathrm{Ch}\frac{b}{k} - \mathrm{Ch}\frac{c}{k} > \mathrm{Ch}\frac{a}{k}\mathrm{Ch}\frac{b}{k} - \mathrm{Ch}\frac{a+b}{k},$$

woraus unter Anwendung der obigen Formeln folgt, dafs $\cos\gamma$ zwischen $+1$ und -1 liegt, sodafs sich für γ ein einziger Wert zwischen 0 und π ergiebt.

Wir beweisen, dafs unter Anwendung unserer Formeln die Winkelsumme in jedem Dreieck kleiner ist als zwei Rechte. Es genügt, dies für ein rechtwinkliges Dreieck mit den spitzen Winkeln α und β zu beweisen. Dafür ist aber:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{\mathrm{Th}\frac{a}{k}\mathrm{Th}\frac{b}{k}}{\mathrm{Th}^2\frac{c}{k}} - \frac{\mathrm{Sh}\frac{a}{k}\mathrm{Sh}\frac{b}{k}}{\mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}}$$

$$= \frac{\mathrm{Sh}\frac{a}{k}\mathrm{Sh}\frac{b}{k}}{\mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}}\left(\frac{\mathrm{Ch}^2\frac{c}{k}}{\mathrm{Ch}\frac{a}{k}\mathrm{Ch}\frac{b}{k}} - 1\right) = \frac{\mathrm{Sh}\frac{a}{k}\mathrm{Sh}\frac{b}{k}}{\mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}}\left(\mathrm{Ch}\frac{c}{k} - 1\right),$$

was stets positiv ist.

Wir können auch in einem rechtwinkligen Dreieck die Formel betrachten:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Th}\frac{b}{k}}{\mathrm{Th}\frac{c}{k}}.$$

Nehmen wir darin b fest an und legen α veränderliche Werte bei, welche von null an wachsen, so wächst c von null an. Wenn aber $\cos\alpha = \mathrm{Th}\frac{b}{k}$ wird, so wird $\mathrm{Th}\frac{c}{k} = 1$, also $c = \infty$. Für $\cos\alpha = \mathrm{Th}\frac{b}{k}$ giebt also α den Parallelwinkel an, welcher zum Abstande b gehört.

Wählen wir die Linien a, b, c sämtlich unendlich klein oder lassen wir k unendlich grofs werden, so haben wir in der Entwicklung von $k\,\mathrm{Sh}\frac{x}{k}$ und $\mathrm{Ch}\frac{x}{k}$ nur die ersten (ein oder zwei) Glieder zu nehmen. Dann erhalten wir die Formeln:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Somit finden wir die beiden Sätze:

1. Die vorgelegte Geometrie stimmt um so mehr mit der euklidischen überein, je kleiner das betrachtete Gebiet ist,

2. die euklidische Geometrie ist der Grenzwert, dem sich die Lobatschewskysche für unbegrenzt wachsende Werte von k nähert.

Wir haben bisher nur gezeigt, dafs die aufgestellten trigonometrischen Formeln den in § 10 angegebenen Voraussetzungen genügen. Nun könnte man den Beweis erwarten, dafs nicht auch andere trigonometrische Formeln diese Voraussetzungen befriedigen. Das wird sich in § 24 auf einem andern Wege ergeben.

§ 16.

Analytische Behandlung der Lobatschewskyschen Geometrie.

Für die analytische Geometrie der Ebene hat es sich als praktisch erwiesen, drei Bestimmungsgröfsen zu wählen, zwischen denen dann eine Gleichung bestehen mufs.[10] Wir gehen (Fig. 18) von zwei rechtwinkligen Achsen OX und OY aus, bezeichnen die Entfernung PO des zu bestimmenden Punktes P vom Anfangspunkte O mit r, und den Winkel, welchen diese Linie mit der positiven X-Achse bildet, mit φ. Dann setzen wir

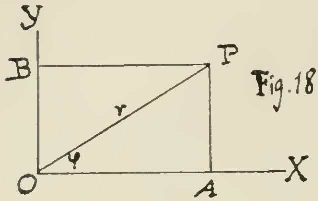


Fig. 18.

$$p = \operatorname{Ch}\frac{r}{k},\quad x = k\operatorname{Sh}\frac{r}{k}\cos\varphi,$$

$$y = k\operatorname{Sh}\frac{r}{k}\sin\varphi.$$

Stehen PA und PB senkrecht auf den Achsen, so ist

$$x = k\operatorname{Sh}\frac{PB}{k},\quad y = k\operatorname{Sh}\frac{PA}{k}.$$

Zwischen p, x, y besteht die Relation:

$$k^2p^2 - x^2 - y^2 = k^2.$$

Wenn umgekehrt p, x, y dieser Bedingung genügen, und $p > 1$ ist, so bestimmen sie immer einen, und zwar einen einzigen Punkt. Somit ist jeder Punkt durch das Verhältnis der drei Gröfsen p, x, y gegeben, (letzteres darf allerdings nicht ganz willkürlich sein).

Ist e die Entfernung der Punkte $P\,(=x, y, p)$ und $P'\,(=x', y', p')$, so ist nach dem Cosinussatze:

$$\operatorname{Ch}\frac{e}{k} = \operatorname{Ch}\frac{OP}{k}\operatorname{Ch}\frac{OP'}{k} - \operatorname{Sh}\frac{OP}{k}\operatorname{Sh}\frac{OP'}{k}\cos(\varphi' - \varphi)$$

$$= \operatorname{Ch}\frac{OP}{k}\operatorname{Ch}\frac{OP'}{k} - \operatorname{Sh}\frac{OP}{k}\operatorname{Sh}\frac{OP'}{k}(\cos\varphi'\cos\varphi + \sin\varphi'\sin\varphi),$$

woraus unmittelbar folgt:

$$k^2\operatorname{Ch}\frac{e}{k} = k^2pp' - xx' - yy'.$$

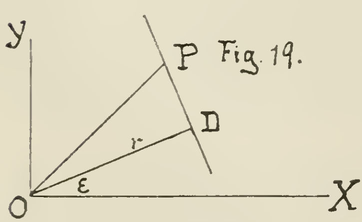


Fig. 19.

Um die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, fällen wir vom Anfangspunkte die Senkrechte OD = r (Fig. 19) auf dieselbe und bezeichnen den Winkel DOX mit ε. Ist nun P ein beliebiger Punkt dieser Geraden, so ist

$$\operatorname{Ch}\frac{OP}{k} = \operatorname{Ch}\frac{OD}{k}\operatorname{Ch}\frac{DP}{k}\quad\text{oder}$$

$$k^2p = \mathrm{Ch}\frac{r}{k}\left(k^2p\,\mathrm{Ch}\frac{r}{k} - kx\,\mathrm{Sh}\frac{r}{k}\cos\varepsilon - ky\,\mathrm{Sh}\frac{r}{k}\sin\varepsilon\right).$$

Indem wir $\mathrm{Ch}^2\frac{r}{k} - 1$ durch $\mathrm{Sh}^2\frac{r}{k}$ ersetzen und durch $\mathrm{Sh}\frac{r}{k}$ dividieren, erhalten wir als Gleichung der geraden Linie:

$$kp\,\mathrm{Sh}\frac{r}{k} - x\,\mathrm{Ch}\frac{r}{k}\cos\varepsilon - y\,\mathrm{Ch}\frac{r}{k}\sin\varepsilon = 0.$$

Dieselbe ist homogen und linear in den Koordinaten, und zwischen den Konstanten e, a, b in ihrer Gleichung:

$$ep + ax + by = 0$$

besteht die Gleichung:

$$-\frac{e^2}{k^2} + a^2 + b^2 = 1.$$

Soll umgekehrt die Gleichung $ep + ax + by = 0$ eine Gerade darstellen, so mufs $a^2 + b^2 - \frac{e^2}{k^2} > 0$ sein.

Für den Raum gehen wir von drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen aus, welche sich in O treffen. Zur Bestimmung des Punktes P fällen wir die Senkrechten PA, PB, PC auf die Ebenen, und setzen:

$$\mathrm{Ch}\frac{OP}{k} = p,\ k\mathrm{Sh}\frac{PA}{k} = x,\ k\mathrm{Sh}\frac{PB}{k} = y,\ k\mathrm{Sh}\frac{PC}{k} = z.$$

Wenn OP mit den Koordinatenebenen die Winkel φ, φ', φ'' bildet, so ist auch:

$$x = k\,\mathrm{Sh}\frac{r}{k}\sin\varphi,\ y = k\,\mathrm{Sh}\frac{r}{k}\sin\varphi',\ z = k\,\mathrm{Sh}\frac{r}{k}\sin\varphi''.$$

Jetzt besteht also die Beziehung:

$$k^2p^2 - x^2 - y^2 - z^2 = k^2.$$

Umgekehrt, wenn zwischen vier Gröfsen p, x, y, z diese Beziehung besteht und $p > 1$ ist, so genügen sie zur Bestimmung eines und zwar eines einzigen Punktes.

Die Entfernung e zweier Punkte (p, x, y, z) und (p′, x′, y′, z′) wird durch die Formel bestimmt:

$$k^2\,\mathrm{Ch}\frac{e}{k} = k^2pp' - xx' - yy' - zz'.$$

Ebenso wird jede Ebene durch eine Gleichung von der Form dargestellt:

$$ep + ax + by + cz = 0,$$
$$\text{wo } -\frac{e^2}{k^2} + a^2 + b^2 + c^2 > 0 \text{ ist.}$$

Der Beweis der letzten Sätze ist wesentlich identisch mit dem der entsprechenden Sätze der Ebene.

Der wirkliche Aufbau der Geometrie vermittelst der Analysis dürfte hier nicht notwendig sein.

§ 17.

Vergleichung der Geometrie auf der Kugelfläche mit der der Ebene.

In § 14 traten uns Kugelfläche, Grenzfläche und Fläche gleichen Abstandes in mancher Beziehung als gleichberechtigt entgegen. Die Grenzfläche zeigt die Eigenschaften der euklidischen, die Fläche gleichen Abstandes die der Lobatschewskyschen Ebene. Eine Vergleichung beider ergiebt sich aus den vorstehenden Untersuchungen, braucht also nicht weiter durchgeführt zu werden. Wir haben jetzt noch die Aufgabe, die Kugelfläche genauer mit der Ebene zu vergleichen.

Zuvörderst ist der Grad der Beweglichkeit für beide Flächen derselbe. Man kann auch die Kugelfläche so in sich bewegen, dafs ein Punkt in die Lage eines beliebigen andern Punktes gelangt, und dann kann man die Fläche noch bei der Ruhe eines Punktes so drehen, dafs jeder bewegte Punkt eine geschlossene Linie (einen Kreis) beschreibt. Demnach kann man die Fläche so in sich verschieben, dafs ein Punkt und eine davon ausgehende Richtung in Deckung gelangt mit einem zweiten Punkte und einer davon ausgehenden beliebig gewählten Richtung. Gleichwie die Gerade die kürzeste Linie auf der Ebene, ist der Hauptkreis (die Hauptlinie) die kürzeste Linie auf der Kugel. Durch jeden Punkt geht eine einfach unendliche Schar von Hauptlinien. Jede Hauptlinie kann in sich verschoben werden; man kann aber auch die Fläche so in sich bewegen, dafs die Hauptlinie umgekehrt in Deckung mit ihrer Anfangslage gelangt.

Aber auf der Kugel ist die Hauptlinie geschlossen, und zwei Hauptlinien der Kugel schneiden sich immer in zwei Punkten, einem Punkte und seinem Gegenpunkte. Infolgedessen erleidet der Satz, dafs durch zwei Punkte eine einzige Hauptlinie geht, eine Ausnahme, wenn die beiden Punkte Gegenpunkte sind. Man kann sich hiervon in etwa unabhängig machen, wenn man die Betrachtung auf eine Kalotte einschränkt, welche kleiner ist als die krumme Fläche einer Halbkugel. Durch zwei Punkte eines solchen Flächenteiles geht immer eine einzige Hauptlinie. Daher kann man diejenigen Sätze aus Euklids Planimetrie vollständig übertragen, bei deren Beweis die Unendlichkeit der Geraden weder direkt noch indirekt benutzt wird. Hieraus ergeben sich unmittelbar Sätze über die Kongruenz der Dreiecke, über das gleichschenklige Dreieck, namentlich auch über den Kreis.

Im übrigen möchten wir noch folgende Sätze der Sphärik besonders hervorheben: Zwei beliebige Hauptlinien schneiden einander; zugleich giebt es eine dritte Hauptlinie, welche auf beiden senkrecht steht. Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt mehr als zwei Rechte, nähert sich aber zwei Rechten um so mehr, je kleiner der Inhalt ist.

Wir werden hierdurch darauf geführt, die Frage zu stellen: Ist die Unendlichkeit der Geraden durch die übrigen von ihr vorausgesetzten Eigenschaften gefordert, oder zeigt uns wenigstens die Erfahrung, dafs die Gerade (und damit der Raum) unendlich ist? Dafs der erste Teil der Frage verneint werden mufs, legen uns die angeführten Sätze der Sphärik schon nahe, soll aber in den folgenden Paragraphen noch genauer bewiesen werden. Was den zweiten Teil betrifft, so erinnern wir uns, dafs unsere Erfahrung immer nur auf ganz kleine Gebiete beschränkt ist und dafs wir den aus zahlreichen Beobachtungen geschöpften Wahrnehmungen unwillkürlich allgemeine Gültigkeit beilegen. Wir müssen aber bedenken, dafs unsere genauesten Beobachtungen auf der Erdoberfläche vor sich gehen, dafs also z. B. das, was wir als eine Gerade betrachten, im günstigsten Falle ein Stück eines Hauptkreises der Erdkugel ist.

Wie wir uns in den letzten Paragraphen vom elften Axiom Euklids unabhängig gemacht haben, müssen wir jetzt prüfen, ob seine Annahme, dafs die Gerade unendlich sei, im Wesen der geraden Linie ihren Grund findet.

§ 18.

Die Gerade als geschlossene Linie vorausgesetzt.

a) Wir verfolgen jetzt die Voraussetzung, dafs die gerade Linie geschlossen ist.[11]) Dabei müssen alle Sätze Euklids, in deren Ausspruch und bei deren Beweise die Unendlichkeit der Geraden weder direkt noch indirekt vorausgesetzt wird, unverändert bestehen bleiben. Das gilt also z. B. für die Sätze vom gleichschenkligen Dreieck, ferner für die in § 11 a—e angegebenen Sätze.

b) Da alle Geraden einander kongruent sind, haben sie auch alle dieselbe Länge. Gehen jetzt von einem Punkte A zwei gerade Linien AB und AC aus, so müssen sie notwendig einmal wieder zusammentreffen, und zwar, wenn es nicht schon früher geschieht, im Punkte A, von dem aus beide Gerade wieder ihre frühere Bahn fortsetzen. Wir bezeichnen den ersten Schnittpunkt der Geraden AB und AC von A aus mit A', (wobei wir die Möglichkeit zulassen, dafs A' mit A identisch ist). Dann ist jedenfalls die Länge ABA' gleich der von ACA'.

Man beweist dies etwa dadurch, dafs man die Figur in eine Lage bringt, in welcher die Richtung AB mit der Richtung AC vertauscht ist.

c) Treffen sich die Geraden AB und AC zuerst in A' wieder, so ist der Winkel, den die Geraden in A einschliefsen, gleich dem von ihnen in A' gebildeten Winkel.

Man drehe die Figur in ihrer Ebene um den Punkt A, bis AB in die Richtung AC fällt; dann möge AC die Lage AD annehmen. Da aber der Schnittpunkt von AC und AD auf AC fällt und ABA' = ACA' ist, so fällt auch der Schnittpunkt von AC und AD auf A'. Fährt man hiermit fort, so mufs nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen AB entweder in die Anfangslage zurückkehren oder zum erstenmale in das Winkelfeld BAC fallen. Dasselbe mufs dann aber für A'B gelten. Gelangt AB in die Anfangslage zurück, so gilt dasselbe von AC, und es ist sowohl BAC wie BA'C gleich $\frac{2}{n}\pi$ für ein ganzzahliges n. Ist das nicht der Fall, so liegen beide Winkel zwischen $\frac{2}{n}\pi$ und

$\frac{2}{n+1}\,\pi$. Fährt man dann aber mit diesem Prozefs weiter fort, bis AB wieder in die Anfangslage oder zwischen AB und AC gelangt, so ergeben sich für beide Winkel immer engere Grenzen von gleicher Gröfse.

Man kann den Beweis auch dadurch führen, dafs man den einen Winkel direkt auf den andern legt und zeigt, dafs hierbei Deckung eintritt.

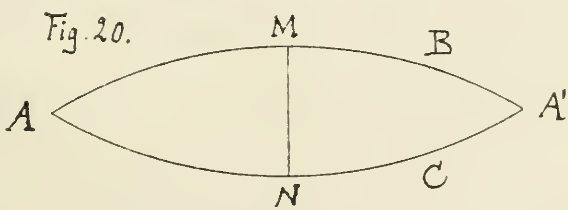
d) Wie auch die zweite Linie AC gewählt ist, immer ist ABA′ ein ganzzahliger Teil der ganzen Linie AB . . A (also entweder die ganze Linie oder die Hälfte oder ein Drittel u. s. w.).

Verschiebt man die ganze Figur in ihrer Ebene längs der Geraden AB, bis A auf A′ gelangt, so mufs auch AC wieder in dieselbe gerade Linie fallen. Folglich wird auch die neue Lage A″ von A′ ein Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden sein, und es ist AA′ = A′A″ u. s. w. Da aber A selbst ein gemeinschaftlicher Punkt der Geraden ist, so mufs man durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen zu diesem Punkte gelangen.

e) Wenn sich irgend zwei Gerade AB und AC, von A ausgehend, zuerst wieder in A′ treffen, so steht die Gerade, welche die Mitten von ABA′ und ACA′ mit einander verbindet, auf beiden Geraden senkrecht.

Es sei (Fig. 20) AM = MA′ auf AB und AN = NA′ auf AC, so sind die Dreiecke AMN und A′NM kongruent. Da aber beide Dreiecke gleichschenklig sind, so sind die vier Winkel an M und N einander gleich, also jeder ein Rechter.

Fig. 20.



f) Wenn sich irgend zwei von A ausgehende gerade Linien zuerst wieder in A′ treffen, so müssen auch alle von A ausgehenden Geraden wieder durch A′ hindurchgehen.

Für eine ganze Reihe von Linien ist der Satz bereits in c) bewiesen; wir drehen die Figur um ABA′, so mufs auch jede neue Lage von ACA′ durch A′ hindurchgehen; dreht man aber jetzt um die Anfangslage von AC, so erhält man in der gegebenen

Ebene selbst weitere derartige Linien, welche einen an A liegenden Winkel einschliefsen; somit gilt der Satz allgemein.

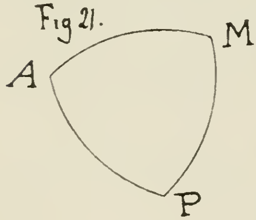
Will man in der Ebene bleiben, so halbiere man in der vorigen Figur MN in O, ziehe AO und A′O und zeige, dafs dies eine gerade Linie ist, so dafs die Gerade AO durch A′ geht. Durch Fortsetzung dieses und des in c) eingeschlagenen Verfahrens kann man jeder durch A gehenden Geraden unbegrenzt nahe kommen.

g) Die Mitten aller Geraden von einem Punkte A bis zum nächsten Schnittpunkt A′ liegen in einer Ebene, deren sämtliche Punkte sowohl von A wie von A′ gleichen Abstand haben.

Es sei (vergl. die vorige Figur) ABA′ eine gerade Linie; M die Mitte derselben; in M sei MN beliebig auf ihr senkrecht errichtet; dann mufs die Gerade AN durch A′ gehen; wegen der Kongruenz der Dreiecke AMN und A′MN ist auch AN $= \frac{1}{2}$ AA′ und ∢ ANM ein Rechter; folglich ist AN = AM.

Dreht man jetzt AM in derselben Ebene um A, bis auch ∢ MAP (Fig. 21) ein rechter ist, so sind die drei Winkel von MAP gleich, also auch die drei Seiten. Bezeichnen wir die Länge einer jeden mit $\frac{1}{2} k\pi$; so entspricht dem Winkel MAN $= \varphi$ die Länge MN $= k\varphi$. Ferner ist AA′ $=$ 2 AM $= k\pi$.

Fig. 21.



h) Alle von einem Punkte ausgehenden geraden Linien schneiden sich entweder noch in einem zweiten Punkte oder haben keinen weiteren Punkt gemeinschaftlich.

Wir drehen die Gerade AM, wo M in der Mitte zwischen A und A′ liegt, um den Punkt A in einer Ebene. Dann beschreibt M eine gerade Linie. Soll der Punkt M in seine Anfangslage zurückkehren, so mufs auch die Gerade AM wieder in Deckung mit ihrer Anfangslage gelangen. Das geschieht bei einer Drehung von zwei Rechten ($= \pi$) und von jedem Vielfachen von zwei Rechten (also bei $n\pi$). Wenn AM sich um den Winkel π gedreht hat, so hat M die Länge $k\pi$ zurückgelegt, ist also zum ersten Schnittpunkt M′ gekommen, in dem die von M ausgehenden Geraden wieder zusammentreffen. Als erste Möglichkeit ergiebt sich demnach die, dafs M′ mit M zusammenfällt, dafs also überhaupt je zwei gerade Linien höchstens einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Wenn aber die Drehung π noch nicht den Punkt M in seine Anfangslage, sondern in einen von M verschiedenen Punkt M′ führt, so mufs doch bei der Drehung 2π jeder um A beschriebene Kreis vollständig durchlaufen sein, also mufs hierdurch auch M wieder in seine Anfangslage gelangen. Dann ist MM′ die Hälfte der ganzen Geraden. Folglich ist auch der Punkt A′ vom Punkte A verschieden, und alle Geraden, welche von einem Punkte ausgehen, begegnen sich noch in einem zweiten Punkte, dem Gegenpunkte des ersten; durch zwei Gegenpunkte wird jede hindurchgehende Gerade in zwei gleiche Teile zerlegt.

i) Dadurch sind wir auf zwei, sich gegenseitig ausschliefsende Möglichkeiten, zwei Raumformen geführt. Wir werden beide im folgenden genauer untersuchen und zeigen, dafs keine von ihnen zu einem Widerspruche führt. Um die Untersuchung möglichst gleichförmig zu machen, legen wir für den Fall zweier gemeinschaftlicher Punkte der Geraden die Länge $2k\pi$ bei; wenn dagegen zwei von demselben Punkte ausgehende gerade Linien nur diesen einen Punkt gemeinschaftlich haben, so bezeichnen wir die Länge der geraden Linie mit $k\pi$. Die erste Möglichkeit wurde zuerst von Riemann angegeben und soll daher die Riemannsche Raumform heifsen; auf die zweite wurden die Herren Klein und Newcomb[12]) geführt, ohne indessen zu erkennen, dafs die Riemannsche Raumform ebenfalls berechtigt ist. Beide Raumformen werden häufig wegen der endlichen Länge der geraden Linie selbst als endlich bezeichnet. Wir wenden uns zunächst der Riemannschen Geometrie zu.

§ 19.

Die einfachsten Gebilde des Riemannschen Raumes.

a) Wenn jeder Punkt von seinem Gegenpunkte verschieden ist, so geht jede Gerade, sowie jede Ebene, welche einen Punkt P enthält, auch noch durch den Gegenpunkt P′ hindurch. Eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, fällt daher ganz in die Ebene hinein, wofern nur die Punkte nicht Gegenpunkte von einander sind.

b) Der gröfste Abstand, welchen zwei Punkte von einander erhalten können, ist gleich der halben Länge der geraden Linie, und nachdem ein Punkt gegeben ist, hat nur ein anderer Punkt von ihm diesen gröfsten Abstand.

Sind A und B irgend zwei Punkte des Raumes, so läfst sich eine gerade Linie durch sie hindurchlegen (wenn sie Gegenpunkte sind, unendlich viele). Diese Gerade wird durch die beiden Punkte in zwei Teile zerlegt, welche nur gleich sind, wenn jeder gleich $k\pi$ ist; wenn sie aber ungleich sind, so mufs einer von ihnen kleiner als $k\pi$ sein. Man kann also im allgemeinen zwischen zwei Punkten eine gerade Strecke ziehen, welche kleiner ist als $k\pi$. Der Abstand $k\pi$ führt aber längs jeder beliebigen Geraden auf den Gegenpunkt.

c) Die Ebene des Riemannschen Raumes hat für sich betrachtet die Eigenschaften einer Kugelfläche (im euklidischen Raume). Der Unterschied tritt erst hervor, wenn man die Beziehungen der Ebene zu den aufser ihr gelegenen Gebilden betrachtet; die Ebene ist nämlich umkehrbar, die Kugelfläche aber nicht. Dadurch werden aber noch weitere Verschiedenheiten begründet.

Auch die gewöhnliche Sphärik kann man darauf stützen, dafs alle Hauptlinien kongruent sind und die von einem Punkte ausgehenden sich noch in einem zweiten Punkte begegnen. Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen und unter Hinzunahme der in d—h dieses Paragraphen benutzten Methoden ergeben sich die Beweise mit Leichtigkeit.

d) Alle Punkte, welche von einem festen Punkte den Abstand $\frac{1}{2}k\pi$ haben, liegen auf einer Ebene, der Polarebene des Punktes; alle geraden Linien, welche durch einen Punkt gehen, stehen auf seiner Polarebene senkrecht, und umgekehrt gehen alle geraden Linien, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, durch ihre Pole hindurch; je zwei Senkrechte derselben Ebene liegen wieder in einer Ebene.

Von einem Punkte A des Raumes lassen wir beliebig viele gerade Linien ausgehen; alle diese schneiden sich noch im Gegenpunkte A′. Die Mitten aller Strecken AA′ liegen in einer Ebene α. Bei jeder Drehung um den Punkt A wird die Ebene α in sich verschoben. Verbinden wir den Punkt A mit irgend einem Punkte von α durch eine gerade Linie, so steht dieselbe auf α senkrecht. Überhaupt trifft jede durch A gelegte Gerade die Ebene α senkrecht, und jede auf α errichtete Senkrechte geht durch A und A', da die Verbindungsgerade ihres Fufspunktes mit A auf α senkrecht steht und es in jedem Punkte der Ebene nur eine auf ihr senkrechte Gerade giebt.

Ist aber eine zweite Ebene β gegeben, so können wir dieselbe mit α zur Deckung bringen; in dieser neuen Lage geht jede ihrer Senkrechten durch A und A'. Somit sind auch der Ebene β zwei Punkte B und B' in derselben Weise zugeordnet, wie A und A' zu α. Die beiden Punkte, welche Gegenpunkte von einander sind, heifsen die Pole der Ebene, letztere die Polarebene jedes der beiden Punkte.

e) Indem man jedem Punkte seine Polarebene zuordnet, kann man jeder Mannigfaltigkeit von Punkten eine solche von Ebenen zuordnen und umgekehrt. Um die letztere Zuordnung eindeutig zu machen, ordnet man der Ebene einen ihrer Pole willkürlich zu; dann setzt man fest, dafs einer stetigen Folge von Ebenen auch eine stetige Folge von Punkten entsprechen soll. Die vorstehende Zuordnung ist reziprok: Ist dem Punkte 1 die Ebene I zugeordnet, und wird in der Ebene I ein Punkt 2 angenommen, so geht dessen Polarebene II durch den Punkt 1 hindurch.

Dies folgt daraus, dafs die Entfernung eines Punktes von jedem Punkte der Polarebene gleich $\frac{1}{2}k\pi$ ist und dafs alle Punkte, welche diese Entfernung haben, in der Polarebene liegen.

f) Der gröfste Abstand, den ein Punkt von einer gegebenen Ebene erlangen kann, beträgt $\frac{1}{2}k\pi$, und nur die Pole besitzen diesen Abstand. Alle Punkte, welche einen kleineren Abstand a von der Ebene haben, gehören zwei Kugeln an, von denen jede mit dem Radius $(\frac{1}{2}k\pi - a)$ um einen der Pole als Mittelpunkt beschrieben wird.

Um den Abstand eines Punktes P von einer Ebene I zu bestimmen, fällen wir von P auf I die Senkrechte. Die beiden Fufspunkte M und M' dieser Senkrechten zerlegen in Verbindung mit den Polen A und A' der Ebene die Gerade in vier gleiche Teile. Einem dieser Teile gehört der Punkt P an, wenn er nicht auf der Grenze zweier Teile liegt. Somit ist der Abstand eines Punktes von der Ebene nur für die Pole gleich $\frac{1}{2}k\pi$. Hat P eine andere Lage, so beschreibe man um A eine Kugelfläche, welche durch P geht; dann wird jede Gerade AQ, welche von A aus durch einen Punkt O auf der Oberfläche der Kugel geht, auf der Ebene I senkrecht stehen. Begegnet AQ der Ebene zuerst in N, so ist $AQ + QN = \frac{1}{2} k\pi$, somit die Senkrechte QN für alle Punkte Q der Kugel von konstanter Länge.

g) Jeder geraden Linie entspricht eine einzige zweite als ihre reziproke Polare, in dem Sinne, daſs die Pole zu den durch die eine gelegten Ebenen in der andern liegen, und die Polarebenen der Punkte der einen sich in der andern schneiden.

Den Punkten einer Geraden g entspricht eine einfach unendliche Schar von Polarebenen $\gamma, \gamma' \ldots$ Legen wir aber durch g eine beliebige Ebene, so muſs ihr Pol auf allen Polarebenen $\gamma, \gamma' \ldots$ liegen. Daher müssen alle diese Ebenen sich in einer Schar von Punkten, also in einer geraden Linie g′ treffen. Zugleich müssen aber auch die Polarebenen der Punkte von g′ die Gerade g gemeinschaftlich haben.

h) Zwei beliebige Ebenen schneiden sich stets in einer geraden Linie und besitzen zugleich stets eine gemeinschaftliche Senkrechte. Ist φ der Winkel der beiden Ebenen, so ist die Länge der gemeinschaftlichen Senkrechten gleich $k\varphi$. Die Schnittlinie und die Senkrechte sind reziproke Polaren von einander.

Gegeben seien die Ebenen α und β; A und A′ seien die Pole der Ebene α, B und B′ die der Ebene β. Die gerade Linie g, welche durch diese beiden Paare von Gegenpunkten geht, steht auf beiden Ebenen senkrecht. Die reziproke Polare von g liegt in den Polarebenen aller Punkte von g, also auch in denen von A und B oder in den Ebenen α und β.

i) Alle Ebenen, welche eine gegebene Ebene unter demselben Winkel schneiden, berühren eine Kugel, deren Mittelpunkt ein Pol der Ebene ist.

Die Ebenen haben von dem Pol der gegebenen Ebene gleichen Abstand.

k) Eine Ebene wird von jeder nicht in ihr verlaufenden Geraden geschnitten; wenn die Gerade nicht auf der Ebene senkrecht steht, so giebt es stets eine einzige Gerade, welche auf beiden senkrecht steht.

Wenn eine Gerade g und eine Ebene α gegeben sind, so bestimme man zu g die Polare g' und zu α die Pole A und A'. Durch g', A, A' läfst sich eine einzige Ebene B legen, und zu letzterer giebt es ein Paar B und B' von Polen, welche in g und in α liegen müssen.

Wenn g nicht auf α senkrecht steht, also nicht durch A geht, so schneidet die durch A und g gelegte Ebene die Ebene β in einer Geraden, welche auf α und g senkrecht steht.

l) Jeder Punkt einer Geraden hat von jedem Punkte der Polare die Entfernung $\frac{1}{2} k \pi$. Jede Gerade, welche beide reziproke Polaren trifft, steht auf beiden senkrecht, und jede Gerade, welche auf der einen senkrecht steht, schneidet auch die andere.

Liegt der Punkt P in der Geraden g, so mufs die Polare g' von g in der Polarebene von P liegen. P hat von jedem Punkte der Polarebene, also auch von den Punkten der Linie g' die Entfernung $\frac{1}{2} k \pi$. Da jede Gerade, welche von P nach einem Punkte seiner Polarebene gezogen wird, auf der Polarebene senkrecht steht, gilt dies für alle von P nach g' gezogenen Geraden. Da aber g und g' mit einander vertauscht werden können, mufs die bezeichnete Gerade auf beiden senkrecht stehen. Legt man durch P und g' eine Ebene, so mufs sie alle Senkrechten enthalten, welche in P auf g errichtet werden können.

m) Der Raum kann so bewegt werden, dafs jeder Punkt seine Lage mit der seines Gegenpunktes vertauscht; mit andern Worten:

Jeder Körper ist zu seinem Gegenkörper kongruent.

Man nehme irgend zwei reziproke Polaren k und l. Zuerst mache man eine halbe Umdrehung um k; dann wird jeder Punkt von l in Deckung mit seinem Gegenpunkte gelangen. Darauf mache man eine halbe Umdrehung um l (in seiner neuen Lage); dadurch erreicht man, dafs auch jeder Punkt von k die Lage mit der seines Gegenpunktes vertauscht. Jetzt sei A ein beliebiger Punkt des Raumes; man lege diejenige Gerade a hindurch, welche k und l trifft; die Schnittpunkte mit k seien B und B', die mit l seien C und C'. Durch die ausgeführte Bewegung haben B und B', C und C' je ihre Lage vertauscht. Da durch die zwei Paare von Gegenpunkten B und B', C und C' nur eine gerade Linie geht, so deckt die Gerade a ihre Anfangslage wieder und jeder ihrer Punkte gelangt in die Anfangslage des Gegenpunktes, speziell der Punkt A in seinen Gegenpunkt A'.

n) Fällt man von zwei Gegenpunkten auf dieselbe gerade Linie die Senkrechten, so sind dieselben gleich grofs, gehören derselben geraden Linie an und ihre Fufspunkte sind wiederum Gegenpunkte.

Hierbei wird vorausgesetzt, dafs der Abstand nicht gleich $\frac{1}{2} k\pi$ ist, und dafs man in den Senkrechten beidemal dasjenige Stück gewählt habe, welches $< \frac{1}{2} k\pi$ ist. Der Beweis folgt unmittelbar aus m) und a).

o) Aus l) folgen unmittelbar die beiden Sätze:

Sind k und l irgend zwei reziproke Polaren, und wählt man auf k die Punkte E und F, auf l die Punkte G und H beliebig aus, so stehen k und l sowohl auf der Geraden EG, wie auf FH senkrecht.

Wenn eine gerade Linie k zwei Gerade a und b senkrecht schneidet, so thut dasselbe ihre reziproke Polare l.

Der zweite Satz folgt daraus, dafs jede gerade Linie, welche auf k senkrecht steht, auch die reziproke Polare l senkrecht treffen mufs; auf k senkrecht zu stehen, wird aber von den Geraden a und b vorausgesetzt.

p) Wenn zwei Punkte einer geraden Linie, ohne Gegenpunkte zu sein, von einer zweiten Geraden gleichen Abstand haben, so steht die von der Mitte der beiden Punkte auf die zweite gefällte Senkrechte auch auf der ersten senkrecht.

Die beiden in § 11 g) angegebenen Beweise bleiben ungeändert, wofern nur die Punkte keine Gegenpunkte sind und damit nicht unendlich viele gerade Linien hindurchgelegt werden können.

q) Zu irgend zwei Geraden, welche nicht derselben Ebene angehören, giebt es mindestens zwei gerade Linien, durch welche sie senkrecht geschnitten werden.

Von zwei Punkten A und B der ersten Geraden a fälle man die beiden Senkrechten auf b. Wenn diese beiden Senkrechten gleich sind, so wird die von ihrer Mitte M auf b gefällte Senkrechte auch auf a senkrecht stehen. Zugleich wird die reziproke Polare dieser gemeinschaftlichen Senkrechten (nach dem zweiten Satze von o) ebenfalls beide Geraden senkrecht treffen.

Wenn aber etwa unter den beiden von A und B aus gefällten Senkrechten die erste die gröfsere ist, so fälle man auch vom Gegenpunkte A' von A die Senkrechte auf b. Wählt man also eine Länge, welche kleiner ist als die gröfsere, aber gröfser als die kleinere Senkrechte, so mufs auf a sowohl zwischen B und A, wie zwischen B und A' ein Punkt liegen, dessen senkrechter Abstand von der Geraden b dieser Länge gleich kommt. Damit haben wir diesen Fall auf den vorigen zurückgeführt.

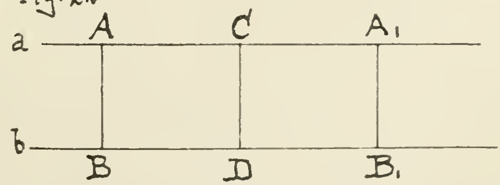
Bem. 1. Wenn die Geraden derselben Ebene angehören, so haben wir ebenfalls zwei gemeinschaftliche Senkrechte, welche reziproke Polaren von einander sind; nämlich 1. die Gerade, welche im Schnittpunkt auf beiden senkrecht steht, 2. die in ihrer Ebene gelegene Polare des Schnittpunktes.

Bem. 2. Ohne auf o) zurückzugehen, kann man die Existenz der zweiten gemeinschaftlichen Senkrechten auch durch Stetigkeitsbetrachtungen beweisen, wie sie zum Nachweis der ersten Senkrechten hier benutzt sind.

r) Wenn zu zwei Geraden zwei gemeinschaftliche Senkrechte existieren, welche nicht reziproke Polaren sind, so giebt es unendlich viele gemeinschaftliche Senkrechte, und alle diese sind gleich grofs.

Angenommen, zu den Geraden a und b gebe es zwei gemeinschaftliche Senkrechte g und h, welche nicht absolute Polaren von einander sind. Man lasse die Figur eine Drehung gleich π um g ausführen. Dann nehmen die Geraden a und b als Ganze wieder ihre Anfangslage an; dagegen wird h eine Lage h_1 erhalten, welche von h verschieden ist, und h_1 mufs ebenfalls auf a und b senkrecht stehen. Sind A und B die Fufspunkte von h, C und D die von g, A_1 und B_1 die von h_1, so sind in dem windschiefen Viereck ABA_1B_1 alle Winkel Rechte und ein Paar Gegenseiten gleich; daraus folgt leicht, dafs

Fig. 22.



auch das andere Paar Gegenseiten gleich ist. Dann ist auch $AC = BD$, also in ABCD das eine Paar Gegenseiten gleich, ohne dafs ihre Längen gleich $\frac{1}{2}k\pi$ sind. Somit ist auch $AB = CD$.

Es mufs also die Gerade, welche durch die Mitte von AC und von BD hindurchgeht, auf a und b senkrecht stehen, und man erkennt sofort, dafs auch diese Strecke gleich AB ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens läfst sich die Richtigkeit der Behauptung erweisen.

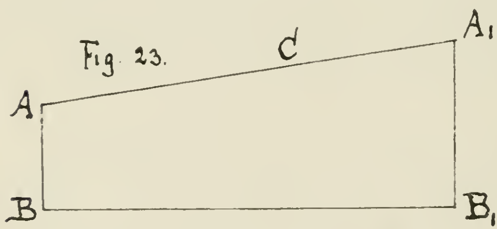
s) Für zwei gerade Linien des Riemannschen Raumes sind zwei Fälle möglich: entweder haben sie zwei oder unendlich viele gemeinschaftliche Senkrechte. Im ersten Falle gelten noch die folgenden Beziehungen:

α) Die beiden Senkrechten sind von ungleicher Länge.

Hätten sie nämlich gleiche Längen, so würden (nach n) noch weitere Senkrechte vorhanden sein.

β) Die beiden Senkrechten geben den kleinsten und gröfsten Wert, welchen der Abstand der Punkte der einen Geraden von der andern erreichen kann.

Es stehe $AA_1 \perp AB$ und $\perp A_1B_1$, und ebenso $BB_1 \perp AB$ und $\perp A_1B_1$, und es sei $AB < A_1B_1$; gäbe es auf AA_1 einen Punkt C, dessen Abstand von BB_1 kleiner als AB wäre, so müfste zwischen C und A_1 ein Punkt D liegen, dessen Abstand von BB_1 gleich AB wäre. Dann müfste



es zwischen A und D noch eine gemeinschaftliche Senkrechte geben. Ebenso würde man noch weitere Senkrechte erhalten, wenn irgend ein Punkt der ersten Geraden von der zweiten einen Abstand hätte, der gröfser wäre als A_1B_1.

Die beiden Senkrechten stellen also die stationären Abstände der beiden Geraden von einander dar.

γ) Durch die beiden stationären Abstände zweier Geraden ist ihre gegenseitige Lage vollständig bestimmt.

Sollen die beiden gemeinschaftlichen Senkrechten zweier Geraden die Längen αk und βk haben, wo α und β höchstens den Wert $\frac{1}{2}\pi$ erreichen können, so wähle man eine der gemeinschaftlichen Senkrechten g ganz willkürlich, und konstruiere zu ihr die absolute Polare h. Auf g trage man eine Strecke gleich αk und auf h eine Strecke gleich βk willkürlich ab; dann haben die beiden

Geraden, welche die Endpunkte paarweise verbinden, die verlangte Eigenschaft.

δ) Sind $k\alpha$ und $k\beta$ die stationären Werte für die Abstände der beiden Geraden, so sind auch α und β die stationären Werte für die Winkel, welche irgend zwei Ebenen mit einander bilden, von denen jede durch eine der beiden Geraden hindurchgeht.

Man kann daher auch α und β als die Neigungswinkel der beiden Geraden definieren. Auch kann man diese Eigenschaft zur Konstruktion der in γ) gelösten Aufgabe benutzen. Gegeben sei die Gerade a; man soll eine zweite Gerade b finden, für welche die gemeinschaftlichen Senkrechten die Längen $k\alpha$ und $k\beta$ haben. Man wähle in a einen Punkt A beliebig, errichte in A auf a eine beliebige Senkrechte und mache ihre Länge AB gleich $k\alpha$; durch AB lege man eine Ebene II, welche mit der Ebene durch a und B den Winkel β bildet, und errichte in ihr durch B die Senkrechte b auf AB.

t) Zwei gerade Linien des Riemannschen Raumes können aber auch unendlich viele gemeinschaftliche Senkrechten haben. Man schneide auf zwei reziproken Polaren gleiche Längen ab und verbinde deren Endpunkte durch gerade Linien, so werden diese die verlangte Eigenschaft haben. Hierüber gelten folgende Sätze, deren Beweis so leicht ist, dafs er nicht durchgeführt zu werden braucht:

α) Zwei solche Linien haben überall gleichen (senkrechten) Abstand.

β) Von jeder dritten Geraden, welche beide Linien trifft, werden sie unter gleichen Winkeln geschnitten.

Sind g und h zwei solche Linien und werden beide von der Geraden k getroffen, so ist $\sphericalangle$ (gk) = (kh), wie man sofort sieht, wenn man von jedem der beiden Schnittpunkte die Senkrechte auf die andere Gerade fällt.

γ) Verbindet man die Endpunkte gleicher Strecken AB und CD, welche einem derartigen Linienpaare angehören, in der richtigen Folge, so haben auch die Geraden AC und BD überall gleichen Abstand und in dem windschiefen Viereck sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel je einander gleich.

δ) Durch die in den drei vorangehenden Sätzen angegebenen Eigenschaften treten diese Linien in enge Beziehung zu den

Parallelen der euklidischen Ebene, und aus diesem Grunde mögen gerade Linien des Riemannschen Raumes, welche überall gleichen Abstand haben, nach Cliffords Vorschlage als Parallele bezeichnet werden. Sollte in einzelnen Fällen eine Verwechslung mit den im § 10 besprochenen Parallelen zu befürchten sein, so können wir Cliffordsche und Lobatschewskysche Parallelen unterscheiden.

ε) Durch jeden Punkt lassen sich zu einer gegebenen Geraden zwei Parallele ziehen.

Wenn die Gerade g und der Punkt P gegeben sind, so fälle man von P auf g die Senkrechte PQ. Ist deren Länge $= k\alpha$, so lege man durch P eine Gerade, welche auf PQ senkrecht steht und zur Ebene (P, g) unter dem Winkel α geneigt ist. Diese Gerade kann auf der einen oder der andern Seite der Ebene angelegt werden, und deshalb unterscheidet Clifford zwischen rechts- und links-gewendeten Parallelen.

ζ) Wenn zwei Parallele gegeben sind, so geht durch jeden Punkt des Raumes eine einzige Gerade, welche zu beiden parallel ist.

g und h seien parallel und A sei ein Punkt, welcher in keiner von ihnen liegt. Man lege durch A diejenige Gerade, welche beide trifft; das geschehe in B und C. Nun trage man auf g und h die gleichen Strecken BD und CE in richtiger Folge ab, ziehe DE und mache auf ihr DG = BA, EG = CA, so ist die Gerade AG zu g und h parallel.

η) Man kann im Raume eine zweifach unendliche Schar von Geraden so konstruieren, dafs

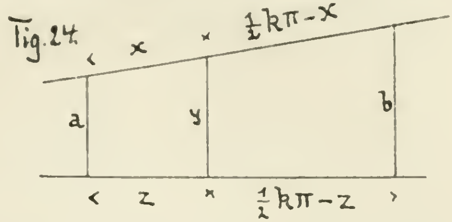
1. durch jeden Punkt des Raumes eine einzige Gerade der Schar geht, und dafs

2. irgend zwei Geraden der Schar zu einander parallel sind.

Alsdann kann man den Raum so in sich bewegen, dafs jede Gerade der Schar in sich verschoben wird; man hat nur jede Verschiebung $k\alpha$ längs einer beliebigen Geraden der Schar mit einer Drehung α um dieselbe Gerade zu verbinden.

Zusatz. Geht man von zwei gemeinschaftlichen Senkrechten aus, welche reziproken Polaren angehören, so kann man unter Anwendung der in § 21 anzuführenden trigonometrischen Formeln die unter s) und t) mitgeteilten Eigenschaften leicht durch Rechnung beweisen.

Die gegebenen Geraden mögen die gemeinschaftlichen Senkrechten a und b haben. Von einem Punkte der einen Geraden, welcher das Stück zwischen den Fufspunkten in die Teile x und $\frac{1}{2} k\pi$ — x teilt, möge auf die andere Gerade die Senkrechte y gefällt werden, durch deren Fufspunkt auf der zweiten Geraden die Stücke z und $\frac{1}{2} k\pi$ — z erhalten werden. Die Strecken x und y mögen den Winkel α bilden. Dann gelten die Gleichungen:



$$\cos\frac{y}{k}\cos\frac{z}{k} = \cos\frac{a}{k}\cos\frac{x}{k}$$

$$\cos\frac{a}{k}\cos\frac{z}{k} = \cos\frac{x}{k}\cos\frac{y}{k} + \sin\frac{x}{k}\sin\frac{y}{k}\cos\alpha.$$

$$\cos\frac{y}{k}\,.\,\sin\frac{z}{k} = \cos\frac{b}{k}\sin\frac{x}{k}$$

$$\cos\frac{b}{k}\,.\,\sin\frac{z}{k} = \sin\frac{x}{k}\cos\frac{y}{k} - \cos\frac{x}{k}\,.\,\sin\frac{y}{k}\cos\alpha.$$

Indem man aus der zweiten und vierten Gleichung $\cos\alpha$ entfernt, erhält man:

$$\cos\frac{a}{k}\cos\frac{z}{k}\cos\frac{x}{k} + \cos\frac{b}{k}\,.\,\sin\frac{z}{k}\,.\,\sin\frac{x}{k} = \cos\frac{y}{k}\,.$$

Hierin setze man für $\cos\frac{z}{k}$ und $\sin\frac{z}{k}$ die Werte aus der ersten und dritten Gleichung ein; dann folgt:

$$\cos^2\frac{y}{k} = \cos^2\frac{a}{k}\cos^2\frac{x}{k} + \cos^2\frac{b}{k}\,.\,\sin^2\frac{x}{k}\,.$$

Dieser Gleichung kann man auch die vier folgenden Formen geben, aus denen sich die obigen Eigenschaften unmittelbar ergeben:

$$\cos^2\frac{y}{k} = \cos^2\frac{a}{k} + \left(\cos^2\frac{b}{k} - \cos^2\frac{a}{k}\right)\sin^2\frac{x}{k}$$

$$= \cos^2\frac{b}{k} - \left(\cos^2\frac{b}{k} - \cos^2\frac{a}{k}\right)\cos^2\frac{x}{k},$$

$$\sin^2\frac{y}{k} = \sin^2\frac{a}{k} + \left(\sin^2\frac{b}{k} - \sin^2\frac{a}{k}\right)\sin^2\frac{x}{k}$$

$$= \sin^2\frac{b}{k} - \left(\sin^2\frac{b}{k} - \sin^2\frac{a}{k}\right)\cos^2\frac{x}{k}\,.$$

Wenn $\frac{1}{2}k\pi > b > a$ ist, so liegt auch y zwischen a und b und erreicht die Grenzwerte nur für $x = 0, \frac{1}{2}k\pi, \pi, \frac{3}{2}k\pi$. Dagegen wird für $a = b$ auch stets $y = a$ und zugleich $x = z$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, wie es die oben gegebene geometrische Herleitung erfordert.

§ 20.

Die Polarform des Riemannschen Raumes.

Wir legen jetzt die Voraussetzung zu Grunde, dafs zwei gerade Linien, welche von demselben Punkte ausgehen, nur in ihrem Anfangspunkte wieder zusammenstofsen. Im allgemeinen gelangen wir zu den im vorigen Paragraphen angegebenen Gesetzen; auch tritt in den Beweisen kaum eine Verschiedenheit auf. Indem wir jetzt die Länge der geraden Linie gleich $k\pi$ setzen, stellt sich die Gerade als ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}k\pi$ dar; jedoch wird jeder ihrer Punkte bereits durch eine Drehung von der Gröfse π in seine Anfangslage gebracht. Die im vorigen Paragraphen entwickelte Polarität bleibt ungeändert; jedem Punkte entspricht eine Ebene, jeder Ebene ein Punkt, jeder Geraden eine zweite Gerade. Demnach ändern sich die Beweise über den Schnitt von Ebenen unter einander, sowie von Ebenen mit Geraden, und über die Abstände von Geraden durchaus nicht; nur mufs das Paar von Gegenpunkten durch einen einzigen Punkt ersetzt werden. Von den Sätzen des § 19 gelten die unter a), b), c) mitgeteilten nicht für den hier betrachteten Raum. An Stelle derselben treten die folgenden:

Der Raum wird durch die Ebene, und die Ebene durch eine in ihr gelegene Gerade nicht zerlegt; man kann daher, wenn irgend zwei Punkte des Raumes gegeben sind, von denen keiner in einer gegebenen Ebene liegt, stets von einem zum andern Punkte gelangen, ohne die Ebene zu treffen.

Der gröfste Abstand zweier Punkte des Raumes beträgt $\frac{1}{2}k\pi$, ist also gleich der Hälfte der geraden Linie; alle Punkte, welche von einem festen Punkt diesen gröfsten Abstand haben, liegen in der Polarebene des Punktes.

Zum Beweise des ersten Satzes betrachte man eine Ebene und zwei nicht in ihr gelegene Punkte; durch letztere lege man eine gerade Linie; dann kann nur einer der beiden Teile, in welche diese Gerade durch die gegebenen Punkte zerlegt wird, den Schnittpunkt mit der Ebene enthalten; der andere Teil liefert einen Weg von der verlangten Eigenschaft.

Um den zweiten Satz zu beweisen, lege man wieder durch die beiden Punkte eine gerade Linie; diese wird durch die Punkte in zwei Teile zerlegt; diese Teile sind entweder beide gleich $\frac{1}{2}k\pi$ oder der eine ist kleiner als $\frac{1}{2}k\pi$. Die gröfste Entfernung zweier Punkte beträgt also $\frac{1}{2}k\pi$, und alle Punkte, welche diesen Abstand von einem gegebenen Punkte haben, gehören der Polarebene desselben an.

Wir fügen hier eine Betrachtung bei, welche es ermöglicht, die zuletzt betrachtete Raumform aus der Riemannschen herzuleiten. Wir betrachten nämlich nach dem Vorgange von Plücker in einem Raume die Ebene als Element. Diejenige Beziehung zwischen zwei Elementen, welche sich bei beliebiger starrer Bewegung nicht ändert, wird dann das Analogon des Abstandes bieten. Wollte man diese Betrachtung auf den euklidischen Raum anwenden, so würde man zu Vorstellungen geführt, auf welche sich die ersten Begriffe Euklids nicht mehr anwenden lassen. Dagegen ist es wohl gestattet, im Riemannschen Raume die Ebene als Element zu betrachten. Bei jeder starren Bewegung dieses Raumes bleibt auch die Länge der für zwei Ebenen gemeinschaftlichen Senkrechten ungeändert. Dieser Abstand darf daher als Abstand der beiden Elemente bezeichnet werden; natürlich ist, wie auch früher wenigstens stillschweigend vorausgesetzt wurde, wenn die betr. Längen auf der Senkrechten ungleich sind, die kleinere als Abstand zu bezeichnen. Dann ist der gröfste Abstand zweier Elemente gleich $\frac{1}{2}k\pi$, und wenn ein Element gegeben ist, so giebt es eine zweifache Unendlichkeit von Elementen, denen dieser gröfste Abstand zukommt; es sind das alle Ebenen, welche durch ihre Pole hindurchgehen. Ersetzen wir also in der Riemannschen Raumform den Punkt durch die Ebene, so mufs die Ebene durch die Gesamtheit aller Ebenen ersetzt werden, welche durch ein Paar Gegenpunkte gelegt werden können. Demnach mufs auch die Gerade durch den Ebenenbüschel (d. h. alle Ebenen, welche sich in derselben Geraden schneiden) ersetzt werden. Für diese Begriffe gelten alle Sätze, welche Euklid in den seinem ersten Buche vorgeschickten Bemerkungen voraussetzt, abgesehen von der Unendlichkeit der Geraden (und demnach auch vom fünften Postulat).

Bewegt man ein Element in der so definierten Geraden (also die Ebene im Ebenenbüschel), so kehrt es nach Zurücklegung des Weges $k\pi$ wieder in sich zurück. Entsprechend haben zwei gerade Linien (zwei Ebenenbüschel) höchstens ein einziges Element gemeinschaftlich. Das sind aber gerade diejenigen Voraussetzungen, von denen wir in diesem Paragraphen ausgegangen sind; deshalb kann man jeden der Sätze § 19 d) — n) für die hier betrachtete Anschauung verwenden. Aus diesem Grunde bezeichnen wir die vorliegende Raumform als die Polarform des Riemannschen Raumes. Da die Anwendung dieses Namens jedoch oft lästig ist, werden wir diese Raumform mit Herrn M. Simon als Kleinsche, oder wenn eine Verwechslung mit den später zu erwähnenden Clifford-Kleinschen Raumformen zu befürchten ist, als Klein-Newcombsche Raumform bezeichnen.

§ 21.

Analytische Behandlung der endlichen Raumformen.

Da wir später die Formeln der Trigonometrie direkt aus den ersten Begriffen und Sätzen herleiten wollen, können wir uns hier damit begnügen, darauf hinzuweisen, dafs die Geometrie in der Riemannschen Ebene identisch ist mit der Geometrie auf einer Kugel vom Radius k (im euklidischen Raume), dafs demgemäfs für beide Flächen auch dieselbe Trigonometrie gelten mufs. Nur mifst man in der Sphärik die Seiten gewöhnlich nach Winkelmafs, so dafs die Länge der Hauptkreise gleich 2π wird. Da wir aber hier die Länge der Geraden gleich $2k\pi$ gesetzt haben, mufs in den Formeln die Länge einer jeden Seite durch k dividiert werden. Wenn also a, b, c die Seiten und α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel eines ebenen Dreiecks sind, so gelten folgende Formeln:

$$\sin\frac{a}{k} : \sin\frac{b}{k} : \sin\frac{c}{k} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\cos\alpha.$$

Um die analytische Geometrie der Ebene aufzubauen, legen wir etwa ein dreirechtwinkliges Dreieck zu Grunde, und bestimmen die Lage eines jeden Punktes durch die Cosinus seiner (durch k dividierten) Abstände von den Ecken. Hieran kann man jedoch eine kleine Änderung anbringen, welche es gestattet, die zu erhaltenden Formeln auch für die euklidische und die Lobatschewskysche Ebene zu benutzen. Zu dem Ende gehen wir von zwei auf einander senkrecht stehenden Geraden OX und OY aus. Um die Lage eines Punktes P zu bestimmen, ziehen wir die Gerade OP und fällen von P die Senkrechten PA und PB auf OX und OY. Dann setzen wir:

$$p = \cos\frac{OP}{k},\ x = k\sin\frac{PB}{k},\ y = k\sin\frac{PA}{k}\cdot$$

Jetzt besteht zwischen p, x, y die Relation:

$$k^2p^2 + x^2 + y^2 = k^2.$$

Wählt man umgekehrt drei reelle Gröfsen so, dafs sie dieser Gleichung genügen, so stellen sie einen Punkt dar. Zwei Punkte (p, x, y) und (p', x', y') können nur zusammenfallen, wenn $p = p'$, $x = x'$, $y = y'$ ist. Durch das Verhältnis der drei Gröfsen p, x, y sind zwei Punkte bestimmt, und jedem beliebigen Verhältnis genügen zwei Punkte.

Ganz wie in § 15 leiten wir für den Abstand e zweier Punkte (p, x, y) und (p', x', y') die Formel her:

$$k^2\cos\frac{e}{k} = k^2pp' + xx' + yy'.$$

Ferner erhalten wir wie dort die Gleichung einer geraden Linie, und zwar ist dieselbe wieder homogen linear in den Koordinaten p, x, y, also von der Form:

$$ep + ax + by = 0;$$

jedoch braucht hier zwischen e, a, b keine Bedingung zu bestehen.

In ähnlicher Weise lassen sich die Koordinaten für den Raum aufstellen. Wir wählen drei auf einander senkrecht stehende Ebenen mit dem Schnittpunkte O und benutzen zur Bestimmung von P die Gröfsen:

$$p = \cos\frac{OP}{k},\ x = k\sin\frac{PA}{k},\ y = k\sin\frac{PB}{k},\ z = k\sin\frac{PC}{k},$$

wo PA, PB, PC die Längen der auf die drei Ebenen gefällten Senkrechten sind. Dann besteht die Relation:

$$k^2p^2 + x^2 + y^2 + z^2 = k^2.$$

Für die Entfernung e zweier Punkte (p, x, y, z) und (p', x', y', z') gilt die Beziehung:

$$k^2\cos\frac{e}{k} = k^2pp' + xx' + yy' + zz'.$$

Ebenso wird die Gleichung der Ebene:

$$ep + ax + by + cz = 0.$$

Die Polarform des Riemannschen Raumes unterscheidet sich dadurch von demselben, dafs, wenn beidemal der Abstand eines Punktes von seiner Polarebene gleich $\frac{1}{2} k\pi$ gesetzt wird, die Länge der Geraden im Riemannschen Raume gleich $2 k\pi$, in seiner Polarform gleich $k\pi$ ist. Für die Trigonometrie bleiben also die obigen Formeln bestehen. Auch können wir der analytischen Behandlung dieselben Koordinaten zu Grunde legen, nur werden jetzt die Wertsysteme (p, x, y, z) und $(-p, -x, -y, -z)$ denselben Punkt darstellen. Hiernach sind die Formeln für die beiden endlichen Raumformen identisch; nur zuweilen tritt bei der Deutung ein kleiner Unterschied ein.

Läfst man k immer gröfser werden oder beschränkt man sich auf ein immer kleineres Gebiet, so werden die Formeln immer mehr mit denen der euklidischen Geometrie identisch. Somit geht einerseits der endliche Raum für ein unendliches grofses k in den euklidischen über, andererseits zeigt der endliche Raum sich dem euklidischen um so ähnlicher, je kleiner das Gebiet ist, welches zur Untersuchung gewählt wird.

§ 22.

Vergleichung der verschiedenen Raumformen mit einander.

Die in den §§ 14 und 15 für die Lobatschewskysche Raumform angegebenen Formeln werden aus den im vorigen Paragraphen mitgeteilten dadurch erhalten, dafs man k^2 mit $-k^2$ vertauscht. Man kann daher für die analytische Behandlung des Lobatschewskyschen Raumes die Formeln des Riemannschen zu Grunde legen, wenn man nur der Gröfse k^2 einen negativen Wert beilegt. Dies gewährt den grofsen Vorteil, dafs man in den verschiedenen Raumformen stets dieselben Gleichungen benutzen kann, wobei auch der euklidische Raum für $k^2 = \infty$ mit eingeschlossen ist. Der Unterschied des Lobatschewskyschen und Riemannschen Raumes ergiebt sich vor allem daraus, dafs $k^2p^2 + x^2 + y^2 + z^2$ für ein positives k^2 eine positive definite Form ist, d. h. für alle reellen Werte der Variabeln einen positiven Wert annimmt und nur beim Verschwinden aller Veränderlichen gleich null werden kann, während diese Form für ein negatives k^2 auch zum Verschwinden gebracht werden kann, ohne dafs alle Variabeln gleich null sind.

Sehen wir demnach von den (doch nur geringen) Unterschieden zwischen der Riemannschen Geometrie und ihrer Polarform ab, so wird jede Raumform durch eine reelle Konstante $\frac{1}{k^2}$ charakterisiert. Diese verdient mit vollstem Rechte den Namen der charakteristischen Konstante, so dafs wir den endlichen Raum als einen Raum mit positiver, den euklidischen als einen mit verschwindender und den Lobatschewskyschen als einen mit negativer charakteristischer Konstante bezeichnen können. Die hohe Bedeutung dieser Gröfse wurde zuerst von Riemann erkannt, und da sie sich ihm aus analytischen Untersuchungen ergab und ihr allgemeiner Ausdruck grofse Ähnlichkeit mit dem für das Gaufsische Krümmungsmafs der Flächen zeigte, so nannte er sie das Krümmungsmafs der Raumform. Indem er eine Verallgemeinerung des Begriffes Raum einführt, auf welche wir hier nicht eingehen können, mufs er für die von uns betrachteten Raumformen das Krümmungsmafs als konstant voraussetzen; somit unterscheidet er Räume positiven, verschwindenden und negativen konstanten Krümmungsmafses. Dieser Name hat vielfach zu Mifsverständnissen Veranlassung gegeben, weil man sich des analytischen Ursprunges nicht erinnerte und das Wort in seiner geometrischen Bedeutung auffafste.

Bezeichnen*) wir die Gesamtheit der Begriffe und Urteile, zu denen wir bei beliebiger Wahl von $\frac{1}{k^2}$ gelangen, als eine Raumform, so stellt die Gesamtheit aller Raumformen eine stetige Folge dar. Ist in mehreren Raumformen die charakteristische Konstante positiv, so zeigen sie, solange man jede einzelne in sich betrachtet, genau dieselben Eigenschaften; sie unterscheiden sich aber durch die Länge der geraden Linie und andere dem entsprechende Längen. Will man in allen dieselbe Längeneinheit

*) Um nicht gar zu weitläufig zu werden, glaube ich es mir versagen zu müssen, im folgenden Teile dieses Paragraphen stets die Entwicklungen vollständig durchzuführen und alle Sätze mit ausführlichen Beweisen zu versehen. Da es sich nicht um die strenge Theorie handelt, dürfte ein solches Verfahren wohl gestattet sein. Auf einzelne Punkte müssen wir an einer spätern Stelle nochmals eingehen und dann soll eine genauere Darlegung erfolgen.

zu Grunde legen, so müssen wir die Räume als verschieden betrachten. Ebenso zeigen alle Raumformen mit negativer charakteristischer Konstante, so lange man jede nur in sich betrachtet, dieselben Eigenschaften, während sie von einander verschieden sind, wenn man in allen dieselbe Längeneinheit voraussetzt. Dagegen ist im euklidischen Raume die Gröfse der charakteristischen Konstante von der Wahl der Längeneinheit ganz unabhängig. Nimmt man also in den verschiedenen Raumformen dieselbe Längeneinheit an, so stellt sich die euklidische Geometrie als einzelner Fall zwischen unendlich vielen gleichberechtigten dar.

Legen wir unsern Messungen ein festes Längenmafs, etwa das Meter, zu Grunde, so belehrt uns die Erfahrung, dafs k^2 seinem absoluten Betrage nach gröfser sein mufs als eine gewisse Zahl; dagegen sagt sie uns nicht, welcher Zahl k^2 in Wirklichkeit gleich kommt. Für den reziproken Wert $1 : k^2$ müssen wir demnach ein gewisses Continuum, nämlich jede der Zahlen zwischen ε und $-\varepsilon$ als möglich anerkennen. Somit sind noch unendlich viele positive und unendlich viele negative Zahlen als möglich anzusehen. Entspricht eine dieser positiven Zahlen der Wirklichkeit, so hat der Erfahrungsraum die in § 19—21 gelehrten Eigenschaften; wenn aber $1 : k^2$ in Wirklichkeit eine negative Zahl ist, so gelten für den Raum die in den §§ 11—16 angegebenen Sätze. Dagegen gelten Euklids Sätze nur dann, wenn die Konstante den einen Wert null besitzt. Auch hier finden wir unendlich viele gleichberechtigte Werte, und nur einer entspricht der euklidischen Geometrie.

Derselbe enge Zusammenhang, welcher hier in den analytischen Formeln sich offenbart, mufs sich auch in den geometrischen Sätzen selbst zeigen. Zunächst ist das weite Gebiet der Projektivität in allen Raumformen durchaus identisch.[14]) Um zu demselben zu gelangen, gehen wir etwa von vier Punkten A, B, C, D auf einer geraden Linie aus und ziehen von einem Punkte O aus die vier Strahlen OA, OB, OC, OD. Dann folgt aus dem Sinussatz:

$$\frac{\sin\frac{AC}{k}}{\sin\frac{CB}{k}} : \frac{\sin\frac{AD}{k}}{\sin\frac{DB}{k}} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} : \frac{\sin AOD}{\sin DOB}.$$

Durchschneidet man also die vier Strahlen durch eine zweite gerade Linie und entsprechen A', B', C', D' den Punkten A, B, C, D, so mufs dieselbe Gleichung auch für die Punkte A', B', C', D' bestehen. Nun sind die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen identisch, also müssen es auch die linken sein. Definieren wir also die linke Seite der obigen Gleichung als das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D, und bezeichnen es mit (ABCD), so ist

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Dieser Satz genügt, um die projektive Geometrie aufzubauen. Man kann speziell die Kurven und Flächen zweiten Grades rein projektivisch definieren und vor allem ihre Polareigenschaften beweisen. Dabei ergeben sich nicht nur die reellen, sondern auch die imaginären Gebilde zweiten Grades.

Zu demselben Resultat gelangt man von der Gleichung der Ebene aus. Betrachten wir für die verschiedenen Punkte des Raumes den Ausdruck $ep + ax + by + cz$, wo p, x, y, z die in den §§ 16 und 21 eingeführten Gröfsen sind, so stellt derselbe, bis auf einen konstanten Faktor, eine bestimmte Funktion $\left(kf\left|\frac{r}{k}\right|\right)$ des Abstandes r des Punktes von einer festen Ebene dar. Demgemäfs mögen für die Marke $k = 1 \ldots 4$ die Ausdrücke

$$x_k = e_k p + a_k x + b_k y + c_k z$$

eingeführt werden. Dann wird durch das Verhältnis $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ ein Punkt oder in der Riemannschen Geometrie ein Paar von Gegenpunkten bestimmt. In den vier Gröfsen $x_1 \ldots x_4$ wird sich aber die Gleichung jeder Ebene homogen linear darstellen, und bei jeder projektiven Umgestaltung drücken sich die Verhältnisse der neuen Koordinaten durch homogene lineare Funktionen der alten aus. Damit ist die analytische Grundlage für die projektive Geometrie gegeben, und man kann sie selbst jetzt in bekannter Weise aufbauen.

Umgekehrt kann man die projektive Geometrie unabhängig von jeder Messung begründen und dann von ihr aus zur Metrik zurückgelangen, ja, die metrischen Eigenschaften rein projektivisch erklären. Die Wichtigkeit dieser Thatsache und die grofse Zahl von Erwägungen, welche zur Herleitung des Beweises notwendig sind, lassen es rätlich erscheinen, diese Untersuchungen im folgenden zweiten Abschnitt abgesondert zu behandeln.

Aber auch in den metrischen Eigenschaften selbst zeigt sich eine große Übereinstimmung. Wir müssen uns, da wir nur wenige Sätze aus jeder Raumform mitgeteilt haben, auf wenige Beispiele beschränken.

In der Ebene giebt es eine zweifache Unendlichkeit von geraden Linien. In der Riemannschen und Kleinschen Ebene wird jede Gerade von jeder zweiten geschnitten und besitzt mit ihr eine gemeinschaftliche Senkrechte. In der Lobatschewskyschen Ebene zerfallen die sämtlichen Geraden in Bezug auf eine gegebene gerade Linie in zwei Gruppen, deren jede ebenfalls eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bildet; die erste Gruppe umfaßt diejenigen Geraden, welche die gegebene gerade Linie schneiden; der zweiten Gruppe gehören diejenigen Linien an, welche mit der gegebenen eine gemeinschaftliche Senkrechte besitzen. Als Übergang kommen zwei Scharen von Parallelen hinzu, aber jede ist nur einfach unendlich. Zugleich bestimmt die Schar der durch denselben Punkt gehenden Geraden, wie die aller Geraden, welche auf derselben Geraden senkrecht stehen, sowie endlich die Schar aller, welche zu einer festen Richtung parallel sind, jedesmal einen Büschel.

Ebenso enthält der Raum eine dreifache Unendlichkeit von Ebenen. Im Riemannschen Raume wird eine Ebene von jeder andern in einer Geraden geschnitten und beide Ebenen haben eine gemeinschaftliche Senkrechte. Im Lobatschewskyschen Raume hingegen giebt es Ebenen, welche die gegebene schneiden, und andere, welche mit ihr eine gemeinschaftliche Senkrechte besitzen; beide sind in dreifacher Unendlichkeit vorhanden; der Übergang wird von den zweifach unendlich vielen Ebenen gebildet, welche zu der gegebenen parallel sind.

Für die vier Raumformen gilt folgender Satz ganz allgemein: Durch drei Punkte läßt sich immer eine einzige in sich verschiebbare ebene Linie legen; wird ein vierter Punkt außerhalb dieser Linie angenommen, so läßt sich durch die Linie und den Punkt immer eine einzige Fläche legen, welche bei der Ruhe eines Punktes noch in sich verschoben werden kann. Die Punkte dieser Fläche haben für den Riemannscheu Raum gleichen Abstand sowohl von einem Punkte wie von einer Ebene. Dagegen existiert im Lobatschewskyschen Raume im allgemeinen entweder ein Punkt oder eine Ebene von der angegebenen Eigenschaft; nur für die spezielle Übergangsfläche, die Grenzfläche Lobatschewskys, existiert weder ein solcher Punkt noch eine solche Ebene; wir haben beide in unendlicher Entfernung anzunehmen.

§ 23.

Saccheris Untersuchungen.

Als wir die Lobatschewskysche Geometrie begründeten, sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, dafs die Gerade unendlich sei; ebenso haben wir der Untersuchung des endlichen Raumes die Annahme zu Grunde gelegt, dafs die Gerade eine geschlossene Linie sei. Nun ist es aber vom theoretischen Standpunkte aus schon mifslich, eine solche willkürliche Annahme zum Ausgangspunkte der Untersuchung zu machen. Aufserdem legt die Gleichartigkeit der gewonnenen Resultate es nahe, auch eine Übereinstimmung in der Grundlage anzustreben. Endlich dürfte es angebracht sein, eine Grundlage zu wählen, deren Berechtigung der Erfahrung unterworfen werden kann. Deshalb ist es hoch interessant, dafs auch die ältesten sorgfältigen Untersuchungen, welche zu dem Zwecke angestellt sind, um über das elfte Axiom Euklids ins reine zu kommen, diesen Weg einschlagen. Diese Untersuchungen sind bereits vor mehr als anderthalb Jahrhunderten angestellt und in dem Werke veröffentlicht: Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, auctore Hieronymo Saccherio, societate Jesu, in Ticinensi universitate Matheseos professore (Mailand 1733).

Das Werk ist erst ganz vor kurzem durch Herrn Manganotti wiederaufgefunden und seine hohe Bedeutung von Herrn Beltrami erkannt worden. Ich erachte es für angebracht, einzelnes aus diesem Werke mitzuteilen, wobei ich mich auf ein genaues Referat des Herrn Beltrami[15]) stütze. Da Saccheri nur ebene Figuren betrachtet, wird es nicht nötig sein, jedesmal hervorzuheben, dafs die zu einer Figur vereinigten Linien und Punkte in derselben Ebene vorausgesetzt werden.

In den beiden Endpunkten A und B einer geraden Strecke errichten wir nach derselben Seite zwei gleichgrofse Senkrechte AC und BD; wenn wir deren Endpunkte durch eine gerade Strecke CD mit einander verbinden, so sind die Winkel, welche diese mit den Senkrechten bildet, notwendig gleich; also sind die Winkel an C und an D beide entweder rechte oder stumpfe oder spitze. Im ersten Falle ist die Strecke CD gleich AB, im zweiten kleiner, im dritten gröfser als AB; und umgekehrt. Diese drei Fälle betrachtet Saccheri zunächst (ab initio) als gleich möglich, und er beweist für jede der drei Hypothesen, dafs, si in uno casu sit vera, semper in omni casu illa sola est vera. Demnach unterscheidet er die Hypothese anguli recti, anguli obtusi und anguli acuti.

Für jede der drei Hypothesen stellt Saccheri weitere Sätze auf, von denen jeder für die Hypothese charakteristisch ist. Hierher gehört der Satz über die Winkelsumme eines Dreiecks, welche entsprechend den drei Hypothesen ebenso grofs, gröfser oder kleiner als zwei Rechte sein mufs. Ebenso ist charakteristisch die Gröfse des Winkels im Halbkreise, welcher ganz entsprechend ein rechter oder ein stumpfer oder ein spitzer ist. Ferner gilt der Satz: Wenn man von der Mitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Senkrechte auf eine Kathete fällt, so wird die Kathete entweder in zwei gleiche Teile zerlegt oder der kleinere Abschnitt liegt am Scheitel des spitzen oder an dem des rechten Dreieckswinkels, jenachdem man von der Hypothese des rechten, stumpfen oder spitzen Winkels ausgeht.

Da die unwillkürlich gemachte Voraussetzung, die Gerade sei unendlich, den Verfasser bald erkennen liefs, die »hypothesis anguli obtusi« sei »absolute falsa«, so verweilt er mit besonderer Liebe bei seiner »hypothesis anguli acuti«. Hierfür stellt er z. B. folgenden Satz auf: Wenn irgend ein noch so kleiner Winkel YAX gegeben ist, so müssen (bei dieser Hypothese) nur bis zu einer gewissen Grenze hin die auf AX errichteten Senkrechten den Schenkel AY schneiden; dagegen kann von dieser Grenze ab der Schnitt nicht mehr stattfinden. Hieran anknüpfend stellt er den Begriff des Parallelwinkels auf, wie ihn Lobatschewsky erst hundert Jahre später wieder eingeführt hat. So hat Saccheri aus seiner hypothesis anguli acuti bereits alle in § 10 aufgestellten Sätze hergeleitet. Ich möchte nur noch an folgenden erinnern:

Auf einer Geraden BX sei in B die Senkrechte BA errichtet; wenn dann eine Gerade um A so gedreht wird, dafs sie zuerst mit AB zusammenfällt, so wird sie anfangs stets einen Schnittpunkt mit BX haben, aber der Schnittpunkt wird sich immer weiter von B entfernen; dreht man die Gerade dagegen so, dafs sie bei Beginn der Drehung mit der in A auf AB errichteten Senkrechte AY zusammenfällt, so wird sie anfangs stets eine gemeinschaftliche Senkrechte mit BX haben, aber diese Senkrechte wird immer kleiner. Zwischen den durch A gehenden Geraden, welche die BX schneiden, und denen, welche mit ihr eine gemeinschaftliche Senkrechte haben, giebt es eine Gerade AC der Art, dafs alle Geraden zwischen AB und AC schneiden, und alle Geraden zwischen AC und AY eine gemeinschaftliche Senkrechte haben.

Eine derartige Kenntnis der aus der genannten Voraussetzung folgenden Sätze ist ganz bewunderungswürdig, um so mehr, da der Verfasser keineswegs die Berechtigung derselben anerkennt. Dieser Standpunkt ergiebt sich schon aus der Vorrede, worin er die Richtigkeit des elften Axioms Euklids als zweifellos hinstellt und nur Euklids Behandlungsweise tadelt. Dementsprechend giebt er auch mehrere Merkmale an, welche für die Hypothese des rechten Winkels charakteristisch sind, und erachtet diese für durchaus erfüllt. Eins dieser Kriterien besteht für ihn darin, dafs wenn in einem Kreise die Sehnen EF, FG, GH je gleich dem Radius sind, die Gerade EH durch den Mittelpunkt geht. Hierin glaubt er einen direkten Erfahrungsbeweis zu erblicken (utpote quae subest communi, facillimae, paratissimaeque experientiae).

Sein Kampf gegen die hypothesis anguli acuti stellt sich denn auch, nach Herrn Beltramis Angabe, ganz als Resultat einer vorgefafsten Meinung dar. Darauf dürfen wir nicht näher eingehen; wir wollten nur auf den Weg hinweisen, der unseres Erachtens auf die natürlichste und einfachste Weise zu den verschiedenen Raumformen führt, und von dem wir wünschen möchten, er sei vollständig entwickelt.

Die Fruchtbarkeit des hier gewählten Ausganges ist auch vor wenigen Jahren, ehe das Werk Saccheris aufgefunden war, von Herrn Stolz[16]) erkannt worden. Derselbe macht die Annahme, dafs in einem speziellen Falle die oben bezeichneten Winkel C und D rechte seien, und leitet daraus mit besonderer Leichtigkeit die euklidische Geometrie her.

§ 24.

Gemeinschaftliche Begründung der verschiedenen Raumformen.

Es wird gut sein, noch einen andern Weg[17]) anzugeben, welcher zu den verschiedenen Raumformen führt, ohne über ein beliebig kleines endliches Gebiet hinauszugehen. Dieser Weg benutzt allerdings die ersten Sätze der Differential- und Integralrechnung; indessen wird es dem Leser ohne Zweifel leicht werden, diejenigen Stellen, in denen von der Rechnung Gebrauch gemacht wird, ihres analytischen Charakters zu entkleiden und dafür rein geometrische Erwägungen zu benutzen. Ich selbst glaubte diese Form der Darstellung nicht wählen zu dürfen, weil die Breite, die dabei unvermeidlich ist, dem Leser nur lästig fallen müfste.

Wir gehen davon aus, dafs in dem angenommenen Gebiete die Voraussetzungen Euklids gelten; nur soll die Unendlichkeit der Geraden und sein fünftes Postulat nicht vorausgesetzt werden. Zunächst beschränken wir uns auf ein unendlich kleines Gebiet, d. h. wir gehen von irgend einer Figur aus und lassen sie nach einem festen Gesetze in der Weise sich ändern, dafs alle in ihr vorkommenden Linien beliebig klein werden. So behalten wir etwa in einem Dreieck zwei seiner Winkel bei, lassen aber diejenige Seite, an der diese beiden Winkel liegen, unbegrenzt abnehmen; wir können auch einen Winkel ungeändert lassen und die ihn einschliefsenden Seiten nach irgend einem Gesetze unbegrenzt verkleinern. Jetzt weist schon die Erfahrung darauf hin und eine genauere Untersuchung bestätigt es, dafs man die Winkelsumme eines Dreiecks beliebig nahe an zwei Rechte bringen kann, wofern man nur die Seiten hinreichend klein werden läfst. Daraus folgt, dafs die Verhältnisse der Seiten eines Dreiecks, in dem zwei Winkel konstant bleiben, sich festen Gröfsen immer mehr nähern, je kleiner die von den beiden Winkeln eingeschlossene Seite wird. Geht man speziell von einem rechtwinkligen Dreieck aus, in dem ein spitzer Winkel α konstant erhalten wird, während man eine Seite immer kleiner werden läfst, so nähert sich das Verhältnis der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse immer mehr einer festen Grenze, welche als der

Sinus von α definiert werden kann. Vermittelst desselben Dreiecks kann man auch die übrigen trigonometrischen Funktionen einführen; dann erleidet die Herleitung der für sie geltenden Gesetze keine wesentliche Veränderung, und die Funktionen selbst sind dieselben, welche im elementaren Unterricht mit diesem Namen bezeichnet werden.

In ähnlicher Weise kann man zwei Winkel α und β eines beliebigen Dreiecks unverändert lassen und die von ihnen eingeschlossene Seite c immer kleiner machen; dann werden, wenn der dritte Winkel γ ist und die Seiten a und b den Winkeln α und β gegenüberliegen, die Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

$$\mathrm{a} : \sin \alpha = \mathrm{b} : \sin \beta = \mathrm{c} : \sin \gamma$$

der Wahrheit immer näher kommen, je kleiner die Seite c wird. Der Fall, dafs diese Formeln vollkommen richtig sind, ist natürlich nicht ausgeschlossen.

Dasselbe Verfahren können wir auf irgend eine Figur anwenden; wir benutzen bei den folgenden Entwicklungen speziell das Viereck und den Kreis. Überall zeigt sich, dafs die Gesetze der euklidischen Geometrie entweder in voller Strenge gelten oder doch der Wahrheit immer näher kommen, je kleiner das Gebiet wird, auf das man sich beschränkt. Um dies kurz auszudrücken, sagt man wohl, für ein unendlich kleines Gebiet gälte die euklidische Geometrie.

Den Nachweis für diese Behauptung möchten wir hier um so eher übergehen, weil er bereits von verschiedenen Seiten mitgeteilt ist. Wir erinnern nur daran, dafs die euklidische Geometrie jedenfalls mit allen unsern Beobachtungen im schönsten Einklang steht. Wofern sie also der Wahrheit nicht vollständig entspricht, liegt innerhalb eines jeden unserer Beobachtung zugänglichen Gebietes die Abweichung jedenfalls nur innerhalb derjenigen Fehlergrenzen, welche bei unsern Messungen unvermeidlich sind. Demnach dürfen wir uns fragen: Welche Gesetze können für den Raum als streng richtig angesehen werden, wofern man die (durch die Erfahrung bestätigte) angenäherte Richtigkeit der Sätze Euklids voraussetzt? Diese Frage ist nicht wesentlich verschieden von der folgenden: Welche Gesetze gelten für einen endlichen Raum, wenn in einem unendlich kleinen Gebiet die euklidische

Geometrie als richtig angenommen wird? Die Annahme, für ein unendlich kleines Gebiet gälten die Sätze Euklids, kommt aber darauf hinaus, alle von Euklid gemachten Voraussetzungen mit Ausschlufs der Unendlichkeit der Geraden und des Parallel-Axioms beizubehalten.

Um die gestellte Frage zu beantworten, betrachten wir ein Dreieck, in welchem eine Seite und der eine anliegende Winkel unveränderliche endliche Gröfse besitzen, während der andere an ihr anliegende Winkel unendlich klein wird. Lassen wir im Dreieck AEF (Fig. 25) die Seite $AE = y$, $AF = y + dy$, $EF = dx$, den Winkel $AEF = \pi - \psi$, $EAF = d\varphi$, $AFE = \psi + d\psi$ sein, so ist EF eine Funktion von y, ψ und $d\varphi$. Da aber $d\varphi$ unendlich klein ist, so mufs EF, wie man leicht beweist, mit $d\varphi$ proportional sein. Wir können also setzen: $dx = F(y, \psi)\, d\varphi$.

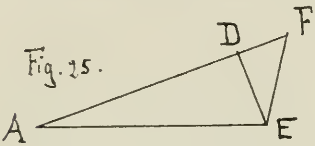


Fig. 25.

Bezeichne ich den Wert, welchen die Funktion $F(y, \psi)$ für $\psi = \frac{\pi}{2}$ erhält, mit $f(y)$, so wird, wenn ich in E die $ED \perp AE$ errichte, $ED = f(y)\, d\varphi$ sein. Im Dreieck EDF nähert sich aber $\sphericalangle$ EDF immer mehr einem rechten; zugleich ist $DEF = \frac{\pi}{2} - \psi$, folglich $ED = EF \,.\, \sin \psi$, oder

$$(1)\quad dx = \frac{f(y)\, d\varphi}{\sin \psi}.$$

Die vorstehenden Betrachtungen, soweit sie nicht das Dreieck DEF benutzen, können durch folgende ersetzt werden: Der Umfang u eines Kreises mit dem Radius r ist offenbar eine Funktion des Radius; man kann also setzen: $u = 2\pi f(r)$. Nun ist der Bogen dem zugehörigen Centriwinkel proportional, somit ist der zu einem unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ gehörige Bogen $= f(r)\, d\varphi$.

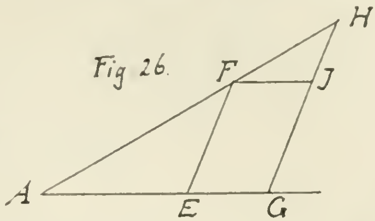
In der obigen Figur wird AD immer näher an AE kommen, je kleiner der Winkel A gemacht wird; somit wird $DF = dy$, $EDF = \frac{\pi}{2}$, $DEF = \frac{\pi}{2} - \psi$, folglich ist:

$$(2)\quad \frac{dy}{dx} = \cos \psi.$$

Wir verlängern jetzt AE um $EG = h$ (Fig. 26) und legen GH unter dem Winkel $\pi - \psi$ an, so ist offenbar wie vorher

$$GH = \frac{d\varphi \,.\, f(y+h)}{\sin \psi}.$$

Fig. 26.



Da $\sphericalangle AFE = \psi + d\psi$ gesetzt ist, wird $HFJ = - d\psi$ sein, wenn $EFJ = \pi - \psi$ gemacht wird. Dann ist, wenn h unendlich klein angenommen wird, $EF = GJ$, $FJ = EG$. Weil aber $HJ = HG - EF = \frac{d\varphi}{\sin \psi}$ $\{f(y+h) - f(y)\}$ ist, und im Dreieck FHJ der Seite HJ der unendlich kleine Winkel $HFJ = - d\psi$ gegenüberliegt, dessen Sinus gleich dem Bogen selbst ist, so folgt zunächst

$$\frac{HJ}{FJ} = - \frac{d\psi}{\sin(\psi + d\psi)},$$

und wenn hierin die obigen Werte eingesetzt werden:

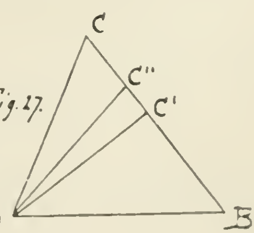
$$\frac{f(y+h) - f(y)}{h} = - \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

Da der Wert auf der rechten Seite dieser Gleichung von h unabhängig ist, wenn h nur unendlich klein angenommen wird, so erreicht auch die linke Seite für immer kleiner werdende Werte von h einen bestimmten Grenzwert, nämlich den Differentialquotienten $f'(y)$ von $f(y)$ nach y; das giebt die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = - f'(y).$$

Ich betrachte jetzt ein Dreieck ABC (Fig. 27) und teile es durch gerade Linien, welche von A ausgehen, in lauter beliebig kleine Dreiecke. Setze ich $C'AB = \varphi$, $AC' = y$, $\sphericalangle AC'B = \psi$, $C'B = x$, so entspricht diesen Festsetzungen: $C''AB = \varphi + d\varphi$, $\sphericalangle AC''B = \psi + d\psi$, $AC'' = y + dy$, $C''C' = dx$, und es gelten die aufgestellten Gleichungen (1) — (3). Indem ich die erste mit der zweiten multipliziere und durch die dritte dividiere, folgt:

Fig. 27.



$$\frac{dy}{d\psi} = -\frac{f(y)\cos\psi}{f'(y)\sin\psi} \text{ oder}$$

$$f(y) \,.\, \cos\psi \,.\, d\psi + \sin\psi \,.\, f'(y)\,dy = 0 \text{ oder}$$

$$d[f(y) \,.\, \sin\psi] = 0, \text{ also } f(y) \sin\psi = \text{const.}$$

Wie die Figur zeigt, wird für $\varphi = 0$ zugleich $y = c$ und $\psi = \pi - \beta$. Folglich gilt die Gleichung:

$$f(y)\sin\psi = f(c)\sin\beta.$$

Diese Gleichung besteht auch, wenn $y = b$, $\psi = \gamma$ wird, und sagt also aus:

$$(4)\quad f(b)\sin\gamma = f(c)\sin\beta.$$

Nun hätte ich aber das Dreieck ABC auch von B aus in lauter kleine Streifen zerlegen können; dann würde man ganz in derselben Weise zu der Gleichung gelangt sein:

$$f(c)\sin\alpha = f(a)\sin\gamma.$$

Diese Gleichung gilt auch für die beiden Dreiecke ABC′ und ABC″. Für das erstere liefert sie die Beziehung:

$$f(c)\sin\varphi = f(x)\sin\psi.$$

Die für das zweite Dreieck geltende Gleichung wird aus der vorstehenden durch Differentiation gefunden, so dafs sich ergiebt:

$$f(c)\cos\varphi \,.\, d\varphi = f'(x)\sin\psi \,.\, dx + f(x)\cos\psi \,.\, d\psi.$$

Werden hierin die Werte aus (1) — (3) eingesetzt, so findet man:

$$f(c)\cos\varphi = f(x)f(y) - f(x)f'(y)\cos\psi.$$

Diese Gleichung gilt auch für $\varphi = \alpha$, $y = b$, $x = a$, $\psi = \gamma$ und lautet dann:

$$(5)\quad f(c)\cos\alpha = f'(a)f(b) - f(a)f'(b)\cos\gamma.$$

Wie oben, mufs diese Gleichung auch gelten, wenn α und γ, a und c vertauscht werden; also folgt:

$$f(a)\cos\gamma = f'(c)f(b) - f(c)f'(b)\cos\alpha.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen eliminiert man $\cos\gamma$ und findet:

$$f(c)\{1 - [f'(b)]^2\}\cos\alpha = f(b)\{f'(a) - f'(b)f'(c)\}.$$

Damit verbindet man die folgende:

$$f(b)\{1 - [f'(c)]^2\}\cos\alpha = f(c)\{f'(a) - f'(b)f'(c)\},$$

und erhält durch Division beider:

$$(6)\quad \frac{[f(b)]^2}{1 - [f'(b)]^2} = \frac{[f(c)]^2}{1 - [f'(c)]^2}.$$

Diese Gleichung mufs für irgend zwei Strecken b und c gelten, welche Seiten eines Dreiecks sein können. Wir setzen den gemeinschaftlichen Wert beider Seiten der Gleichung gleich k^2, und erkennen, dafs k^2 positiv, negativ oder unendlich grofs sein kann, aber notwendig von null verschieden ist. Demgemäfs ist für jeden Wert von b:

$$(7)\quad \frac{[f(b)]^2}{1-[f'(b)]^2} = k^2.$$

Ersetzen wir $f'(b)$ durch $\frac{df(b)}{db}$, so folgt: $\frac{df}{\sqrt{1-\frac{f^2}{k^2}}} = db$,

und daraus ergiebt sich, wenn man berücksichtigt, dafs f und b gleichzeitig verschwinden: $\text{arc}\sin\frac{f}{k} = \frac{b}{k}$, oder

$$(8)\quad f(b) = k\sin\frac{b}{k},\ f'(b) = \cos\frac{b}{k}.$$

Indem wir diese Werte in (4) — (6) einsetzen, erhalten wir die Hauptsätze der Trigonometrie, nämlich:

$$(9)\quad \sin\frac{b}{k}\sin\gamma = \sin\frac{c}{k}\sin\beta \text{ (Sinussatz).}$$

$$(10)\quad \sin\frac{c}{k}\cos\alpha + \sin\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}\cos\gamma = \sin\frac{b}{k}\cos\frac{a}{k}.$$

$$(11)\quad \cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\cos\alpha \text{ (Cosinussatz).}$$

Für $\frac{1}{k^2} = 0$ wird $f(b) = b$, $f'(b) = 1$. Zugleich gehen die beiden ersten Gleichungen über in:

$$b\sin\gamma = c\sin\beta,\ c\cos\alpha + a\cos\gamma = b,$$

woraus die übrigen Formeln der gewöhnlichen Trigonometrie leicht hergeleitet werden können, während die Formel (11) nicht unmittelbar benutzt werden kann, da bei ihrer Herleitung die Konstante k^2 als von unendlich verschieden angenommen wurde.

Euklids Voraussetzungen führen demnach, wofern man von der Unendlichkeit der Geraden und seinem fünften Postulat absieht, zu drei verschiedenen Formelsystemen für die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks. Das eine dieser Systeme entspricht der euklidischen, das zweite der Lobatschewskyschen, das dritte der Riemannschen Geometrie und ihrer Polarform. Wir sind daher wieder zu den früher behandelten Raumformen geführt.

§ 25.

Zweite Behandlung eines ebenen endlichen Gebietes.

Solange man die Gesetze für unbegrenzt wachsende Gebiete nicht kennt, ist es von der gröfsten Wichtigkeit, sich auf ein endliches, vollständig begrenztes Gebiet zu beschränken und zuerst die in demselben geltenden Gesetze zu ergründen. Indessen scheinen sich dann für die geometrische Untersuchung ganz besondere Schwierigkeiten zu ergeben. So hat z. B. Legendre im allgemeinen versucht, seinen Entwicklungen ein ganz bestimmtes endliches Dreieck zu Grunde zu legen; aber für diejenige Konstruktion, durch welche er einen für seine Theorie fundamentalen Satz beweist, benutzt er ein Dreieck, von welchem zwei Seiten unbegrenzt zunehmen (vergl. § 5. S. 9). Ebenso scheint Saccheri zu verfahren, indem er zwar im allgemeinen von einer gewissen endlichen Figur ausgeht, aber doch für gewisse Sätze die Linien unbegrenzt verlängert. Die im vorigen Paragraphen gegebene Herleitung geht über ein bestimmtes Gebiet nach keiner Richtung hinaus und beweist, dafs dafür nur drei Fälle möglich sind. Dabei ist es aber notwendig, vorher unendlich kleine Gebiete zu untersuchen und Rechnungen mit infinitesimalen Gröfsen vorzunehmen. Zwar ist es recht wohl möglich, die Rechnung durch rein geometrische Betrachtungen zu ersetzen; aber es ist nicht zu leugnen, dafs dadurch der Beweis etwas schwerfällig wird. Bei der Wichtigkeit des gefundenen Resultates dürfte es sich immerhin lohnen, eine zweite Herleitung zu geben, wenngleich dieselbe wesentlich an denselben Mängeln leidet. Auch hier müssen wir die Gesetze für unendlich kleine Figuren voraussetzen und von der Rechnung einigen Gebrauch machen. Der Unterschied der beiden Herleitungen liegt in folgendem.

Der vorhin gegebene Beweis schliefst sich an einen Gedanken an, der im wesentlichen bereits von Gaufs in seinen Disquisitiones circa superficies curvas benutzt worden ist und dann in Entwicklungen der Herren Flye St. Marie und Newcomb eine Rolle gespielt hat, indem man von einem Punkte zwei kürzeste Linien ausgehen läfst, welche einen unendlich kleinen Winkel einschliefsen. Die folgende Herleitung schliefst sich an einen Gedanken an, welchen Saccheri seinen Untersuchungen zu Grunde legt. Man geht von einer geraden Strecke DE aus, errichtet auf ihr in derselben Ebene zwei gleich grofse Senkrechte DF und EG, und zieht die Gerade FG. Ich nehme jetzt $DE = dx$ unendlich klein an und setze $DF = EG = y$. Dann ist FG für ein unendlich kleines DE dieser Länge porportional, und zudem abhängig von DF, so dafs gesetzt werden kann:

$$(1)\quad FG = \varphi(y) \,.\, dx.$$

Je kleiner y wird, um so näher kommt FG an DE, also ist

$$(2)\quad \varphi(0) = 1.$$

Verlängern wir DF und EG je um dieselbe unendlich kleine Strecke $FH = GJ = dy$, so ist auch

$$HJ = \varphi(y + dy) \,.\, dx.$$

Auf das unendlich kleine Viereck FGJH kann man die euklidische Geometrie anwenden; zieht man durch G die GK $\parallel$ FH und durch F eine Gerade LF, welche die GJ in M trifft, so ist $\sphericalangle\, LMG = LFD - KGJ$. Wird also $\sphericalangle\, LFD = \varrho$, $\sphericalangle\, LMG = \varrho + d\varrho$ gesetzt, so ist $KGJ = -\, d\varrho$.

Nun ist

$$\sin \tfrac{1}{2} KGJ = \frac{\frac{1}{2} KJ}{GJ}$$

oder wegen der Kleinheit des Winkels:

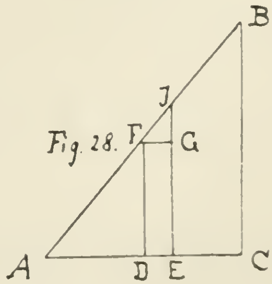
$$-\frac{d\varrho}{dx} = \frac{\varphi(y + dy) - \varphi(y)}{dy}.$$

Hier ist die linke Seite unabhängig von dy; also erhalten wir auf beiden Seiten einen bestimmten Grenzwert. Unter den gemachten Annahmen ist demnach:

$$(3)\quad \frac{d\varrho}{dx} = -\varphi'(y).$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachte ich ein rechtwinkliges Dreieck ABC, wo C der rechte Winkel ist. Ich zerlege dieses Dreieck durch lauter Senkrechte, welche auf AC errichtet werden, in unendlich kleine Streifen. Nun wird gesetzt: $AD = x$, $DE = dx$, $DF = y$,

Fig. 28.



$AF = z$, $FJ = dz$, $\sphericalangle AFD = \varrho$, $AJE = \varrho + d\varrho$, $JG = dy$. Dann ist $FG = \varphi(y)\,dx$; also gelten die drei Beziehungen:

$$(4)\quad \sin\varrho\,dz = \varphi(y)\,dx,\ \ dy = dz\,.\cos\varrho,\ \ d\varrho = -\varphi'(y)\,dx.$$

Daraus folgt durch Elimination von dx und dz:

$$\sin\varrho\,.\,\varphi'(y)\,dy + \cos\varrho\,.\,\varphi(y)\,d\varrho = 0 \text{ oder}$$

$$(5)\quad d[\sin\varrho\,.\,\varphi(y)] = 0,\ \ \sin\varrho\,.\,\varphi(y) = \text{Const.}$$

Für $y = 0$ wird aber $\varrho = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\varphi(0) = 1$, somit

$$(6)\quad \varphi(y)\,\sin\varrho = \cos\alpha,$$

speziell also auch:

$$(7)\quad \varphi(a)\,\sin\beta = \cos\alpha.$$

Eine entsprechende Gleichung wird man auch für das Dreieck ADF erhalten, wenn man es durch lauter auf DF errichtete Senkrechte zerlegt. Dann gilt die Gleichung:

$$(8)\quad \varphi(x)\,\sin\alpha = \cos\varrho.$$

Da dieselbe Gleichung auch für das Dreieck AEJ gilt, so mufs sein:

$$\varphi'(x)\,\sin\alpha\,dx = -\sin\varrho\,d\varrho,$$

oder wenn man hierin aus (4) den Wert für $d\varrho$ einsetzt:

$$(9)\quad \varphi'(x)\,\sin\alpha = \varphi'(y)\,.\,\sin\varrho.$$

Quadrieren wir die Gleichungen (6) und (8) und subtrahieren die eine von der andern, so folgt:

$$(1 - [\varphi(y)]^2)\,\sin^2\varrho = (1 - [\varphi(x)]^2)\,\sin^2\alpha.$$

Hiermit verbinden wir die Gleichung (9); alsdann fallen ϱ und α ganz weg und es ergiebt sich:

$$(10)\quad \frac{[\varphi'(y)]^2}{1 - [\varphi(y)]^2} = \frac{[\varphi'(x)]^2}{1 - [\varphi(x)]^2}.$$

Wären wir von einem andern rechtwinkligen Dreieck ausgegangen, so müfste zwischen irgend zwei entsprechenden Strecken x und y dieselbe Relation bestehen; somit müssen beide Seiten der Gleichung (10) konstante Werte besitzen. Wir setzen also:

$$(11)\quad \frac{[\varphi'(x)]^2}{1 - [\varphi(x)]^2} = k^2.$$

Hieraus folgt für einen von null und unendlich verschiedenen Wert von k^2:

$$(12)\quad \varphi(x) = \cos\frac{x}{k}.$$

In die zweite Gleichung (4) setzen wir den aus (6) für $\cos\varrho = \sqrt{1 - \sin^2\varrho}$ folgenden Wert ein und erhalten:

$$\frac{d\left(\frac{\sin\frac{y}{k}}{\sin\alpha}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\frac{y}{k}}{\sin\alpha}\right)^2}} = d\left(\frac{z}{k}\right),$$

woraus durch Integration folgt:

$$(13) \quad \sin\frac{y}{k} = \sin\frac{z}{k}\sin\alpha,$$

wobei berücksichtigt werden mufs, dafs z und x zugleich verschwinden. Aus den Gleichungen (7), (8), (13) für $\varrho = \beta$, $x = b$, $y = a$ leiten wir aber leicht die Formeln für jedes Dreieck her.

Der Fall, dafs $k^2 = \infty$ und damit $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = 1$ ist, erledigt sich sehr einfach, da alsdann nach (4) $d\varrho = 0$, $y = z\cos\beta$, $x = z\sin\beta$ ist, so dafs sich die Gleichungen der gewöhnlichen Trigonometrie ergeben. Der Fall $k^2 = 0$ mufs, wie man leicht sieht, ausgeschlossen werden.

Wir fügen noch folgenden Satz bei:

Errichtet man in zwei unendlich nahen Punkten M und N einer Geraden gleiche Senkrechte nach derselben Seite in einer Ebene, und durchschneidet sie durch eine Gerade LPR, so ist das Verhältnis

$$\frac{(\sphericalangle\, LRN - LPM)^2}{MN^2 - PQ^2}$$

für alle Längen MP und alle Winkel LPM konstant und gleich dem Riemannschen Krümmungsmafs der Raumform.

Ersetzt man auf der linken Seite von (11) x durch y, und nimmt dann für $\varphi(y)$ und $\varphi'(y)$ ihre aus (4) folgenden Werte, so folgt

$$\frac{1}{k^2} = \frac{d\varrho^2}{dx^2 - dz^2 \,.\, \sin^2\varrho},$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

§ 26.

Rückblick.

Als Euklid sein System aufbaute, gelangte er mit voller Strenge zu dem Satze: Wenn zwei gerade Linien (derselben

Ebene) von einer dritten Geraden geschnitten werden und die Summe der beiden innern, an derselben Seite gelegenen Winkel zwei Rechte beträgt, so können sie sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag. Indessen war es ihm nicht möglich, für die Umkehrung dieses Satzes einen Beweis zu finden. Da er aber die Umkehrung für sein System nicht entbehren konnte, setzte er sie als fünftes Postulat in den Anfang des Werkes. Dadurch erkannte er offen an, dafs hier eine für ihn unlösliche Schwierigkeit vorhanden war, und indem kein Versuch gemacht wurde, sie zu verschleiern, wurde sie dem Leser leicht erkennbar. Es fehlte daher auch nicht an Versuchen, ein genügendes Fundament für die Theorie zu schaffen; gar mancher glaubte, es sei ihm gelungen, die Lücke auszufüllen; auch fanden einzelne Versuche einen gröfseren oder kleineren Kreis von Anhängern; aber kein einziger konnte sich allgemeiner Zustimmung erfreuen. Schon dieser Umstand macht es sehr wahrscheinlich, dafs ein genügendes Fundament nicht möglich ist. Denn wir befinden uns hier auf einem durchaus elementaren Gebiet; wenn da ein genügender Beweis erbracht werden könnte, so müfste er gewifs in den zweitausend Jahren, während welcher die Gelehrten sich um seine Auffindung bemüht haben, geliefert worden sein. Desungeachtet haben wir die bekanntesten Versuche (§§ 2—5) genauer geprüft und für alle die Fehlerquelle nachgewiesen.

Dadurch werden wir mit zwingender Notwendigkeit auf die Vermutung geführt, es sei vielleicht gar nicht möglich, das fünfte Postulat Euklids aus seinen übrigen Voraussetzungen herzuleiten. Um hierüber ins reine zu kommen, ersetzen wir die Begriffe der Geometrie durch andere Begriffe, für welche ebenfalls alle übrigen von Euklid gemachten Voraussetzungen gelten, und wir fragen uns, ob es möglich ist, die neuen Begriffe derartig zu wählen, dafs für sie das fünfte Postulat nicht mehr gültig ist. Das gelingt in mehrfacher Weise.

Einmal (§ 6) ersetzen wir die Ebene durch gewisse Flächen, welche nach dem Vorgange von Gaufs als solche von konstanter negativer Krümmung bezeichnet werden. Die Geraden der Ebene finden ihr Analogon in den kürzesten Linien der Fläche, und die Kreise in gewissen geschlossenen Kurven. Bei dieser Übertragung können wir zu allen ebenen Gebilden ein Analogon aufstellen;

die sämtlichen weiteren Voraussetzungen Euklids und infolge dessen auch alle seine Sätze, welche von der Parallelentheorie unabhängig sind, bleiben in Gültigkeit. Aber die Lehre von den Parallelen und die aus ihr fliefsenden Folgerungen müssen durch andere Wahrheiten ersetzt werden; namentlich ist die Winkelsumme für ein aus kürzesten Linien gebildetes Dreieck kleiner als zwei Rechte.

So interessant diese Übertragung ist, leidet sie für unsere Zwecke an einigen Mängeln. Der Beweis derjenigen Sätze, auf welche es uns ankommt, erfordert ein recht tiefes Eingehen in schwierigere Partieen der Mathematik; wir mufsten uns deshalb damit begnügen, die einzelnen Sätze ohne Beweis rein historisch anzuführen. Andererseits kann man noch einwenden: Die Betrachtung dieser Flächen zeigt wohl, dafs die Parallelen-Theorie durch Untersuchung der Ebene nicht bewiesen werden kann, aber es ist denkbar, dafs uns räumliche Betrachtungen den gesuchten Beweis liefern. Dieser Einwand wird durch eine Übertragung beseitigt, welche zudem den Vorzug besitzt, nur geringere mathematische Kenntnisse vorauszusetzen.

Die einzelnen Teile des Raumes können in mannigfacher Weise auf einander bezogen werden; man bezeichnet jede solche Operation kurz als eine Umformung des Raumes. Besonders wichtig sind diejenigen Transformationen, bei denen die Ebenen und Geraden wieder in Ebenen und Geraden übergehen. Eine solche Transformation wird als eine projektive bezeichnet. Die Schar derselben kann so beschränkt werden, dafs eine Kugelfläche (oder allgemeiner eine ungeradlinige Fläche zweiten Grades) in sich verbleibt. Indem man sich auf das Innere dieser Kugel beschränkt, welches natürlich in sich verbleibt, und nur Transformationen der bezeichneten Art betrachtet, bleiben die Begriffe von Ebene und Gerade unverändert; Kugel und Kreis müssen durch gewisse andere Gebilde ersetzt werden; auch mufs man für die Länge einer Strecke und für die Gröfse eines Winkels neue Gröfsen einführen. Dieser Anschauung genügen alle Gesetze, welche im Beginne der Geometrie aufgestellt werden, speziell die von Euklid gegebenen Definitionen, Axiome und Postulate, soweit sie nicht vom Parallelaxiom abhangen. Aber die Parallelen-Theorie gilt bei dieser Anschauung nicht mehr; es ist also unmöglich, das fünfte Postulat aus den übrigen Voraussetzungen der Geometrie herzuleiten (§ 7).

Nun kann man noch die Frage stellen, ob die Parallelentheorie wenigstens durch die Erfahrung gefordert wird. Auch diese Frage mufste in § 8 wenigstens vorläufig verneint werden. Gewifs pafst Euklids System ganz vorzüglich zu unserer Erfahrung; aber da wir unsere Zeichnungen statt mit Linien stets mit Körpern ausführen, da alle unsere Messungen mit Fehlern behaftet sind, können wir die Parallelen-Theorie höchstens als sehr wahrscheinlich, aber nicht als unbedingt gewifs hinstellen.

Wir schlagen daher jetzt (§§ 9—13) den umgekehrten Weg ein. Wir machen die Annahme, das Parallel-Axiom sei falsch, und untersuchen, ob wir zu einem innern Widerspruch geführt werden. Das ist nicht der Fall, vielmehr ergiebt sich eine vollständig in sich abgeschlossene Theorie über die gegenseitige Lage von Geraden in einer Ebene und von Geraden und Ebenen des Raumes. Auch die einfachsten krummen Gebilde (§ 14) folgen Gesetzen, wie sie bereits bei der Kugelfläche vorgezeichnet sind. Schon hiermit ist die innere Berechtigung einer Geometrie erwiesen, welche sich in Gegensatz stellt zu Euklids Voraussetzung über die Parallelen. Denn alle weiteren Beziehungen der Raumgebilde sind nur weitere Fortbildungen der für die Ebenen und Geraden geltenden Gesetze, können also zu keinem Widerspruch führen, wenn ein solcher nicht bereits in den früheren Sätzen hervortritt.

Für die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks können Formeln (§ 15) aufgestellt werden, welche mit der hier verfolgten Voraussetzung in Einklang stehen, welche gestatten, aus drei Bestimmungsgröfsen die übrigen zu berechnen, und welche in allen Fällen, wo durch Konstruktion eine geometrische Lösung möglich ist, auch zu reellen Resultaten führen. Endlich giebt es analytische Formeln (§ 16), welche einerseits mit dem Parallel-Axiom unvereinbar sind, andererseits aber allen weiteren Voraussetzungen Euklids genügen. Mit solchen Formeln ist aber implicite die ganze Geometrie gegeben; denn nachdem die Grundformeln aufgestellt sind, gründen sich alle geometrischen Sätze auf analytische Umformungen. Wenn die Grundlagen der Rechnung den geometrischen Anschauungen genügen, so können die Folgerungen aus der Rechnung weder unter einander noch mit den aufgestellten Voraussetzungen in Gegensatz treten.

Neben das von Euklid entwickelte System der Geometrie stellt sich demnach als theoretisch gleichberechtigt ein zweites, worin die Summe der Winkel eines Dreiecks weniger als zwei Rechte beträgt. Dasselbe kann auch durch die Annahme charakterisiert werden, dafs durch jeden Punkt aufserhalb einer Geraden mehrere in derselben Ebene liegende gerade Linien möglich sind, welche die gegebene Gerade bei unbegrenzter Verlängerung nicht treffen. Es wird am passendsten nach Lobatschewsky benannt, der zuerst öffentlich darüber gehandelt hat, wenngleich Gaufs seine Eigenschaften wahrscheinlich früher gekannt hat.

Die Geometrie Lobatschewskys behält die Annahme bei, dafs die Gerade unendlich sei. Diese Voraussetzung erscheint vielleicht manchem selbstverständlich. Aber es kann nicht oft genug darauf hingewiesen werden, dafs der Geist nur zu gern bereit ist, diejenigen Sätze, welche er regelmäfsig in der Erfahrung, wenn auch nur angenähert, verwirklicht findet, als allgemein und streng gültig vorauszusetzen. Aber bei allen Anschauungen können wir nur ein sehr kleines Gebiet des Raumes benutzen; zudem liefern uns die Figuren, aus denen wir derartige Erfahrungen schöpfen, niemals ein völlig getreues Bild. Nun können wir allerdings eine gerade Linie unbegrenzt verlängern, und für eine beliebig gewählte Fläche der Zeichnung entfernen wir uns vom Ausgangspunkte immer mehr, je weiter wir die Verlängerung fortsetzen. Aber diese Thatsache gilt nur für beschränkte Räume; es fehlt uns vielmehr jede Möglichkeit, die allgemeine Gültigkeit dieser Erfahrung zu prüfen. Daher ist es denkbar, dafs die Gerade bei fortgesetzter Verlängerung in ihren Anfangspunkt zurückkehrt. Darauf deutet die enge Beziehung hin, welche nach § 14 zwischen den einfachsten krummen Flächen des Lobatschewskyschen Raumes besteht. Die Geometrie auf der Kugel hat ferner, wie § 17 zeigt, so grofse Ähnlichkeit mit der der (euklidischen) Ebene, wofern die Gerade durch den Hauptkreis ersetzt wird, dafs es jedenfalls der Untersuchung lohnt, ob wirklich die Unendlichkeit im Begriff der Geraden liegt.

Sobald man versucht, aus der Annahme, dafs die Gerade geschlossen sei, weitere Folgerungen zu ziehen, ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten (§ 18): einmal können alle von einem Punkte ausgehenden geraden Linien noch durch einen zweiten Punkt gehen, zweitens können zwei gerade Linien, welche von einem Punkte ausgehen, in den Anfangspunkt zurückkehren, ohne einen weitern Schnittpunkt zu besitzen. Beide Möglichkeiten führen zu einem in sich abgeschlossenen, widerspruchsfreien Systeme, dessen Aufbau sich sehr einfach ergiebt (§ 19, 20) und für welches die trigonometrischen Formeln ganz denen der Sphärik entsprechen, so dafs die analytische Behandlung keinerlei Schwierigkeit macht (§ 21). Die beiden Systeme zeigen eine grofse Übereinstimmung, ohne jedoch identisch zu sein; die erstere Möglichkeit möge nach Riemann benannt werden, welcher zuerst ihre Berechtigung nachgewiesen hat, die andere als deren Polarform oder auch als Kleinsche Raumform bezeichnet werden.

Nach den durchgeführten Entwicklungen kann an der theoretischen Berechtigung der verschiedenen Raumformen nicht gezweifelt werden. Schon die mitgeteilten geometrischen Sätze machen es zum mindesten sehr unwahrscheinlich, dafs sich beim weiteren Aufbau ein innerer Widerspruch ergeben sollte; die Aufstellung analytischer Formeln, welche allen notwendigen Voraussetzungen der Geometrie entsprechen, schliefst eine solche Möglichkeit ganz aus.

Dadurch ist denn der tiefere Grund für die Lücke gefunden, welche sich in Euklids Elementen findet. Wenn die Geometrie mit voller Strenge aufgebaut wird, so darf sie keine Voraussetzung über die Unendlichkeit der Geraden und über die Parallelen-Theorie machen. Dann kann sie eine Reihe von Sätzen unmittelbar entwickeln; es sind vor allem die Sätze 1—15, 18—26 des ersten Buches Euklids, dann der erste Teil der Kreislehre (Buch III bei Euklid) mit Ausnahme des Satzes vom Peripheriewinkel und der daraus fliefsenden Folgerungen, endlich manche Sätze der Stereometrie, und zwar zum Teil auch solche, bei deren Beweise Euklid die Parallelentheorie benutzt. Darauf spaltet sich die Geometrie in mehrere, theoretisch gleich berechtigte Zweige, und nur dann ist die Geometrie ein volles Ganze, wenn alle diese Möglichkeiten bis zu einem gewissen Abschlufs entwickelt werden. Es ist am natürlichsten, jede einzelne Figur nach den verschiedenen Möglichkeiten hin zu untersuchen. Dann erkennt man bei jedem weitern Schritt die enge Zusammengehörigkeit (§ 22). In dem ganzen Gebiete der projektiven Geometrie (der Geometrie der Lage nach v. Staudts Ausdruck) zeigen die Sätze kaum eine Verschiedenheit. Aber auch in den metrischen Sätzen tritt bei genauerer Betrachtung eine auffallende Zusammengehörigkeit hervor; man kann sagen, die eine Raumform ergänze die andere. Wenn man von den geringen Verschiedenheiten der endlichen Raumformen absieht, so kann der ganze Unterschied der behandelten Raumformen durch eine einzige Konstante $1 : k^2$ charakterisiert werden.

Wir fragen uns demnach: An welcher Stelle läfst man naturgemäfs am besten die besprochene Teilung eintreten? Der im vorliegenden Werke eingeschlagene Weg kann unmöglich als naturgemäfs bezeichnet werden; er schliefst sich der wirklichen Auffindung recht eng an und läfst die Eigenschaften der einzelnen Raumformen ziemlich leicht auffinden. Aber die Zusammengehörigkeit wird anfangs ganz verdunkelt und tritt erst an einer späteren Stelle hervor. Deshalb ist es von grofsem historischen Interesse zu erfahren, dafs ein sehr schöner Versuch, die verschiedenen Raumformen aus einer gemeinschaftlichen Quelle herzuleiten, bereits vor mehr als 150 Jahren gemacht ist (§ 23). Saccheri geht von einer ganz einfachen Figur aus, für welche sich drei verschiedene Möglichkeiten ergeben, von denen wenigstens anfangs keine zurückgewiesen werden kann. Deshalb entwickelt er ganz streng nach Euklids Methode jede einzelne Möglichkeit und stellt so die ersten Sätze für die verschiedenen Raumformen auf. Leider läfst er sich dann, dem Vorurteil seiner Zeit folgend, dazu verleiten, sein eigenes Werk wieder umzustofsen.

Eine andere Methode, die verschiedenen Raumformen aus einer gemeinsamen Quelle herzuleiten, ist in § 24 mitgeteilt. Für ein gewisses endliches Stück der Ebene werden Euklids Voraussetzungen als richtig angenommen; darin wird ein Dreieck gezeichnet und dieses von einem Eckpunkt aus in unendlich kleine Teile zerlegt. Darauf läfst sich, wie streng nachgewiesen wird, die Rechnung anwenden, und man gelangt zu den verschiedenen Raumformen ohne jede weitere Voraussetzung, ist jedoch, wenn man nicht weitläufig werden will, genötigt, die ersten Sätze der Differential- und Integralrechnung zu benutzen. Ein zweiter Weg führt in § 25 zu demselben Resultate.

Nachdem so die Frage theoretisch ziemlich allseitig erörtert ist, müssen wir nochmals einen Blick auf die Erfahrung werfen, um zu gestehen, dafs dieselbe keines der mitgeteilten Systeme mit voller Strenge als das richtige hinstellt. Man kann daher folgende Erwägung anstellen: Nach den Entwicklungen des § 22 (S. 74) sind für unsere Erfahrung, soweit wir sie bis jetzt beurteilen können, unendlich viele Fälle gleich möglich; nur einer von diesen entspricht der euklidischen Geometrie; also darf (wenigstens augenblicklich) die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die wirklich bestehende sei, nur als unendlich klein bezeichnet werden. Dem entgegen mufs aber darauf hingewiesen werden, dafs es strenge Forderung jeder Naturerklärung ist, stets unter den verschiedenen Erklärungs-Versuchen den einfachsten zu wählen. Nun hat allerdings jede Raumform vor den andern ihre charakteristischen Vorzüge, so dafs die Frage, welches die interessanteste und schönste sei, ohne Zweifel ganz verschieden beantwortet wird. Aber das kann doch nicht bezweifelt werden, dafs die Geometrie Euklids unter allen die einfachste ist. Folglich darf sie allein zur Erklärung der Beobachtungen benutzt, mufs also vorläufig allein als richtig angenommen werden.

Zweiter Abschnitt.

Die projektive Geometrie.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Bei der gewöhnlichen Behandlung der Lehre von den harmonischen Punkten geht man von der Messung aus. Wenn vier Punkte A, B, C, D in gerader Linie liegen, so denkt man sich die vier Strecken AC, CB, AD, DB durch dasselbe Maſs gemessen; dann bildet man den Quotienten aus den beiden ersten und den aus den beiden letzten Zahlen; wenn diese beide Quotienten (bis auf das Vorzeichen) einander gleich sind, so sagt man, das Punktepaar CD liege harmonisch zum Punktepaare AB. Man schreibt diese Bedingung unter Berücksichtigung der Zeichen in der Form:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

Um nun Sätze über harmonische Punkte- und Strahlenpaare herzuleiten, gebraucht man die Sätze der Ähnlichkeitslehre, welche sich durchaus auf das Parallel-Axiom gründen, sowie dieses selbst. Indessen zeigen die Sätze, zu denen man im Verlauf der Untersuchung gelangt, einen wesentlich andern Charakter, als die meisten Sätze, welche man bei Euklid findet. Während bei diesen der Begriff der Gröſse in den Vordergrund tritt, erlangt in den neuen Sätzen die gegenseitige Lage der Gebilde eine Bedeutung, welche ihr in der Geometrie der Alten nicht zukommt. Das ersieht man schon in der sog. neueren synthetischen Geometrie, wie sie namentlich von Steiner entwickelt ist. Während die Alten die einzelnen Kegelschnitte für sich behandelten und die allgemeinen Eigenschaften derselben ganz zurücktreten liefsen, nehmen bei Steiner die gemeinsamen Sätze über Kegelschnitte als Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse den ersten Platz ein und ergeben sich aus einfachen Lagenbeziehungen.

Aus diesem Grunde hat man schon längst zwischen metrischen und projektiven Beziehungen unterschieden, weil für die ersteren die Gröfsensätze in den Vordergrund treten, während es bei den letzteren nur auf die gegenseitige Lage der Gebilde ankommt. Indessen blieb es ein Mangel, dafs zur Begründung der Projektivität metrische Eigenschaften benutzt werden mufsten. Deshalb war es als ein wesentlicher Fortschritt anzuerkennen, dafs Chr. von Staudt die Projektivität selbständig begründete und die Geometrie der Lage schuf. Leider mufste er die Parallelen-Theorie noch voraussetzen, welche doch bei ihrer Begründung die metrischen Eigenschaften nicht entbehren kann.

Als nun die Theorie der nicht-euklidischen Raumformen immer weiter entwickelt wurde, zeigte es sich, dafs zwar die Begründung der Projektivität für sie verschieden ist von der in der euklidischen Geometrie gebräuchlichen, dafs aber die einzelnen Sätze ungeändert bleiben. Von diesem Gedanken ausgehend, führte Herr Klein die Staudtsche Grundlage weiter aus und zeigte, dafs auch das Parallel-Axiom für die Begründung und Entwicklung der projektiven Eigenschaften entbehrt werden kann. Die hohe Bedeutung dieses Schrittes kann hier auch nicht andeutungsweise dargelegt werden; sie wird schon in den folgenden Paragraphen recht deutlich hervortreten, kann aber erst im zweiten Bande abschliefsend erörtert werden.

Bevor wir dazu übergehen, im Anschlufs an die Entdeckungen Staudts und Kleins[18]) die Projektivität ohne jede Messung und unabhängig vom Parallel-Axiom zu begründen, schicken wir einige Bemerkungen voraus.

Wenn jemand in den nachfolgenden Entwicklungen die Natürlichkeit vermissen sollte, so möge er bedenken, dafs es angemessen erschien, die einzelnen Darlegungen nicht gar zu weit auszudehnen. Auch würde der Leser nur ermüdet werden, wenn alle Erwägungen in solcher Breite vorgetragen würden, dafs ihre Natürlichkeit unmittelbar zu Tage tritt. Ein aufmerksamer Leser wird sich die nötigen Ergänzungen mit Leichtigkeit selbst machen können.

Während gewöhnlich (ob immer zum Vorteil, möge unerörtert bleiben) die ebene Geometrie von der des Raumes getrennt wird, müssen wir im folgenden räumliche Beziehungen an die Spitze stellen. Die Notwendigkeit dieses Schrittes werden wir später begründen.

Endlich bemerken wir noch, dafs wir der ganzen Untersuchung einen gewissen, allseitig begrenzten Raumteil zu Grunde legen. Wie derselbe begrenzt ist, kommt nicht in Betracht; der Leser kann etwa voraussetzen, wir blieben bei allen unsern Operationen im Innern einer Kugel oder, was den folgenden Entwicklungen besser entspricht, im Innern eines festen Tetraeders.[19]) Dabei sind für die §§ 2—6 die folgenden Sätze von wesentlicher Bedeutung:

a) Durch irgend zwei Punkte im Innern des Körpers geht eine und zwar eine einzige gerade Linie.

b) Wenn zwei gerade Linien einen Punkt im Innern des Körpers gemeinschaftlich haben, so treffen sie sich in keinem zweiten Punkte des Körpers.

c) Durch eine gerade Linie und einen Punkt, welcher ihr nicht angehört, läfst sich eine einzige Ebene legen.

d) Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinschaftlich haben, so schneiden sie sich in einer, und zwar einer einzigen geraden Linie.

Auf diesen Sätzen suchen wir jetzt die projektive Geometrie aufzubauen.

§ 2.

Die harmonischen Gebilde.

a) Wenn drei Punkte in gerader Linie gegeben sind, so kann man durch blofses Ziehen von geraden Linien einen vierten Punkt in derselben Geraden bestimmen, dessen Lage nur von den drei gegebenen Punkten, aber nicht von den bei der Zeichnung benutzten Linien abhängt.

Die drei gegebenen Punkte seien A, B, C; durch die gerade Linie, in welcher sie enthalten sind, lege man eine beliebige Ebene und nehme in ihr einen Punkt $\varkappa$, ziehe $A\varkappa$ und $B\varkappa$, durchschneide die beiden Linien durch eine von C ausgehende Gerade in α und β, ziehe $A\beta$ und $B\alpha$, welche sich in λ schneiden,

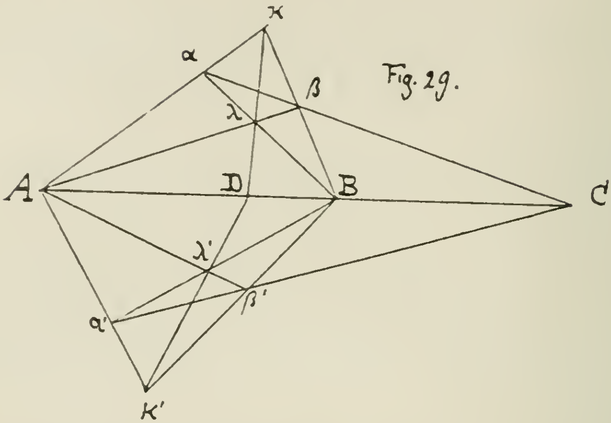


Fig. 29.

und endlich $\varkappa\lambda$, welche mit der Geraden AB in einem Punkte D zusammentrifft. Dann ist der Punkt D unabhängig von der Wahl der Ebene und von den benutzten Hülfslinien, also eindeutig durch ABC (in dieser Reihenfolge) bestimmt.

Wir weisen zunächst nach, dafs der Punkt D unabhängig ist von der durch AB gelegten Ebene; wir wählen daher eine zweite Ebene, nehmen in ihr den Punkt $\varkappa'$ beliebig an, durchschneiden die Geraden $A\varkappa'$ und $B\varkappa'$ durch eine von C ausgehende Gerade in α' und β', ziehen $A\beta'$ und $B\alpha'$, welche sich in λ' schneiden, und weisen nach, dafs $\varkappa'\lambda'$ durch D hindurchgeht.

Durch die Geraden $C\alpha\beta$ und $C\alpha'\beta'$ läfst sich eine Ebene legen; demnach treffen sich auch die Geraden $\alpha\beta'$ und $\alpha'\beta$ in einem Punkte μ. Die Gerade $\alpha\beta'$ liegt in der Ebene $B\alpha\beta'$ und die Gerade $\alpha'\beta$ in der Ebene $A\alpha'\beta$. Diese beiden Ebenen haben die Linie $\varkappa'\lambda$ gemeinschaftlich, in welcher der Punkt μ ebenfalls liegen mufs. Ebenso liegt μ in den Ebenen $A\alpha\beta'$ und $B\alpha'\beta$, also auch in deren Kante $\varkappa\lambda'$. Die fünf Punkte μ, $\varkappa$, $\varkappa'$, λ, λ' liegen also in einer Ebene, und die Geraden $\varkappa\lambda$ und $\varkappa'\lambda'$ gehören dieser selben Ebene an. Diese Ebene kann mit der Geraden AB nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben, und da D als Punkt von $\varkappa\lambda$ dieser Ebene angehört, mufs auch $\varkappa'\lambda'$ durch D hindurchgehen.

Nehmen wir jetzt an, der Punkt $\varkappa$ sei in der Ebene $AB\varkappa$ gewählt, und die Punkte α', β', λ seien in entsprechender Weise bestimmt. Wir fügen eine zweite Ebene hinzu und machen hierin die Konstruktion vermittelst der Punkte $\varkappa'$, α', β', λ'; dann müssen, weil die Ebenen $AB\varkappa$ und $AB\varkappa'$ verschieden sind, die Geraden $\varkappa\lambda$ und $\varkappa'\lambda'$ durch denselben Punkt von AB hindurchgehen; aus demselben Grunde müssen sich auch die Geraden $\varkappa'\lambda'$ und $\varkappa''\lambda$ auf AB schneiden, oder $\varkappa\,\lambda'$ geht ebenfalls durch den Punkt D.

b) Die vier Punkte A, B, C, D mit der gegenseitigen Lage, wie sie so eben erörtert ist, heifsen vier h a r m o n i s c h e P u n k t e,[20]) und zwar sagen wir, der Punkt D sei dem Punkte C in Bezug auf die Punkte A und B harmonisch zugeordnet. Um das angegebene Verfahren kurz zusammenzufassen, stellen wir den Satz auf:

Die Verbindungsgerade der Punkte, in denen sich die Gegenseiten eines gewöhnlichen Vierecks paarweise schneiden, wird durch ihre Schnittpunkte mit den beiden Diagonalen harmonisch geteilt.

In der That ist $\alpha\varkappa\beta\lambda$ ein gewöhnliches Viereck; das eine Paar von Gegenseiten, nämlich $\alpha\varkappa$ und $\beta\lambda$, hat in A, das andere, $\alpha\lambda$ und $\beta\varkappa$, in B seinen Schnittpunkt.

Wir können aber die Figur noch in anderer Weise auffassen. Die aus den vier Geraden $A\alpha\varkappa$, $A\lambda\beta$, $B\lambda\alpha$, $B\beta\varkappa$ gebildete Figur nennen wir ein vollständiges Vierseit, die vier Linien seine Seiten und die sechs Schnittpunkte von je zwei Seiten seine Eckpunkte. Dann liegt jedem Eckpunkte ein zweiter gegenüber, und die Verbindungslinie zweier solcher Eckpunkte heifst eine Diagonale. Dann ist AB eine Diagonale, und die Punkte C und D sind ihre Schnittpunkte mit den beiden andern Diagonalen. Daher können wir auch sagen:

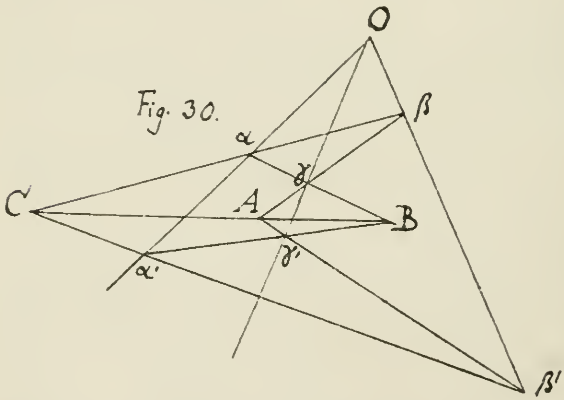
Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch ihre Schnittpunkte mit den beiden andern Diagonalen harmonisch geteilt.

c) Um tiefer auf die Theorie der harmonischen Teilung eingehen zu können, schicken wir die ersten Sätze über die perspektivische Lage von Gebilden voraus. Zwei Gebilde heifsen einander p e r s p e k t i v i s c h zugeordnet, wenn jedem Punkte des einen ein Punkt des andern entspricht und jedesmal die Verbindungslinie entsprechender Punkte durch einen festen Punkt, das Perspektions-Centrum, geht. Wir benutzen fast nur perspektivische Dreiecke und können sagen: Zwei Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ sind perspektivisch gelegen, wenn die drei geraden Linien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ durch denselben Punkt O gehen. Hierfür gilt der Satz:

Die entsprechenden Seiten zweier perspektivischen Dreiecke schneiden sich in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen.

Zum Beweise bezeichnen wir mit O den gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$; ferner mögen sich die Geraden $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$, bez. $\gamma\alpha$ und $\gamma'\alpha'$, bez. $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ in A bez. B bez. C schneiden.

Wenn die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ in zwei verschiedenen Ebenen liegen (Fig. 30), so befinden sich die Punkte A, B, C gleichzeitig in beiden Ebenen, also auch in ihrer Schnittlinie, mithin in derselben Geraden.



Wenn aber die Dreiecke in ein und derselben Ebene liegen, so ziehe man die Geraden α'O′, β'O′, γ'O′ nach einem Punkte O′, welcher der Ebene nicht angehört. Man wähle auf der Geraden OO′ beliebig einen Punkt O″ und ziehe die Geraden O″A, O″B, O″C. Die Geraden OA und OO″ bestimmen eine Ebene, in welcher die Geraden O′α' und O″α liegen; bei passender Wahl der Punkte O′ und O″ kann man bewirken, dafs O′α' und O″α sich in einem Punkte α'' schneiden. Entsprechend findet man durch den Schnitt von O″β und O′β' einen Punkt β'' und durch den Schnitt von O″γ und O′γ' einen Punkt γ''. Der Punkt A, in welchem sich $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ schneiden, gehört auch der Ebene O″$\beta\gamma$ und O′$\beta'\gamma'$, also auch der Geraden $\beta''\gamma''$ an; ebenso gehört B den Ebenen O″$\alpha\gamma$ und O′$\alpha'\gamma'$, also auch der

Geraden $\alpha\gamma$, und endlich der Punkt C den Geraden $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\beta'$ an; die Punkte A, B, C liegen also in der Schnittlinie der beiden Ebenen.

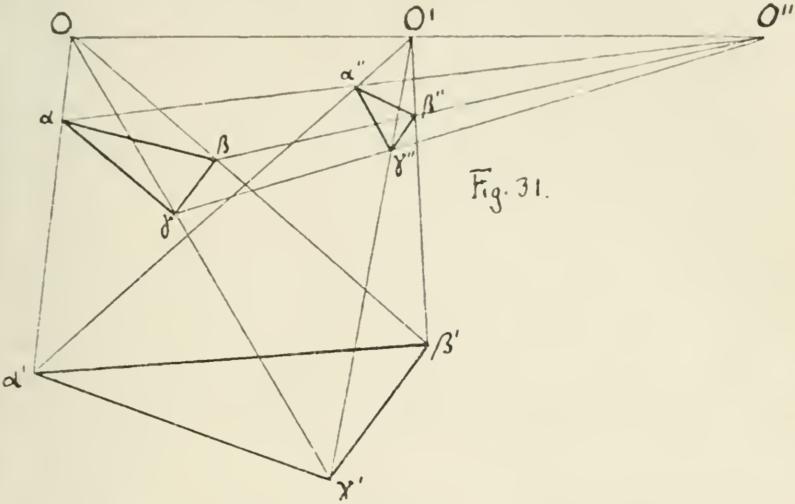


Fig. 31.

d) Wenn umgekehrt die drei Seiten eines Dreiecks sich je mit einer Seite eines zweiten in drei Punkten einer geraden Linie schneiden, so gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte durch denselben Punkt.

Beweis. — Nach der Voraussetzung gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der Dreiecke $\alpha\alpha'$B und $\beta\beta'$A, nämlich die Geraden $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ und BA durch denselben Punkt C; folglich müssen die Schnittpunkte von $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, von α'B und β'A, und von Bα und Aβ in gerader Linie liegen, oder die Gerade durch γ' und γ enthält auch den Schnittpunkt von $\alpha\alpha$ und $\beta\beta'$.

e) Hiernach läfst sich der Beweis des in a) aufgestellten Satzes, nämlich der Behauptung, dafs der Schnittpunkt von $\varkappa\lambda$ und $\varkappa'\lambda'$ auf AB liegt, auch in folgender Weise führen. Da sich $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ in C, $\beta\lambda$ und $\beta'\lambda'$ in A, $\alpha\lambda$ und $\alpha'\lambda'$ in B treffen und diese Punkte in gerader Linie liegen, so gehen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ und $\lambda\lambda'$ durch einen Punkt. Aus demselben Grunde gehen auch die drei Geraden $\alpha\alpha$, $\beta\beta'$ und $\varkappa\varkappa'$ durch einen Punkt. Folglich müssen auch die Dreiecke $\beta\varkappa\lambda$ und $\beta'\varkappa'\lambda'$ perspektivisch liegen, und infolge dessen mufs der Schnittpunkt von $\varkappa\lambda$ und $\varkappa'\lambda'$ derjenigen

Geraden angehören, welche die Schnittpunkte sowohl von $\beta\varkappa$ und $\beta'\varkappa'$, als auch von $\beta\lambda$ und $\beta'\lambda'$ enthält.

f) Die vier harmonischen Punkte A, B, C, D zerfallen in zwei Paare AB und CD; man darf die beiden Paare mit einander vertauschen und in jedem Paare die beiden Punkte. Wenn daher von den acht Anordnungen

ABCD, ABDC, BACD, BADC,
CDAB, CDBA, DCAB, DCBA

eine harmonisch ist, so sind es auch die übrigen, aber keine weitere Anordnung der vier Punkte.

In der Konstruktion, welche in a) angegeben ist, kommen die Punkte A und B ganz gleichmäfsig vor; sie können also mit einander vertauscht werden. Wäre man von den Punkten ABD ausgegangen, so hätte man C als vierten harmonischen Punkt erhalten; man ziehe nämlich von α die Geraden nach A und B, lege durch D die Gerade, welche Aα und Bα in $\varkappa$ und λ trifft; dann werden die Geraden Aλ und B$\varkappa$ sich in β schneiden und $\alpha\beta$ wird durch C gehen.

Um zu CDA den vierten harmonischen Punkt zu konstruieren, bezeichne man den Schnittpunkt von $\alpha\beta$ und $\varkappa\lambda$ mit ϱ und beachte, dafs die Seiten des Dreiecks DCϱ denen des Dreiecks $\beta\lambda$B

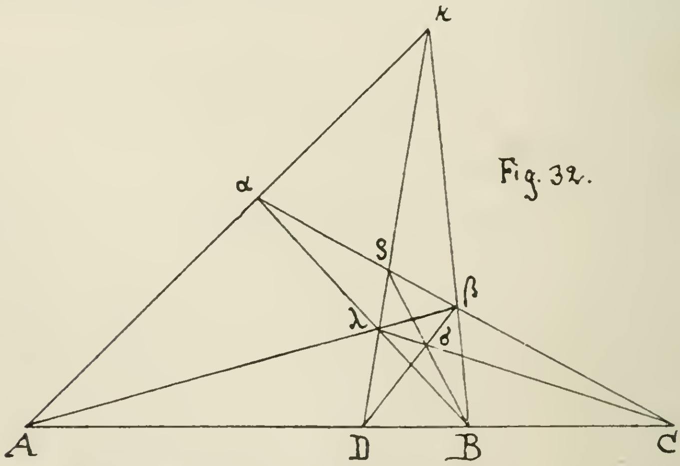


Fig. 32.

in drei Punkten einer geraden Linie begegnen, nämlich DC und $\beta\lambda$ in A, Cϱ und $\lambda\beta$ in α, ϱD und Bλ in $\varkappa$. Daher liegen die Dreiecke perspektivisch oder es schneiden sich die Linien Dβ,

$C\lambda$ und ϱB in einem Punkte o. Zur Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu DCA wähle man den Punkt ϱ, ziehe die Geraden $C\varrho$ und $D\varrho$, lege durch A die Gerade $A\beta\lambda$, ziehe $D\beta$ und $C\lambda$, welche sich in σ treffen. Da die Gerade $\varrho\sigma$ die CD in B trifft, ist B der vierte harmonische Punkt.

Durch Verbindung der drei Vertauschungen werden auch die übrigen Anordnungen erhalten, welche oben angegeben sind.

Dafs aber keine weitere Anordnung vier harmonische Punkte liefert, folgt schon daraus, dafs die Punkte des einen Paares durch die des andern getrennt werden müssen.

g) Um zu einer weiteren Definition von vier harmonischen Punkten zu gelangen, beachten wir, dafs die vier Punkte ABCD sowohl zu $\alpha\beta C\varrho$ als zu $\beta\alpha C\varrho$ perspektivisch liegen, wo ϱ den Schnittpunkt von $\alpha\beta$ und $\varkappa\lambda$ bezeichnet. Wir können also die Frage stellen: Welche Lage müssen vier Punkte A, B, C, D einer geraden Linie annehmen, damit sowohl ABCD wie BACD zu demselben Punktquadrupel $\varkappa\lambda\mu\nu$ einer zweiten geraden Linie perspektivisch liegen?

Zu dem Ende gehen wir etwa von den drei Punkten A, B, D aus und nehmen an, diesen drei Punkten liefse sich einmal das Tripel $\varkappa\lambda\nu$ und dann das Tripel $\lambda\varkappa\nu$ perspektivisch zuordnen. Ginge die Gerade $\varkappa\lambda\nu$ durch A hindurch, so müfste der Punkt A bei jedem Perspektionscentrum sich selbst zugeordnet sein. Da aber dem Punkte A einmal der Punkt $\varkappa$ und dann der Punkt λ zugeordnet ist, so darf die Gerade $\varkappa\lambda\nu$ nicht durch A, und aus demselben Grunde nicht durch B gehen. Wenn jetzt die Gerade $\varkappa\lambda\nu$ auch nicht durch D hindurchgeht, so müssen sich $A\varkappa$ und $B\lambda$ in einem Punkte σ, $A\lambda$ und $B\varkappa$ in einem Punkte ι schneiden. Dann gehen die Geraden σD und τD auch durch ν hindurch, oder die Punkte D und ν ergeben sich als Schnittpunkte mit $\sigma\iota$. Die Geraden σC und ιC müssen beide durch μ gehen, was nur möglich ist, wenn die beiden Punkte μ und C im Schnittpunkt der Geraden AB und $\varkappa\lambda$ zusammenfallen. Wir können also sagen:

Sollen denselben drei Punkten $\varkappa$, λ, μ einer Geraden sowohl die drei Punkte A, B, C als auch die Punkte B, A, C einer zweiten Geraden perspektivisch zugeordnet sein, so müssen sich die beiden Geraden entweder in C oder in dem ihm zugeordneten vierten harmonischen Punkte schneiden.

h) Die Gesamtheit der geraden Linien, welche durch einen Punkt gehen und in derselben Ebene liegen, bezeichnen wir als einen Strahlenbüschel. Ebenso sagen wir: Verschiedene Ebenen gehören einem Büschel an, wenn sie durch dieselbe gerade Linie hindurchgehen. Hiernach gelten die beiden Sätze:

Vier Strahlen, welche durch einen Punkt gehen und eine gerade Linie in vier harmonischen Punkten treffen, bestimmen auf jeder Geraden, welche von ihnen geschnitten wird, vier harmonische Punkte;

oder mit andern Worten:

Wenn vier Strahlen eines Büschels irgend eine Gerade in vier harmonischen Punkten schneiden, so liegen jedesmal die vier Punkte harmonisch, in denen die Strahlen von irgend einer andern Geraden geschnitten werden.

Ferner besteht der Satz:

Wenn vier Ebenen eines Büschels irgend eine Gerade in vier harmonischen Punkten schneiden, so liegen die vier Punkte, in denen eine beliebige andere Gerade von den vier Ebenen geschnitten wird, ebenfalls harmonisch.

Es genügt, den ersten der beiden Sätze zu beweisen. Dabei nehmen wir zunächst an, die beiden Geraden $ABCD$ und $\alpha\beta C\varrho$ hätten den Punkt C gemeinschaftlich. Der Scheitel des Büschels sei $\varkappa$ (Fig. 29) und λ sei in der bekannten Weise bestimmt. Die drei Diagonalen des in b) angegebenen vollständigen Vierseits sind AB, $\alpha\beta$ und $\varkappa\lambda$; jede wird durch den Schnitt mit den andern harmonisch geteilt, also auch $\alpha\beta$ durch AB und $\varkappa\lambda$.

Jetzt mögen die vier von einem Punkte O ausgehenden Strahlen die eine Gerade in A, B, C, D, die andere in A', B', C', D' treffen und die vier ersten mögen harmonisch liegen. Wenn etwa die Gerade AB' von den beiden Strahlen OC und OD geschnitten wird in C'' und D'', so sind nach dem bereits Bewiesenen A, B', C'', D'' und deshalb auch A', B', C', D' je vier harmonische Punkte. Ganz ähnlich läfst sich der Beweis stets liefern, indem man nötigenfalls noch weitere Schnittlinien einschiebt.

Demnach dürfen wir vier Strahlen oder Ebenen eines Büschels als harmonisch bezeichnen, wenn sie eine, und damit jede hindurchgelegte Gerade in vier harmonischen Punkten treffen.

§ 3.

Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden.

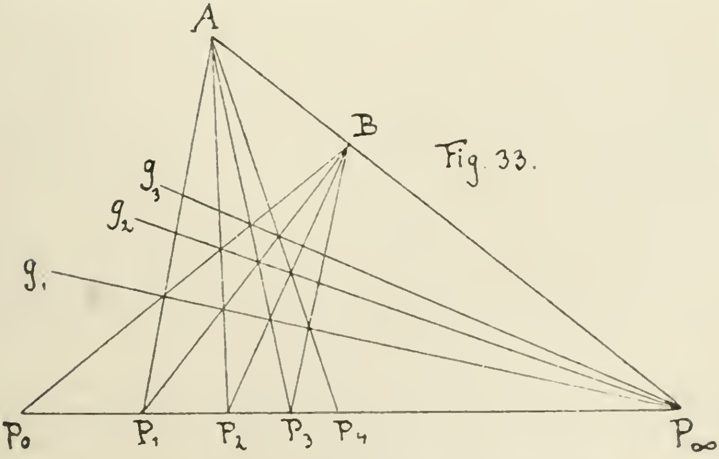
a) Wenn drei Punkte einer Geraden beliebig gewählt sind, so kann man jeder ganzen positiven Zahl einen und zwar nur einen Punkt der Geraden zuordnen. Die gegebenen Punkte bezeichnen wir als P_0, P_1, P_∞ und nehmen an, P_1 liege zwischen P_0 und P_∞. Dann suchen wir zu $P_\infty P_1 P_0$ den vierten harmonischen Punkt und bezeichnen ihn als P_2; ebenso bestimmen wir P_3 durch die Forderung, dafs $P_\infty P_2 P_1 P_3$ vier harmonische Punkte sind. Auf diese Weise kann man aber beliebig fortfahren und jeder ganzen positiven Zahl r einen Punkt P_r durch die Forderung zuordnen, dafs allgemein

$$P_\infty P_{r-1} P_{r-2} P_r,$$

wo r eine positive ganze Zahl ist, harmonisch liegen sollen.

Da P_1 zwischen P_0 und P_∞ angenommen ist, so liegt P_2 zwischen P_1 und P_∞, P_3 zwischen P_2 und P_∞, überhaupt P_r zwischen P_{r-1} und P_∞, oder die Punkte folgen in derselben Weise, wie die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

b) Diese Zuordnung[21]) von Zahlen und Punkten kann durch eine einfache und übersichtliche Konstruktion bewerkstelligt werden. Man lege durch P_∞ eine beliebige Gerade (Fig. 33) und nehme



auf ihr zwei Punkte A und B an. Nach dem Schnittpunkte von P_0B und P_1A ziehe man durch P_∞ eine Gerade g_1; deren Schnittpunkt mit P_1B verbinde man mit A, wodurch man zu P_2 gelangt; der Schnittpunkt von P_2B mit g_1 führt durch seine Verbindung mit A zu P_3 u. s. w. Um von P_ν zu $P_{\nu+1}$ zu gelangen, ziehe man $P_\nu B$ und lege durch ihren Schnittpunkt mit g_1 und A eine neue Gerade; ihr Schnittpunkt mit der gegebenen Geraden ist der Punkt $P_{\nu+1}$.

c) Da die ganze Zahl ν eine bestimmte Operation angiebt, durch welche der Punkt P_ν aus den Punkten P_∞, P_0, P_1 erhalten wird und da diese Operation von den gegebenen drei Punkten aus für ein gegebenes ν einen einzigen Punkt liefert, so soll sie das Doppelverhältnis der vier Punkte $P_\infty P_0 P_1 P_\nu$ (in dieser Folge) genannt und mit $(P_\infty P_0 P_1 P_\nu)$ bezeichnet werden. In diesem Sinne ist die symbolische Gleichung:

$$\nu = (P_\infty P_0 P_1 P_\nu)$$

zu verstehen, welche stets ein System von $\nu - 1$ analogen symbolischen Gleichungen von der Form

$$(P_\infty P_0 P_1 P_2) = 2,\ (P_\infty P_0 P_1 P_3) = 3 \ldots\ldots (P_\infty P_0 P_1 P_\nu) = \nu$$

vertritt, in denen P_2 den vierten harmonischen Punkt zu $P_\infty P_1 P_0$, P_3 den vierten harmonischen Punkt zu $P_\infty P_2 P_1$ u. s. w. bedeutet. Das Symbol ist dadurch gerechtfertigt, dafs man, um von den Punkten P_∞, P_0, P_1 zum Punkte P_ν zu gelangen, $(\nu - 1)$-mal nach der gegebenen Vorschrift den vierten harmonischen Punkt suchen mufs.

d) Wenn vier von einem Punkte ausgehende Strahlen von zwei Geraden durchschnitten werden und ihre Schnittpunkte auf der einen Geraden das Doppelverhältnis ν haben, so haben die entsprechenden Schnittpunkte auf der andern Geraden dasselbe Doppelverhältnis; demnach bezeichnen wir diese Zahl als das Doppelverhältnis der vier Strahlen.

Dieser Satz folgt unmittelbar daraus, dafs das Doppelverhältnis durch Konstruktion harmonischer Punkte bestimmt wird, letztere aber bei perspektivischer Zuordnung wieder in harmonische Punkte übergehen. In der That seien auf der einen Geraden die Punkte P_∞, P_0, P_1, P_ν so gegeben, dafs $(P_\infty P_0 P_1 P_\nu) = \nu$ ist. Von S mögen die vier Strahlen s_∞, s_0, s_1, s_ν nach diesen vier Punkten gehen und eine zweite Gerade in Q_∞, Q_0, Q_1, Q_ν treffen. Man füge die Punkte P_2, $P_3 \ldots P_{\nu-1}$ hinzu, so dafs

$$P_\infty P_1 P_0 P_2,\ P_\infty P_2 P_1 P_3 \ldots P_\infty P_{\nu-1} P_{\nu-2} P_\nu$$

jedesmal vier harmonische Punkte sind. Zieht man von S die Strahlen $s_2, s_3 \dots s_{\nu-1}$ nach $P_2, P_3 \dots P_{\nu-1}$ und bezeichnet deren Schnittpunkte mit der zweiten Geraden als $Q_2, Q_3 \dots Q_{\nu-1}$, so sind auch

$$Q_\infty Q_1 Q_0 Q_2,\ Q_\infty Q_2 Q_1 Q_3 \dots\dots Q_\infty Q_{\nu-1} Q_{\nu-2} Q_\nu$$

vier harmonische Punkte. Diese Eigenschaft sagt aber aus, dafs $(Q_\infty Q_0 Q_1 Q_\nu) = \nu$ ist.

e) Das Doppelverhältnis der vier Punkte P_∞, P_μ, $P_{\mu+1}$, $P_{\mu+\nu}$ ist gleich ν.

Wir können dies unmittelbar aus der obigen Figur ablesen. Gehen wir von den drei Punkten P_∞, P_μ, $P_{\mu+1}$ aus und suchen jedesmal den vierten harmonischen Punkt nach dem Schema

$$P_\infty P_{\mu+1} P_\mu P_{\mu+2},\ P_\infty P_{\mu+2} P_{\mu+1} P_{\mu+3} \dots\dots P_\infty P_{\mu+\nu-1} P_{\mu+\nu-2} P_{\mu+\nu},$$

so sagt diese Konstruktion, dafs $(P_\infty P_\mu P_{\mu+1} P_{\mu+\nu}) = \nu$ ist.

Man kann auch folgendermafsen schliefsen. Das Doppelverhältnis $(P_\infty P_\mu P_{\mu+1} P_{\mu+\nu})$ ist gleich dem Doppelverhältnis der von A aus nach diesen Punkten gezogenen Strahlen $a_\infty a_\mu a_{\mu+1} a_{\mu+\nu}$, also auch gleich dem Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit g_1. Diese vier Schnittpunkte werden aber von B aus durch vier Strahlen projiziert, welche die gegebene Gerade in den Punkten $P_\infty P_{\mu-1} P_\mu P_{\mu+\nu-1}$ treffen. Somit ist

$$(P_\infty P_\mu P_{\mu+1} P_{\mu+\nu}) = (P_\infty P_{\mu-1} P_\mu P_{\mu+\nu-1}) =$$
$$(P_\infty P_{\mu-2} P_{\mu-1},\ P_{\mu+\nu-2}) = \dots = (P_\infty P_0 P_1 P_\nu).$$

f) In der oben angegebenen Konstruktion möge jeder von A aus nach einem Punkte P_ν gezogene Strahl mit a_ν und ebenso der von B ausgehende Strahl, welcher den Punkt P_ν enthält, mit b_ν bezeichnet werden. Dann beruht das Wesen der Konstruktion darin, dafs sich die Geraden b_μ und $a_{\mu+1}$ jedesmal in der festen durch P_∞ gehenden Geraden g_1 schneiden. Allgemein schneiden sich die Geraden b_μ und $a_{\mu+\nu}$ in einer von P_∞ ausgehenden Geraden g_ν, und indem wir die gegebene Gerade als g_0, die Gerade AB als g_∞ bezeichnen, erhalten wir das Doppelverhältnis

$$(g_\infty g_0 g_1 g_\nu) = \nu.$$

Beim Beweise haben wir mehrmals den unter d) angegebenen Satz zu benutzen, welcher besagt, dafs das Doppelverhältnis von vier Punkten auch den vier Strahlen zukommt, welche von einem beliebigen fünften Punkte nach den vier Punkten gezogen werden, und dafs das Doppelverhältnis von vier Strahlen auch das der vier Punkte ist, in denen sie von einer beliebigen Geraden geschnitten werden. Im vorliegenden Falle ziehe man vom Punkte A aus die vier Strahlen a_∞, a_μ, $a_{\mu+1}$, $a_{\mu+\nu}$ nach den vier Punkten P_∞, P_μ, $P_{\mu+1}$, $P_{\mu+\nu}$; diese vier Strahlen durchschneide man durch die Gerade b_μ und ziehe nach den vier Schnittpunkten die Strahlen vom Punkte P_∞ aus. Nun wird die Gerade b_μ von a_∞ in B, von a_μ in P_μ geschnitten, während der Schnittpunkt von b_μ mit $a_{\mu+1}$ in g_1 liegt. Zieht man also von P_∞ die Gerade g_ν nach dem Schnittpunkt von b_μ mit $a_{\mu+\nu}$, so ist das Doppelverhältnis der vier Geraden g_∞, g_0, g_1, g_ν gleich ν. Da aber durch P_∞ nach fester Wahl von g_∞, g_0, g_1 nur eine einzige Gerade g_ν geht, für welche das Doppelverhältnis $(g_\infty g_0 g_1 g_\nu) = \nu$ ist, so gelangt man immer zu derselben Geraden g_ν, von welchem Punkte P_μ man auch ausgeht.

g) Das Doppelverhältnis der vier Punkte P_∞, P_0, P_α, $P_{\alpha\nu}$ ist gleich ν.

Um zu den drei Punkten P_∞, P_α, P_0 den vierten harmonischen Punkt zu konstruieren, benutzt man wieder die Punkte A und B, indem man die Geraden BP_0 und AP_α zieht, ihren Schnittpunkt durch eine Gerade g' mit P_∞ verbindet, darauf die neue Gerade BP_α zieht, ihren Schnittpunkt mit g' bestimmt und ihn von A aus auf die gegebene Gerade projiziert. Der auf diese Weise gefundene Punkt ist mit $P_{2\alpha}$ identisch, weil die Gerade g' dieselbe Linie ist, welche in f) mit g_α bezeichnet wurde. Um die Punkte $P_{3\alpha}$, $P_{4\alpha}$ ... $P_{\nu\alpha}$ unmittelbar zu erhalten, hat man in der unter b) angegebenen Konstruktion nur g_1 durch g_α zu ersetzen.

h) Faſst man die Sätze e) und g) zusammen, so folgt: $(P_\infty P_\alpha P_{\alpha+\mu} P_{\alpha+\mu\nu}) = \nu$, oder wenn α, β, γ und $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ ganze positive Zahlen sind, so ist:

$$(P_\infty P_\alpha P_\beta P_\gamma) = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Es ist vielleicht angebracht, diesen Satz auf den vorangehenden direkt zurückzuführen. Man projiziere die vier Punkte P_∞, P_α, P_β, P_γ von B aus auf g_1 und die vier hierdurch auf g_1 bestimmten Punkte von A aus auf g_0. Diese Konstruktion führt jeden Punkt P_ϱ in $P_{\varrho-1}$ über, und da hierbei die Doppelverhältnisse ungeändert bleiben, so ist $(P_\infty P_\alpha P_\beta P_\gamma) = (P_\infty P_{\alpha-1} P_{\beta-1} P_{\gamma-1})$, also auch, wie man durch Wiederholung des Verfahrens zeigt, gleich $(P_\infty P_0 P_{\beta-\alpha} P_{\gamma-\alpha})$. Für $\gamma - \alpha = \nu(\beta - \alpha)$ hat man also nur den unter g) bewiesenen Satz zu benutzen.

i) Um auch den negativen Zahlen Punkte auf der Geraden zuordnen zu können, beachte man den Weg, welcher von P_ν zu $P_{\nu-1}$ führt. Verbindet man die Punkte A und P_ν durch a_ν, zieht von B nach dem Schnittpunkt von a_ν und g_1 die Gerade, so wird diese Gerade die g_0 in $P_{\nu-1}$ treffen. Demnach wird man die Punkte A und P_0 durch die Gerade a_0 verbinden, nach dem Schnittpunkte von a_0 und g_1 von B aus eine Gerade ziehen und ihren Schnittpunkt mit g_0 als P_{-1} bezeichnen. Ebenso ziehe man von A die Gerade a_{-1} nach P_{-1}, bestimme ihren Schnittpunkt mit g_1 und ziehe nach ihm von B aus die Gerade b_{-2}, deren Schnittpunkt mit g_0 den Punkt P_{-2} liefert. Ist man unter Fortsetzung dieser Operation nach $P_{-\nu}$ gelangt, so ziehe man nach ihm von A die Gerade $a_{-\nu}$ und projiziere den Schnittpunkt von g_1 mit $a_{-\nu}$ von B aus durch die Gerade $b_{-\nu-1}$ auf g_0, wodurch man zu dem Punkte $P_{-\nu-1}$ gelangt.

Die symbolische Gleichung

$$-\nu = (P_\infty P_0 P_1 P_{-\nu})$$

vertritt also die ν Forderungen, dafs jedesmal die vier Punkte $P_\infty P_0 P_{-1} P_1$, $P_\infty P_{-1} P_{-2} P_0$, $P_\infty P_{-2} P_{-3} P_{-1} \ldots P_\infty P_{-\nu+1} P_{-\nu} P_{-\nu+2}$ harmonisch liegen sollen.

Diese Operation spiegelt geometrisch vollständig den Weg wieder, welcher algebraisch zu den negativen Zahlen führt. Demnach müssen die vorhin für positive Zahlen abgeleiteten Gesetze auch für negative Zahlen bestehen bleiben. Wir dürfen also auch annehmen, dafs von den vier in h) benutzten ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ einige negativ sind. Speziell folgt, dafs die vier Punkte P_∞, P_0, P_α, $P_{-\alpha}$ harmonisch liegen.

k) Wir haben die drei Punkte P_∞, P_0, P_1 in demjenigen Raumteile angenommen, auf dessen Untersuchung wir uns vorläufig durchaus beschränken. Dann liegt auch jeder Punkt, welcher irgend einer ganzen positiven Zahl entspricht, in demselben Raumteile. Wenn wir dagegen der Reihe nach die Punkte P_{-1}, $P_{-2} \ldots$

suchen, so werden wir über einen gewissen Wert: $-\alpha$ nicht hinausgehen können. Nun liegt aber ein gewisser Teil der Geraden über $P_{-\alpha}$ hinaus. Zu den Punkten dieses Teiles gelangt man auf folgende Weise: Man nimmt β recht grofs positiv an und bestimmt zu P_β den zugeordneten vierten harmonischen Punkt; ist β hinreichend grofs, so wird letzterer noch dem Bereich angehören. Die Schlufsbemerkung in i) verlangt, dafs dieser Punkt als $P_{-\beta}$ bezeichnet wird.

l) Um nach demselben Gesetze, das wir bisher für ganze Zahlen befolgt haben, auch den rationalen Zahlen, deren Nenner gleich zwei ist, Doppelverhältnisse zuordnen zu können, berücksichtigen wir, dafs nach g) die vier Punkte P_∞, P_α, P_0, $P_{2\alpha}$ harmonisch liegen, wofern α eine ganze Zahl ist. Demnach müssen auch für jede ganze Zahl β die vier Punkte P_∞, $P_{\frac{1}{2}\beta}$, P_0, P_β harmonische Punkte sein. Man erhält demnach den Punkt $P_{\frac{1}{2}}$, indem man zu P_0, P_1, P_∞ den vierten harmonischen Punkt konstruiert. Jetzt mufs der Punkt $P_{\frac{\nu}{2}}$ aus P_∞, P_0, $P_{\frac{1}{2}}$ in derselben Weise gefunden werden, wie der Punkt P_ν aus P_∞, P_0, P_1. Speziell mufs $P_{\frac{2}{2}}$ der vierte harmonische Punkt zu $P_\infty P_{\frac{1}{2}} P_0$ sein; da nach der Definition $P_\infty P_{\frac{1}{2}} P_0 P_1$ vier harmonische Punkte sind, so fällt $P_{\frac{2}{2}}$ mit P_1 zusammen. Nun zeigt sich, wie in g), dafs allgemein $P_{\frac{2\alpha}{2}}$ mit P_α zusammenfällt.

m) Zu den weiteren Brüchen, deren Nenner eine Potenz von zwei ist, gelangt man in entsprechender Weise durch die Festsetzung, dafs

$$P_0 P_{\frac{1}{2}} P_\infty P_{\frac{1}{4}},\ P_0 P_{\frac{1}{4}} P_\infty P_{\frac{1}{8}} \ldots\ldots P_0 P_{2^{-\alpha}} P_\infty P_{2^{-\alpha-1}}$$

harmonisch liegen sollen. Ist nun $\mu = 2^\alpha$, so findet man die Punkte $P_{\frac{\nu}{\mu}}$ bei ganzzahligem ν ganz entsprechend der Art und Weise, wie wir den ganzen Zahlen Punkte zugeordnet haben; es sollen nämlich jedesmal die vier Punkte

$$P_\infty P_{\frac{1}{\mu}} P_0 P_{\frac{2}{\mu}},\ P_\infty P_{\frac{2}{\mu}} P_{\frac{1}{\mu}} P_{\frac{3}{\mu}} \ldots\ldots P_\infty P_{\frac{\nu-1}{\mu}} P_{\frac{\nu-2}{\mu}} P_{\frac{\nu}{\mu}}$$

harmonische Punkte sein. Wenn a irgend eine solche Zahl $a = \frac{\nu}{\mu}$ für $\mu = 2^\alpha$ ist, so soll a als das Doppelverhältnis der Punkte $P_\infty P_0 P_1 P_a$ bezeichnet werden.

Gerade wie in g) für ganze Zahlen ist auch hier für $\mu = 2^\alpha$ $(P_\infty\, P_0\, P_{\frac{\varrho}{\mu}} P_{\frac{\varrho\sigma}{\mu}}) = \sigma$ und da der Punkt $P_{\frac{2}{2\mu}}$ mit $P_{\frac{1}{\mu}}$ zusammenfällt, müssen stets zwei Punkte identisch sein, für welche die Marken $\frac{\alpha}{2^\nu}$ und $\frac{\alpha \cdot 2^\varrho}{2^{\nu+\varrho}}$ gleich sind.

n) Im vorangehenden Teile sind wir zu allen rationalen Zahlen gelangt, deren Nenner eine Potenz von zwei ist. Ist σ irgend eine andere Zahl, so kann man immer zu jeder Zahl μ eine ganze Zahl G_μ so zuordnen, dafs ist:

$$\frac{G_\mu}{2^\mu} < \sigma < \frac{G_\mu + 1}{2^\mu}.$$

Wenn umgekehrt zu jedem μ ein G_μ zugeordnet ist, und zugleich immer die Beziehung besteht:
$G_{2\mu} = 2G_\mu + h_\mu$, wo h_μ gleich 0 oder 1 ist, so ist σ durch die Reihe:

$$\sigma = G_0 + \frac{h_0}{2} + \frac{h_1}{4} + \frac{h_2}{8} + \dots$$

eindeutig bestimmt. Jetzt soll der zu σ zugeordnete Punkt für jedes μ zwischen den zu $\frac{G_\mu}{2^\mu}$ und $\frac{G_\mu+1}{2^\mu}$ zugeordneten Punkten liegen. Dadurch wird die Strecke, auf welcher P_σ liegen soll, immer mehr eingeschränkt, und die unbegrenzte Fortsetzung des Prozesses für jeden ganzzahligen Wert von μ führt uns zu einem einzigen Punkte.

Im andern Falle würde nämlich die Lage des Punktes nur auf eine gewisse Strecke eingeschränkt, und das käme, wie man mit Hülfe des Satzes h) zeigt, darauf hinaus, dafs es eine Strecke P_0M gäbe, die einen Teil von P_0P_1 bildet und in der kein Punkt P_τ für $\frac{1}{\tau} = 2^\mu$ bei beliebig grofsem Werte von μ liegt, während man durch die angegebene Operation zwischen die Punkte M und N gelangt, wofern N nur auf der Strecke MP_1 angenommen wird. Man bestimme N durch die Forderung, dafs die Punkte P_0, N, M, P_∞ harmonisch liegen. Da N zwischen M und P_∞ liegt, so giebt es sicherlich einen Punkt P_τ für $\tau = 2^{-\mu}$, welcher zwischen M und N liegt. Bestimmen wir jetzt den vierten harmonischen Punkt zu P_0, P_r, P_∞, so mufs er zwischen P_0 und M liegen. Diesem Punkte haben wir aber die Marke $2^{-\mu-1}$ beizulegen, so dafs die obige Annahme als unmöglich erwiesen ist.

Als Beispiel betrachte ich die Reihe:

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{5}{16},\ \tfrac{21}{64},\ \tfrac{85}{256},\ \tfrac{341}{1024}\ \cdots\cdots$$

Nehme ich einen dieser Brüche gleich μ und suche ich den Punkt $P_{3\mu}$ durch die Festsetzung, dafs $P_\infty P_\mu P_0 P_{2\mu}$, $P_\infty P_{2\mu} P_\mu P_{3\mu}$ harmonische Punkte sind, so erhalte ich für $P_{3\mu}$ der Reihe nach Punkte mit den Marken

$$\tfrac{3}{4},\ \tfrac{15}{16},\ \tfrac{63}{64},\ \tfrac{255}{256},\ \tfrac{1023}{1024}\ \cdots\cdots$$

Dieser Punkt kann an P_1 unbegrenzt nahe gebracht werden; folglich habe ich auch den durch die erste Reihe definierten Punkt mit der Marke $\frac{1}{3}$ zu versehen.

Noch deutlicher übersieht man dies, wenn man den gesuchten Punkt zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten einschliefst, deren Marken sind:

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{8},\ \tfrac{5}{16},\ \tfrac{11}{32},\ \tfrac{21}{64},\ \tfrac{43}{128},\ \tfrac{85}{256}\ \cdots\cdots$$

o) Will man sich nicht auf die blofse Aufsuchung von vierten harmonischen Punkten beschränken, so kann man den Punkt $P_{\frac{1}{\mu}}$ auch durch die Forderung

$$(P_\infty P_0 P_{\frac{1}{\mu}} P_1) = (P_\infty P_0 P_1 P_\mu)$$

definieren. Auch jetzt kann man den Punkt $P_{\frac{1}{\mu}}$ durch blofses Ziehen von geraden Linien finden. Wir ordnen die Punkte der Geraden g_0 denen einer zweiten und diese denen einer dritten und die der letzten wiederum den Punkten von g_0 perspektivisch zu und richten die Zuordnung so ein, dafs P_∞ und P_0 sich selbst entsprechen, dafs aber dem P_μ der Punkt P_1 entspricht; dann mufs dem Punkte P_1 der Punkt $P_{\frac{1}{\mu}}$ entsprechen. Wie die Zeichnung zu machen ist, findet man in jedem Lehrbuch der neueren synthetischen Geometrie. Dafs alle früheren Gesetze bestehen bleiben, braucht nicht näher bewiesen zu werden.

p) Ein Doppelverhältnis geht in seinen reziproken Wert über, wenn man entweder den ersten und zweiten oder den dritten und vierten Punkt mit einander vertauscht.

Wofern dieser Satz richtig ist, mufs das Doppelverhältnis ungeändert bleiben, wenn man sowohl den ersten und zweiten als auch den dritten und vierten Punkt mit einander vertauscht. Dies läfst sich sehr leicht zeigen. Sind A, B, C, D vier Punkte einer Geraden, so wähle man einen Punkt M beliebig, ziehe die Geraden MA, MB, MC und lege durch D eine neue Gerade, welche die drei von M ausgehenden Strahlen in E, F, G treffe, während der Schnittpunkt von AF und MC mit N bezeichnet werden möge; dann ist:

$$(ABCD) = (EFGD) = (MNGC) = (BADC),$$

da das erste Quadrupel von M aus auf das zweite, dies von A aus auf das dritte und dies endlich von F aus auf das vierte projiziert wird.

Sind α und β irgend zwei Zahlwerte, so ist das Doppelverhältnis $(P_\infty P_0 P_\alpha P_\beta) = \frac{\beta}{\alpha}$, weil der Satz in g) für beliebige Zahlen bestehen bleibt. Aus demselben Grunde ist $(P_\infty P_0 P_\beta P_\alpha) = \frac{\alpha}{\beta}$, wodurch der Satz für die Vertauschung des dritten und vierten Punktes erwiesen ist. Nun ist

$$\frac{\alpha}{\beta} = (P_\infty P_0 P_\beta P_\alpha) = (P_0 P_\infty P_\alpha P_\beta),$$

weil die Punkte eines jeden Paares vertauscht sind, also

$$(P_0 P_\infty P_\alpha P_\beta) = \frac{1}{(P_\infty P_0 P_\alpha P_\beta)}.$$

q) Wenn vier Punkte bei beliebiger Wahl der Punkte P_∞ und P_1 die Marken 0, β, γ, δ erhalten haben, so ist ihr Doppelverhältnis

$$(P_0 P_\beta P_\gamma P_\delta) = \frac{\gamma}{\delta} : \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}.$$

Indem wir von den Punkten P_∞, P_1, P_0 ausgegangen sind, haben wir jedem Punkte P der Geraden eine Zahl zugeordnet, nämlich den Wert des Doppelverhältnisses $(P_\infty P_0 P_1 P)$. Vertausche ich aber P_0 und P_∞ und behalte P_1 bei, so geht jedes Doppelverhältnis in seinen reziproken Wert über; es ist also jetzt dem Punkte P_β die Zahl $\frac{1}{\beta}$, dem Punkte P_γ die Zahl $\frac{1}{\gamma}$ und dem

Punkte P_δ die Zahl $\frac{1}{\delta}$ zuzuordnen. Nun hat nach h) das Doppelverhältnis $(Q_\infty Q_\varkappa Q_\lambda Q_\mu)$ den Wert $\frac{\mu - \varkappa}{\lambda - \varkappa}$, wofern $(Q_\infty Q_0 Q_1 Q_\varkappa) = \varkappa$, $(Q_\infty Q_0 Q_1 Q_\lambda) = \lambda$, $(Q_\infty Q_0 Q_1 Q_\mu) = \mu$ ist. Ersetze ich hier Q_∞, Q_0, Q_1, $Q_\varkappa$, Q_λ, Q_μ der Reihe nach durch P_0, P_∞, P_1, P_β, P_γ, P_δ, so wird $\varkappa = \frac{1}{\beta}$, $\lambda = \frac{1}{\gamma}$, $\mu = \frac{1}{\delta}$; folglich ist

$$(P_0 P_\beta P_\gamma P_\delta) = \frac{\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\beta - \delta}{\beta - \gamma} = \frac{\gamma}{\delta} : \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}.$$

r) Wenn vier Punkte die Marken α, β, γ, δ erhalten, so ist ihr Doppelverhältnis

$$(P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\delta) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} : \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}.$$

Ersetzt man P_0 durch P_α, so hat man β, γ, δ zu ersetzen resp. durch $\beta - \alpha$, $\gamma - \alpha$, $\delta - \alpha$. Nimmt man diese Werte statt der in q) gewählten, so erhält man die angegebene Formel.

Hiernach ist der Name Doppelverhältnis auch vom projektiven Standpunkte aus gerechtfertigt.

Zusatz.[22]) Ordnen wir auf der Geraden je zwei Punkte einander zu, welche zu P_∞ und P_α harmonisch liegen, oder mit andern Worten, ordnen wir für jeden Wert von ϱ die Punkte $P_{\alpha+\varrho}$ und $P_{\alpha-\varrho}$ einander zu, so wird hierdurch eine Involution bestimmt. Kennt man den Punkt P_∞ und ein Paar P_μ und P_ν einander entsprechender Punkte (für $\mu + \nu = 2\alpha$), so ist es möglich, zu jedem Punkte den zugeordneten zu finden, und zwar wird dem Punkte P_0 der Punkt $P_{\mu+\nu}$ entsprechen. Diese Bemerkung kommt auf die Erklärung der Staudtschen Addition von Würfen hinaus. Staudt bezeichnet die Zusammenstellung von vier Elementen ABCD als Wurf. Jedem Wurf ABCD ordnen wir das Doppelverhältnis (CABD) zu. Sind zwei Würfe $ABCD_1$ und $ABCD_2$ gegeben, so bezeichnet Staudt den Wurf ABCS als deren Summe, wenn die Punktpaare CC, D_1D_2 und AS einer Involution angehören. Ersetzen wir C durch P_∞, A durch P_0, B durch P_1, D_1 durch P_μ und D_2 durch P_μ, so haben wir nach dem Obigen S durch $P_{\mu+\nu}$ zu ersetzen. Somit ist ein Wurf ABCS die Summe zweier Würfe $ABCD_1$ und $ABCD_2$, wenn das Doppelverhältnis (CABS) gleich der Summe der Doppelverhältnisse $(CABD_1)$ und $(CABD_2)$ ist.

Ordnen wir je zwei Punkte P_α und P_β einander zu, für welche das Produkt $\alpha\beta$ einen konstanten Wert hat, so erhalten wir auf der Geraden wieder eine Involution. Demnach bilden die drei Punktepaare $P_\infty P_0$, $P_\mu P_\nu$, $P_1 P_{\mu\nu}$ eine Involution. Will man also den Punkt $P_{\mu\nu}$ finden, so kann man in der Involution, welche durch die beiden ersten Punktepaare bestimmt ist, zu P_1 den zugeordneten Punkt suchen. Entsprechend bezeichnet Staudt den Wurf ABCP als Produkt der Würfe $ABCD_1$ und $ABCD_2$, wenn die drei Paare CA, D_1D_2, BP einer Involution angehören. Demnach ist ein Wurf ABCP das Produkt der Würfe $ABCD_1$ und $ABCD_2$, wenn das Doppelverhältnis (CABP) gleich dem Produkt der Doppelverhältnisse $(CABD_1)$ und $(CABD_2)$ ist.

§ 4.

Über den synthetischen Aufbau der projektiven Geometrie.

Indem Staudt die Punkte einer Geraden, sowie die Geraden und Ebenen eines Büschels unter dem Namen einstufiger Gebilde zusammenfafst, stellt er als Bedingung für die projektive Zuordnung solcher Gebilde die Forderung auf, dafs irgend vier harmonische Gebilde des einen jedesmal harmonischen Elementen des andern entsprechen. Dadurch ist man imstande, die Entwicklungen des vorigen Paragraphen zu entbehren und den weiteren Aufbau direkt an den zweiten Paragraphen anzuschliefsen. Nur der Nachweis, dafs man, ausgehend von irgend drei Elementen durch fortgesetzte Konstruktion vierter harmonischer Elemente jedem Elemente beliebig nahe kommen kann, erfordert noch gewisse weitere Untersuchungen. Diese werden überflüssig, wenn man die Entwicklungen des § 3 voraussetzt, der ja auch mit Ausnahme der (überhaupt entbehrlichen) Bemerkung in o) nur die Konstruktion harmonischer Punkte von drei gegebenen Punkten aus benutzt und somit seinem Wesen nach nur für die Reihenfolge der Operationen bestimmte Regeln aufstellt.

Der vorige Paragraph gestattet uns aber, die projektive Geometrie auch in der Steinerschen Weise aufzubauen. Zwar benutzt

Steiner gewisse metrische Beziehungen; aber da es sich stets um Doppelverhältnisse handelt, so darf die im vorigen § angegebene Zuordnung von Punkten und Zahlen zu Grunde gelegt werden. Wo also bei Steiner eine Länge AB benutzt wird, hat man sie durch die Differenz der den Punkten A und B zugeordneten Zahlwerte zu ersetzen. Dabei wird es zuweilen notwendig, den als P_∞ bezeichneten Punkt hinzuzunehmen, der bei Steiner als »unendlich ferner« Punkt aufser Betracht kommt. Wir können daher sagen, zwei einstufige Gebilde seien projektivisch auf einander bezogen, wenn für irgend zwei einander entsprechende Quadrupel die Doppelverhältnisse gleich sind.

Die Kegelschnitte als Kurven zweiter Ordnung werden durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in zwei projektivisch zu einander bezogenen Strahlbüscheln erhalten. Hierdurch gelangt man jedoch nur zu den reellen Kegelschnitten. Um auch die imaginären Kurven zweiter Ordnung zu erhalten, beziehe man die Punkte und Geraden einer Ebene reziprok zu einander, d. h. so, dafs jedesmal, wenn ein Punkt auf einer Geraden liegt, auch der dem Punkte zugeordnete Strahl durch den der Geraden entsprechenden Punkt geht. Um eine derartige Zuordnung zu bestimmen, gehe man von einem Dreieck aus und ordne jedem Eckpunkte die gegenüberliegende Seite zu; aufserdem ordne man einem beliebigen Punkte der Ebene eine Gerade zu. Dann sind wir imstande, jedem Punkte der Ebene einen Strahl und umgekehrt zuzuordnen. Wir erhalten ein ebenes Polarsystem und fragen nach der Gesamtheit derjenigen Punkte, welche auf den zugeordneten Strahlen liegen. Hierdurch gelangen wir wieder zu den Kegelschnitten und zwar nicht blofs zu den reellen, sondern auch zu den imaginären.

In ähnlicher Weise können wir die Flächen zweiter Ordnung definieren, entweder durch den Schnitt der Strahlen eines Strahlbündels mit den Ebenen eines reziproken Ebenenbündels, oder vermittelst eines räumlichen Polarsystems. Sobald man aber die Kurven und Flächen zweiter Ordnung kennt, kann man auch rein projektivisch zu der euklidischen und den nicht-euklidischen Raumformen gelangen. Wir müssen es uns jedoch versagen, diese Andeutungen weiter auszuführen; denn wir erachten es für notwendig, für jede Raumform das Formelsystem aufzustellen, von welchem aus sich die gesamte Geometrie vermittelst rein analytischer Umformungen gewinnen läfst. Zu dem Ende müssen wir aber zunächst die Formeln für die projektive Geometrie herleiten.

§ 5.

Die Koordinaten in der Ebene.

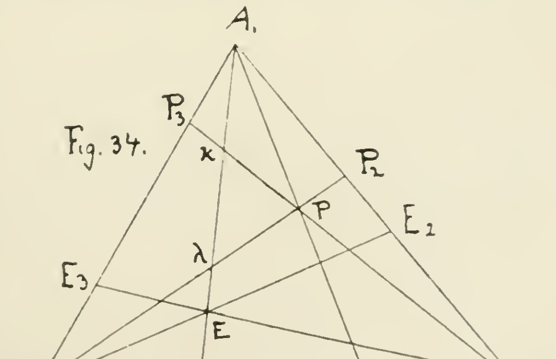
Um die Lage eines Punktes in einer Ebene durch Zahlen zu bestimmen, gehen wir von einem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und einem Punkte E aus, welcher auf keiner der drei Geraden $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ liegt. Von den Eckpunkten ziehen wir gerade Linien zum Punkte E und zu dem zu bestimmenden Punkte P; diese mögen die jedesmal gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in den Punkten E_1, E_2, E_3 und P_1, P_2, P_3 treffen, wobei E_1 in den Geraden $A_2 A_3$ und $A_1 E$ liegen soll u. s. w.*) Jetzt setze ich:

$$(1)\quad (A_2 A_1 E_3 P_3) = x, \quad (A_3 A_1 E_2 P_2) = y,$$

und nenne x und y die Koordinaten[23]) des Punktes P.

Hiernach sind auf den beiden vom Punkte A_1 ausgehenden Dreiecksseiten je vier Punkte bestimmt, und das Doppelverhältnis stellt eine Koordinate dar. Wir wollen untersuchen, in welcher Beziehung das auf der dritten Seite durch die Punkte E_1 und P_1 bestimmte Doppelverhältnis zu den Werten x und y steht.

Fig. 34.



Zu dem Ende denken wir jedem Punkte der Geraden $A_1 E_1$ nach der in § 3 gelehrten Methode eine Zahl zugeordnet, wobei die Wahl der Grundpunkte ganz willkürlich ist. Sind hiernach den Punkten Q und R

*) Die Einführung dieser Punkte geschieht hauptsächlich, um die im folgenden zu benutzenden Doppelverhältnisse möglichst einfach schreiben zu können. In anderer Beziehung wäre es vielleicht besser, die Doppelverhältnisse der von A_3 resp. A_2 ausgehenden Strahlen als Koordinaten zu wählen.

auf dieser Geraden die Zahlen α und β zugeordnet, so möge die Differenz $\alpha - \beta$ der Kürze wegen durch QR bezeichnet werden. Die Gerade A_1E_1 möge von A_3P in $\varkappa$ und von A_2P in λ geschnitten werden. Dann ist:

$$x = (A_2A_1E_3P_3) = (E_1A_1E\varkappa) = \frac{E_1E}{EA_1} : \frac{E_1\varkappa}{\varkappa A_1},$$

$$y = (A_3A_1E_2P_2) = (E_1A_1E\lambda) = \frac{E_1E}{EA_1} : \frac{E_1\lambda}{\lambda A_1}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{E_1\lambda}{\lambda A_1} : \frac{E_1\varkappa}{\varkappa A_1} = (E_1A_1\lambda\varkappa).$$

Dies Doppelverhältnis ist aber, wie man durch Projektion von A_2 aus erkennt, gleich $(A_3P_3P\varkappa)$, und dies, wie die Projektion von A_1 aus zeigt, gleich $(A_3A_2P_1E_1)$.

Demnach folgt unter Berücksichtigung von § 3, p):

$$(2)\quad \frac{x}{y} = (A_2A_3E_1P_1).$$

Jetzt können wir für jede gerade Linie, welche durch einen der drei Eckpunkte des Koordinaten-Dreiecks geht, die Gleichung aufstellen. Wählen wir P beliebig in der Geraden A_3P_3, so ändert sich das Doppelverhältnis $(A_2A_1E_3P_3)$ nicht; somit stellt die Gleichung:

$$x = \text{const.}$$

eine durch A_3 gehende Gerade dar. Ebenso wird für jede Gerade, welche durch A_2 geht, y ungeändert bleiben, oder $y = \text{const.}$ sein. Endlich wird, wenn P in der Geraden A_1P_1 beliebig verschoben wird, das Doppelverhältnis $(A_2A_3E_1P_1)$ ungeändert bleiben, oder die Gleichung: $x = \mu y$ stellt bei konstantem Werte von μ eine durch A_1 gehende Gerade dar.

Um die Gleichung einer beliebigen andern Geraden zu finden ändere ich das Koordinatensystem um. Zunächst bemerke ich, daſs eine andere Wahl des Punktes E keinen weiteren Erfolg hat, als daſs die Punkte E_1, E_2, E_3 auf den Seiten andere Lagen erhalten und daſs demnach hierbei x und y (nach § 3 g) nur mit konstanten Faktoren multipliziert werden. Wir werden daher diese Änderung im folgenden nicht weiter erwähnen, und möchten nur darauf hinweisen, daſs eine Änderung in der Wahl des Punktes

E dann notwendig wird, wenn eine Seite des neuen Koordinatendreiecks durch den Punkt E geht.

Jetzt behalte ich die Punkte A_2 und A_3 bei, ersetze aber A_1 durch einen Punkt A_1', welcher auf der Geraden $A_1 A_2$ liegt und für den das Doppelverhältnis $(A_2 A_1 E A_1') = a$ ist. Da y das Doppelverhältnis der vier Strahlen darstellt, welche von A_2 aus nach den Punkten A_3, A_1, E, P gezogen werden und diese Strahlen bei der neuen Wahl von A_1' ungeändert bleiben, so wird $y' = y$ sein. Dagegen wird man die Koordinate x durch $x' = (A_2 A_1' EP)$ zu ersetzen haben; der Wert dieses Doppelverhältnisses ist aber gleich $\frac{x-a}{1-a}$, wie sich aus § 3 h) ergiebt, indem man die dort benutzten Zahlen α, β, γ der Reihe nach durch a, 1, x ersetzt. Hierbei mufs, wie wir schon bemerkt haben, vermieden werden, dafs E_3 in die Gerade $A_1' A_3$ fällt. Wir können aber E_3 durch einen Punkt E_3' ersetzen und diesen so wählen, dafs der angegebene Wert von x' mit $1-a$ multipliziert wird; alsdann tritt an die Stelle von x der Wert $x-a$. Es kommt dies darauf hinaus, den Punkt E_3 durch den Punkt E_3' mit der Zahl $a+1$ zu ersetzen, so dafs man unmittelbar den Satz § 3, e) anwenden darf. Nimmt man jetzt E als Schnittpunkt der Geraden $A_2 E_2$ und $A_3 E_3'$, so bleibt x ungeändert und es wird $x' = x - a$.

Von A_1' lasse man irgend eine gerade Linie ausgehen. Ihre Gleichung in den neuen Koordinaten wird sein: $x' = \mu y'$ oder, indem man zu den frühern Koordinaten zurückkehrt: $x - a = \mu y$.

Um uns in den Stand zu setzen, auch den übrigen Eckpunkten des Koordinatendreiecks eine andere Lage zu geben, müssen wir die bevorzugte Stellung aufheben, welche der Punkt A_1 besitzt. Zu dem Ende beachten wir, dafs das gegebene Dreieck unter Beibehaltung des Punktes E noch zu zwei weiteren Koordinatensystemen führt, da wir den Punkt A_1 durch jeden der beiden andern Eckpunkte ersetzen können. So können wir den Punkt P auch durch die beiden Doppelverhältnisse $(A_1 B_2 E_3 P_3)$ und $(A_3 A_2 E_1 P_1)$ bestimmen und setzen:

$$(3)\quad x_1 = (A_1 A_2 E_3 P_3),\ y_1 = (A_3 A_2 E_1 P_1).$$

Endlich können wir noch nehmen:

$$(4)\quad x_2 = (A_2 A_3 E_1 P_1),\ y_2 = (A_1 A_3 E_2 P_2).$$

Die neuen Koordinaten stehen aber zu den früheren in einer sehr einfachen Beziehung. Vergleichen wir die Definitionen (3) und (4) mit den in (1) aufgestellten, nehmen die Gleichung (2) hinzu und beachten, daſs nach § 3, p) jedes Doppelverhältnis bei Vertauschung der beiden ersten Elemente seinen reziproken Wert erhält, so folgen die Beziehungen:

$$(5)\quad x_1 = \frac{1}{x},\ y_1 = \frac{y}{x},\ x_2 = \frac{x}{y},\ y_2 = \frac{1}{y}.$$

Hiernach ist es leicht, das Koordinatendreieck ganz beliebig umzuändern. Indem wir die Punkte A_2 und A_3 ungeändert lassen und A_1 durch einen Punkt A_1' auf A_1A_2 ersetzen, dann noch E durch einen passenden andern Punkt ersetzen, bleibt, wie wir gesehen haben, y ungeändert, während x in $x - a$ übergeht. Wählen wir jetzt $A_1{}^0$ in der Geraden A_3A_1', so wird y in $y - b$ übergehen, während die andere Koordinate ungeändert bleibt. Indem wir also die Punkte A_2 und A_3 beibehalten, aber A_1 durch einen andern Punkt $A_1{}^0$ der Ebene ersetzen, erhalten wir neue Koordinaten x', y', welche aus den früheren durch die Gleichungen erhalten werden:

$$(6)\quad x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Mit diesen Koordinaten (x', y') stehen aber wieder neue (x_1', y_1') in Verbindung durch die Beziehung:

$$x_1' = \frac{1}{x'},\ y_1' = \frac{y'}{x'}.$$

Von diesen gehen wir jetzt aus und ersetzen den bei ihnen bevorzugten Punkt A_2 durch einen anderen Punkt $A_2{}^0$ der Ebene; die neuen Koordinaten nennen wir x_1'', y_1'' und finden in ganz entsprechender Weise:

$$x_1'' = x_1' + c,\ y_1'' = y_1' + d.$$

Nun bevorzugen wir aber wieder den Punkt $A_1{}^0$ und nennen die so erhaltenen Koordinaten x'', y'', wodurch wir die Beziehungen erhalten:

$$x_1'' = \frac{1}{x''},\ y_1'' = \frac{y''}{x''}.$$

Daraus folgt:

$$(7)\quad \frac{1}{x''} = \frac{1}{x'} + c,\ \frac{y''}{x''} = \frac{y'}{x'} + d.$$

Man kann aber auch in dem Koordinaten-Dreieck $A_1{}^0 A_2{}^0 A_3$ den Punkt A_3 bevorzugen und entsprechend den beiden letzten Gleichungen (5) setzen:

$$x_2 = \frac{x}{y}, \; y_2 = \frac{1}{y}.$$

Behalten wir die Punkte $A_1{}^0$ und $A_2{}^0$ bei, ersetzen aber A_3 durch einen Punkt $A_3{}^0$ und bezeichnen die neuen Koordinaten durch (x_2''', y_2'''), so folgt:

$$x_2''' = x_2'' + e, \; y_2''' = x_2'' + f,$$

oder, indem wir wieder den Punkt $A_1{}^0$ bevorzugen und die neuen Koordinaten x''', y''' nennen:

$$(8) \quad \frac{x'''}{y'''} = \frac{x''}{y''} + e, \; \frac{1}{y'''} = \frac{1}{y''} + f.$$

Die Gleichungen (6), (7), (8) gestatten, die Koordinaten $x''' = X$, $y''' = Y$ durch x, y auszudrücken. Es ergiebt sich unmittelbar:

$$Y = \frac{y''}{1 + fg''}, \; X = \frac{x'' + ey''}{1 + fg''}, \; x'' = \frac{x'}{1 + cx'}, \; y'' = \frac{y' + dx'}{1 + cx'},$$

und indem wir diese Werte der Reihe nach einsetzen und endlich noch (6) hinzunehmen, folgt:

$$(9) \quad X = \frac{\varkappa' x + \lambda' y + \mu'}{\varkappa x + \lambda y + \mu}, \; Y = \frac{\varkappa'' x + \lambda'' y + \mu''}{\varkappa x + \lambda y + \mu},$$

wo $\varkappa$, λ, μ, $\varkappa_1{}'$ . . ., k . . . konstante Gröfsen bedeuten.

Die Form (6) wurde allerdings nur bei der speziellen Wahl der neuen Punkte E erhalten; hätten wir beliebige andere Punkte genommen, so mufsten wir nur gewisse konstante Faktoren hinzunehmen. Das würde aber an dem Endresultat keine Änderung hervorrufen. Auch kann man jetzt aus X, Y neue Koordinaten wieder durch gebrochene lineare Funktionen X′, Y′ von X, Y herleiten, wo ebenfalls der Nenner derselbe sein mufs; dann kann man auch X′, Y′ in gleicher Weise durch x und y ausdrücken. Die Gleichungen (9) stellen also die allgemeinste Beziehung zwischen Koordinaten dar, welche nach den im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Regeln aufgestellt werden können.

Als vorhin die Gleichung der geraden Linie hergeleitet wurde, mufste die Annahme gemacht werden, dafs mindestens eine Seite des Koordinaten-Dreiecks von der Geraden getroffen wird. Auch von dieser Voraussetzung kann man sich jetzt unabhängig machen.

Man ersetze die Koordinaten x, y durch andere X, Y, für welche wenigstens eine Seite getroffen wird. Dann ist in den neuen Koordinaten die Gleichung der Geraden:

$$AX + BY + C = 0.$$

Indem man hierin für X und Y die aus (9) fliefsenden Werte einsetzt, erhält man:

$$ax + by + c = 0,$$

wo A, B, C, a, b, c konstante Gröfsen sind.

Man kann die Lage der Punkte einer Geraden noch in anderer Weise durch Koordinaten darstellen. Sind (x', y') und (x'', y'') zwei beliebige Punkte, so gehört der durch diese Punkte gelegten Geraden auch jeder Punkt an, dessen Koordinaten bei beliebigem Werte von λ sind $x' - \lambda(x' - x'')$ und $y' - \lambda(y' - y'')$. Wenn auf dieser Geraden ein vierter Punkt mit den Koordinaten $x' - \mu(x' - x'')$ und $y' - \mu(y' - y'')$ gewählt ist, so stellt der Quotient $\mu : \lambda$ das Doppelverhältnis der vier Punkte dar. In ähnlicher Weise können wir auch das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels darstellen. Wenn nämlich:

$$(10)\quad ax + by + c = 0 \text{ und } a'x + b'y + c' = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden sind, so geht für ein beliebiges λ die Gerade:

$$(11)\quad (a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c') = 0$$

durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden hindurch; die Gleichung bestimmt also den Büschel aller Strahlen, welche durch den Schnittpunkt hindurchgehen. Man nennt jedoch die Gesamtheit der durch die Gleichung (11) bestimmten Geraden auch dann einen Büschel, wenn ein Schnittpunkt, wenigstens in dem abgegrenzten Gebiete nicht vorhanden ist.

Wir betrachten aufser den drei Geraden (10) und (11) noch die Gerade:

$$(a + \mu a')x + (b + \mu b')y + (c + \mu c') = 0.$$

Dann weisen wir zunächst nach, dafs der Quotient $\mu : \lambda$ sich bei beliebiger projektiver Transformation nicht ändert. Zu dem Ende bezeichnen wir die vier Geraden kurz durch $L = 0$, $M = 0$, $L + \lambda M = 0$, $L + \mu M = 0$. Durch eine Transformation mögen die beiden ersten Geraden in $pL' = 0$, und $qM' = 0$ übergehen. Dann wird die dritte Gleichung sein: $L' + \frac{\lambda q}{p} M = 0$, und die vierte

$L' + \frac{\mu q}{p} M = 0$, also bleibt der Quotient $\lambda : \mu$ ungeändert. Nun darf man das Koordinatensystem so wählen, daſs etwa die Achse $y = 0$ von allen vier Geraden getroffen wird; dann folgt die Behauptung unmittelbar.

Bei der Wahl der Koordinaten x, y ist der Eckpunkt A_1 bevorzugt. Um die Eckpunkte gleichmäſsig zu benutzen, wähle man drei Gröſsen z_1, z_2, z_3, welche folgenden Bedingungen genügen:

1. sie sollen nicht gleichzeitig verschwinden,
2. keine von ihnen soll jemals unendlich werden,
3. es soll nicht auf ihre absoluten Werte, sondern nur auf ihre Quotienten ankommen; diese sollen aber so gewählt werden, daſs durch sie die Gröſsen x, y und damit auch x_1, y_1 und x_2, y_2 dargestellt werden.

Diese Gröſsen kann man aber, wofern man nur von den auf einer gewissen Geraden liegenden Punkten absieht, nach einer Angabe des Herrn Lüroth wieder als Doppelverhältnisse definieren. Man ziehe die Gerade EP und nenne ihre Schnittpunkte mit A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 der Reihe nach D_1, D_2, D_3; zudem wähle man eine beliebige Gerade und bezeichne ihren Schnittpunkt mit EP durch Q. Dann setze man:

$$z_1 = (EPQD_1),\ z_2 = (EPQD_2),\ z_3 = (EPQD_3).$$

Hiernach ist:

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{(EPQD_1)}{(EPQD_3)} = (PED_1Q) \,.\, (PEQD_3) \text{ nach § 3, h).}$$

Nun ersetze man die Punkte P, E, D_1, Q, D_3 der Reihe nach durch P_∞, P_0, P_1, P_α, P_r; dann hat in dem vorstehenden Produkte das erste Doppelverhältnis den Wert α, das zweite den Wert $\frac{r}{\alpha}$, während $(PED_1D_3) = (P_\infty P_0 P_1 P_r) = r$ ist. Somit ist:

$$\frac{z_1}{z_3} = (PED_1D_3) = (D_3D_1EP) = (A_3A_1E_2P_2) = y.$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für x, so daſs die neue Definition auf die frühere hinauskommt.

§ 6.

Die Raum-Koordinaten.

Wir legen ein beliebiges Tetraeder mit den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 zu Grunde und wählen im Innern oder Äuſsern desselben, nur nicht auf einer durch drei Eckpunkte gelegten Ebene, einen Punkt E, den Einheitspunkt. Man betrachte nun vier durch die Kante A_3A_4 gehende Ebenen, welche bezüglich durch A_2, A_1, E und durch den zu bestimmenden Punkt P gelegt seien, und setze das Doppelverhältnis dieser vier Ebenen, welches durch $(A_3A_4; A_2A_1EP)$ bezeichnet werden soll, gleich x. Ebenso lege ich durch die Kante A_4A_2 vier Ebenen, deren erste den Punkt A_3 enthält, während je eine der andern wieder durch A_1, E, P hindurchgeht; ihr Doppelverhältnis $(A_4A_2; A_3A_1EP)$ setze ich gleich y. Endlich sollen durch die Kante A_2A_3 vier Ebenen gehen, von denen jede einen der Punkte A_4, A_1, E, P enthält; ihr Doppelverhältnis $(A_2A_3; A_4A_1EP)$ soll mit z bezeichnet werden.

Man ersetze den Punkt A_1 durch einen Punkt A_1', welcher auf der Kante A_1A_2 liegt und für den das Doppelverhältnis der vier durch die Kante A_3A_4 und je einen der Punkte A_2, A_1, E, A_1' gelegten Ebenen gleich a ist. Dann bleiben y und z ungeändert, aber x geht in $\frac{x-a}{1-a}$ oder bei passender Veränderung des Einheitspunktes in $x-a$ über. Ersetzt man jetzt den Punkt A_1 durch einen Punkt A_1'' der Geraden $A_1'A_3$, so wird man nur $y-b$ statt y nehmen müssen. Wenn man aber A_1'' durch einen Punkt A_1^0 der Geraden $A_1''A_4$ ersetzt, so geht nur z in $z-c$ über. Indem wir diese drei Operationen zusammenfassen, erhalten wir den Satz:

Ersetzen wir den bevorzugten Punkt A_1 des Koordinaten-Tetraeders durch irgend einen Punkt A_1^0 des Raumes, während wir die andern Eckpunkte beibehalten, so erhält man die neuen Koordinaten x', y', z' durch die Gleichungen:

$$x' = \alpha(x-a),\ y' = b\,(y-b),\ z' = \gamma(z-c).$$

Die Koeffizienten α, β, γ kann man durch Verlegung des Einheitspunktes noch beliebig verändern.

Um die Beziehungen zu erkennen, in denen die durch Bevorzugung von A_1 erhaltenen Werte x, y, z zu denjenigen Koordinaten stehen, welche durch Bevorzugung eines andern Eckpunktes gewonnen werden, ziehen wir die Gerade A_1E und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit der Ebene $A_2A_3A_4$ mit E_1. Die Gerade A_1E_1 werde von der Ebene A_2A_4P in $\varkappa$, von der Ebene A_2A_3P in λ getroffen, während die in der Ebene A_2A_1P gelegenen

Geraden $A_2\varkappa$ und A_4P sich in μ schneiden mögen. Zudem möge jedem Punkte auf der Geraden A_1E_1 nach der in § 3 mitgeteilten Methode eine Zahl zugeordnet und die Differenz der zu zwei Punkten gehörigen Zahlen einfach durch Nebeneinanderstellung der Punkte bezeichnet werden. Dann ist:

$$y = (A_1A_2;\ A_3A_1EP) = (E_1A_1E\varkappa) = \frac{E_1E}{EA_1} : \frac{E_1\varkappa}{\varkappa A_1},$$

$$z = (A_2A_3;\ A_4A_1EP) = (E_1A_1E\lambda) = \frac{E_1E}{EA_1} : \frac{E_1\lambda}{\lambda A_1},$$

$$\text{also } \frac{y}{z} = \frac{E_1\lambda}{\lambda A_1} : \frac{E_1\varkappa}{\varkappa A_1} = (E_1A_1\lambda\varkappa).$$

Projizieren wir die vier Punkte E_1, A_1, λ, $\varkappa$ durch vier Ebenen, welche durch A_2A_3 gehen, auf die Gerade A_4P, deren Schnittpunkt mit der Ebene $A_1A_2A_3$ durch P_4 bezeichnet werden möge, so folgt:

$$\frac{y}{z} = (A_4P_4P\mu).$$

Die vier Punkte, deren Doppelverhältnis hier angegeben wird, sollen von A_1A_2 aus durch Ebenen projiziert werden. Dann geht die Ebene $A_1A_2P_4$ auch durch A_3, die Ebene $A_1A_2\mu$, weil μ auf der Geraden $A_2\varkappa$ liegt, durch $\varkappa$ und weil $A_1\varkappa$ in der Geraden A_1E liegt, auch durch E. Demnach ist:

$$\frac{y}{z} = (A_1A_2;\ A_4A_3PE) = (A_1A_2;\ A_3A_4EP).$$

Diese Beziehung ermöglicht es, diejenigen Koordinatenwerte, welche man unter Beibehaltung des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ durch Bevorzugung eines andern Eckpunktes erhält, durch die obigen Werte x, y, z auszudrücken. Bevorzugt man z. B. den Punkt A_4 und setzt:

$$(A_2A_3;\ A_1A_4EP) = x_3,\ (A_3A_1;\ A_2A_4EP) = y_3,$$
$$(A_1A_2;\ A_3A_4EP) = z_3, \text{ so ersieht man, dafs ist:}$$

$$x_3 = \frac{1}{z},\ y_3 = \frac{x}{z},\ z_3 = \frac{y}{z}.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man die Entwicklungen des vorigen Paragraphen sehr leicht auf den Raum übertragen.

§ 7.

Bewegung einer Geraden in sich.

In den bisherigen Untersuchungen wird der Begriff der Gleichheit von Strecken und Winkeln nicht benutzt. Indem wir im folgenden versuchen, die gewonnenen Resultate auch für metrische Beziehungen nutzbar zu machen, beachten wir vorläufig nur, daſs bei starren Bewegungen auch die Doppelverhältnisse ungeändert bleiben, oder mit andern Worten, daſs jedesmal, wenn sämtliche Linien, Winkel, Flächen u. s. w. ungeändert bleiben, auch die Doppelverhältnisse ihre Werte beibehalten. Es kommt dies darauf hinaus, vorauszusetzen, daſs hierbei die Ebenen wieder in Ebenen, die geraden Linien in Geraden übergehen. Jede Transformation, die einer Bewegung entspricht, muſs demnach von der Form sein, welche durch die Gleichung (9) § 5 für die Ebene angegeben ist. Wir beschränken uns vorläufig auf eine einzige Gerade und lassen sie in sich verbleiben. Indem wir diese Gerade zur Achse $y = z = 0$ wählen, muſs auch $y' = z' = 0$ sein. Dann wird die Änderung der Koordinate x durch die Gleichung gegeben:

$$(1)\quad x' = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Die Determinante $ad - bc$ kann positiv, gleich null oder negativ sein. Wir werden später nachweisen, daſs die beiden letzten Fälle ausgeschlossen werden müssen. Demnach betrachten wir zunächst nur den Fall, daſs diese Gröſse positiv ist, und können alsdann dadurch, daſs wir a, b, c, d mit derselben reellen Konstanten multiplizieren, bewirken, daſs wird:

$$(2)\quad ad - bc = 1.$$

Um die sämtlichen durch die Gleichung (1) dargestellten Transformationen in gewisse Klassen einteilen zu können, betrachten wir die Gleichung:

$$(3)\quad cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Diese hat entweder zwei reelle ungleiche oder eine einzige reelle oder zwei konjugiert komplexe Wurzeln. Es hängt dies davon ab, ob

$$(4)\quad (a + d)^2 \gtreqless 4$$

ist. Jede dieser Möglichkeiten ist für die Transformation (1) charakteristisch. Betrachten wir nämlich die Transformation nur von der analytischen Seite ohne Rücksicht auf die geometrische Anwendung, so geben die Wurzeln der Gleichung (3) diejenigen Werte an, welche bei der Transformation ungeändert bleiben. Diese Werte selbst hangen natürlich von den Punkten P_∞, P_0, P_1 ab, welche wir zur Bestimmung der Gröfsen x benutzt haben; aber ihre Anzahl ist von der Wahl der Grundpunkte durchaus unabhängig. Zwar kann man durch eine reelle Transformation

$$\xi = \frac{\varkappa x + \lambda}{\mu x + \nu}$$

drei reelle Werte x_1, x_2, x_3 in drei beliebige andere Werte ξ_1, ξ_2, ξ_3 überführen; auch tritt an die Stelle der Gleichung (3) eine neue Gleichung, deren Wurzeln von denen der ersten im allgemeinen verschieden sind; aber reellen Werten von x entsprechen reelle Werte von ξ, und zwar jedem x ein einziges ξ; deshalb haben die Gleichungen entweder beide zwei reelle verschiedene oder beide zwei gleiche oder beide komplexe Wurzeln.

Im Fall zweier reellen Wurzeln sprechen wir von einer hyperbolischen Transformation; wenn die Wurzeln zusammenfallen, nennen wir die Transformation parabolisch, und wenn sie imaginär sind, elliptisch. Demgemäfs ergeben sich auch für die Darstellung der Bewegung einer Geraden in sich drei verschiedene Möglichkeiten. Jede von ihnen ist aber, wofern sie nicht etwa beim weiteren Aufbau zu einem Widerspruch führen sollte, für den Raum selbst charakteristisch. Wir unterscheiden also hyperbolische, parabolische und elliptische Raumformen, jenachdem zwischen den Koeffizienten a, b, c, d der Transformation, welche der starren Bewegung einer Geraden in sich entspricht, unter der Bedingung (2) die Beziehung statthat: $(a+d)^2 > 4$ oder $= 4$ oder < 4.

Dabei beachten wir, dafs der hier angegebene Unterschied schon in einem endlichen Gebiete des Raumes, welches den am Schlusse von § 1 angegebenen Forderungen genügt, erkannt werden könnte, wenn es möglich wäre, Messungen mit vollkommener Genauigkeit auszuführen. Denn dann brauchte man nur den Punkten einer Geraden nach der angegebenen Methode Zahlen zuzuordnen, alsdann die Gerade beliebig in sich zu verschieben und durch Vergleichung der beiden Lagen von je drei Punkten die Koeffizienten a, b, c, d zu bestimmen.

Wenn die Gleichung (3) zwei reelle Wurzeln α und β hat, so ist:

$$\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},\ \beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d},$$

also

$$x' - \alpha = \frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a\alpha - b}{c\alpha + d} = \frac{x - \alpha}{(cx + d)(c\alpha + d)};$$

ebenso:

$$x' - \beta = \frac{x - \beta}{(cx + d)(c\beta + d)},\ \text{also}$$

$$(5)\ \frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = \varrho \frac{x - \alpha}{x - \beta},\ \text{wo ist:}$$

$$(6)\ \varrho = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} = \frac{(c\beta + d)^2}{(c\alpha + d)(c\beta + d)} = (c\beta + d)^2.$$

Von dieser Gleichungs-Form nicht wesentlich verschieden ist die folgende:

$$x' - \alpha = \varrho(x - \alpha),$$

welche aus der Form (5) erhalten wird, indem man x durch $\frac{\alpha(\alpha - \beta)}{x - \beta}$ und demnach x' durch $\frac{\alpha(\alpha - \beta)}{x' - \beta}$ ersetzt.

Wenn die Gleichung (3) nur die Wurzel $\alpha = \frac{a - d}{2c}$ hat, so ist $4(c\alpha + d)^2 = (a + d)^2 = 4$, also $(c\alpha + d)^2 = 1$. Nun ist, wie vorhin:

$$\frac{1}{x' - \alpha} = \frac{(cx + d)(c\alpha + d)}{x - \alpha} = \frac{[c(x - \alpha) + (c\alpha + d)](c\alpha + d)}{x - \alpha}$$

also

$$(7)\ \frac{1}{x' - \alpha} = \frac{1}{x - \alpha} + \varrho,\ \text{wo ist:}$$

$$(8)\ \varrho = c(c\alpha + d).$$

Sind die beiden Wurzeln α und β konjugiert komplex, so kann man die bei (5) durchgeführte Rechnung wiederholen, alsdann auf beiden Seiten den reellen und imaginären Teil abtrennen und hierdurch die Transformation in reeller Form erhalten. Statt dessen kann man auch in folgender Weise verfahren.

Setzt man $\alpha = \varkappa + \lambda i$, $\beta = \varkappa - \lambda i$, so ist:

$$\varkappa + \lambda i = \frac{a(\varkappa + \lambda i) + b}{c(\varkappa + \lambda i) + d},$$

wo $\varkappa$, λ, a, b, c, d reelle Gröſsen sind und die vier letzten der Bedingung: $ad - bc = 1$ genügen.

Man multipliziere rechts Zähler und Nenner mit $c\varkappa + d - c\lambda i$, so folgt:

$$\varkappa + \lambda i = \frac{(a\varkappa + b)(c\varkappa + d) + ac\lambda^2 + \lambda i(ad - bi)}{(c\varkappa + d)^2 + c^2\lambda^2}.$$

Durch Vergleichung der imaginären Teile folgt hieraus:

$$(c\varkappa + d)^2 + c^2\lambda^2 = 1.$$

Vergleicht man die reellen Teile, so folgt:

$$\varkappa = \varkappa(ad - bc) = (a\varkappa + b)(c\varkappa + d) + ac\lambda^2 \text{ oder}$$

$ac(\varkappa^2 + \lambda^2) + 2bc\varkappa + bd = 0$, woraus sich für $c\varkappa + d = \varrho$, $c\lambda = \sigma$ ergiebt:

$$c = \frac{\sigma}{\lambda},\ d = \frac{\varrho\lambda - \varkappa\sigma}{\lambda},\ a = \frac{\varrho\lambda + \varkappa\sigma}{\lambda},\ b = -\frac{\sigma(\varkappa^2 + \lambda^2)}{\lambda}.$$

Demnach können wir die Transformation in der Form darstellen:

$$(9)\quad \frac{x' - \varkappa}{\lambda} = \frac{\varrho(x - \varkappa) - \sigma\lambda}{\sigma(x - \varkappa) + \varrho\lambda} \text{ mit der Bedingung:}$$

$$(10)\quad \varrho^2 + \sigma^2 = 1.$$

Somit kann die hyperbolische, parabolische und elliptische Raumform in folgender Weise charakterisiert werden. Die Punkte einer Geraden seien durch ihr Doppelverhältnis x zu drei festen Punkten bestimmt; dann kann man eine (ganze oder gebrochene) lineare Funktion ξ von x vermittelst reeller Konstanten derartig bestimmen, daſs die Verschiebung der Geraden in sich analytisch durch eine Gleichung von einer der drei Formen dargestellt wird:

$$(11)\quad \xi = \iota\xi,\ \xi' = \xi + \iota,\ \xi = \frac{\xi - \iota}{\iota\xi + 1},$$

wo ι eine konstante Gröſse ist. Im ersten Falle ist $\xi = \dfrac{x - \alpha}{x - \beta}$ oder $= x - \alpha$, im zweiten $\xi = \dfrac{1}{x - \alpha}$ oder $= x$, im dritten $\xi = \dfrac{x - \varkappa}{\lambda}$.

Bisher haben wir nur eine einzige Transformation betrachtet; die Geometrie gestattet uns aber, aus derselben weitere in unbegrenzter Anzahl herzuleiten. Zu dem Ende sondern wir in dem zu Grunde gelegten Raumteile ein Stück l der Geraden ab und lassen den einzelnen Punkten die Zahlen x in der angegebenen Weise entsprechen. Durch die Bewegung gelangt l zur Deckung mit einem neuen Stück l', dessen Punkte durch die Zahlen x' bestimmt sein mögen. Dann gilt für eine hyperbolische Raumform die Gleichung:

$$\frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = \varrho \frac{x - \alpha}{x - \beta}.$$

Bei der Bewegung wird aber die ganze Gerade, der die Strecke l angehört, in sich verschoben. Daher gelangt auch die Strecke l' in Deckung mit einer weiteren Strecke l''. Wenn für diese die Zahlen x mit x'' bezeichnet werden, so mufs auch sein:

$$\frac{x'' - \alpha}{x'' - \beta} = \varrho \frac{x' - \alpha}{x' - \beta}.$$

Da die Strecke l'' mit l', letztere mit l zur Deckung gebracht werden kann, so kann man auch l mit l'' zur Deckung bringen; d. h. man darf in die vorstehende Gleichung den Wert für x' aus der vorangehenden einsetzen und erhält die Beziehung:

$$\frac{x'' - \alpha}{x'' - \beta} = \varrho^2 \frac{x - \alpha}{x - \beta}.$$

Nun wird aber durch die erste Bewegung die Strecke l'' auf eine Strecke l''' u. s. w. gelangen; man kann also auch die Punkte x in eine Lage $x^{(n)}$ bringen, für welche die Gleichung gilt:

$$\frac{x^{(n)} - \alpha}{x^{(n)} - \beta} = \varrho^n \frac{x - \alpha}{x - \beta}.$$

Die Bewegung, durch welche l nach l' gelangt, erfolgt aber stetig; es genügt daher nicht, dem Exponenten n nur ganze Zahlwerte beizulegen; man mufs vielmehr n das Zahlengebiet stetig durchlaufen lassen. Demnach läfst sich die Bewegung bei veränderlichem t durch die Gleichung darstellen:

$$(12)\quad \frac{X - \alpha}{X - \beta} = e^{\gamma t} \frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

wo α, β, γ konstante Gröfsen sind.

Für eine parabolische Raumform findet man ganz entsprechend:

$$(13)\quad \frac{1}{X-\alpha} = \frac{1}{x-\alpha} + \nu t.$$

Eine etwas weitläufigere Rechnung ist notwendig, falls die Raumform elliptisch ist. Wir setzen für den Augenblick $\xi = \frac{x-\varkappa}{\lambda}$ und erhalten die Transformation:

$$\xi' = \frac{\varrho\xi - \sigma}{\sigma\xi + \varrho} \text{ unter der Bedingung: } \varrho^2 + \sigma^2 = 1.$$

Dann ist:

$$\xi'' = \frac{\varrho\xi' - \sigma}{\sigma\xi' + \varrho} = \frac{(\varrho^2 - \sigma^2)\,\xi^2 - 2\varrho\sigma}{2\varrho\sigma\xi + (\varrho^2 - \sigma^2)}.$$

Setze ich also:

$$\varrho = \cos\nu,\ \ \sigma = \sin\nu,$$

so folgt:

$$\xi'' = \frac{\xi\cos 2\nu - \sin 2\nu}{\xi\sin 2\nu + \cos 2\nu}.$$

Nun ergiebt sich aber unmittelbar für

$$\xi^{(n-1)} = \frac{\xi\cos(n-1)\nu - \sin(n-1)\nu}{\xi\sin(n-1)\nu + \cos(n-1)\nu},\quad \xi^{(n)} = \frac{\xi^{(n-1)}\cos\nu - \sin\nu}{\xi^{(n-1)}\sin\nu + \cos\nu},$$

dafs ist:

$$\xi^{(n)} = \frac{\xi\cos n\nu - \sin n\nu}{\xi\sin n\nu + \cos n\nu}.$$

Wiederholen wir die frühern Erwägungen, so erhalten wir jetzt für ein veränderliches t und konstante Gröfsen $\varkappa$, λ, ν:

$$(14)\quad \frac{X-\varkappa}{\lambda} = \frac{(x-\varkappa)\cos\nu t - \lambda\sin\nu t}{(x-\varkappa)\sin\nu t + \lambda\cos\nu t}.$$

Die Formeln (12), (13), (14) werden in den folgenden Paragraphen eine wichtige Anwendung finden; hier nur noch einige Bemerkungen.

Der oben angegebenen Definition der hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Raumformen liegt jedesmal eine einzige Gerade und eine ganz bestimmte Verschiebung derselben zu Grunde; soll die Definition fehlerlos sein, so mufs das unterscheidende Merkmal für jede Gerade und für jede Verschiebung derselben in sich gelten. Betrachten wir aber zwei Bewegungen, bei denen eine Gerade in sich verbleibt, so ist nach den vorstehenden Entwicklungen der Charakter der Transformation beidemal derselbe; die zweite Forderung wird also erfüllt. Dafs auch die Wahl der Geraden gleichgültig ist, erkennt man ebenso leicht. Man wähle irgend zwei Geraden des Raumes und ordne nach der angegebenen Methode den in jeder von ihnen gelegenen Punkten eine Zahl zu. Die Zahlen mögen für die erste Gerade mit u, für die zweite mit v bezeichnet werden. Legt man jetzt die erste Gerade auf die zweite, so sind diejenigen Zahlwerte, welche demselben Punkte entsprechen, nach den frühern Resultaten durch eine Gleichung von der Form:

$$u = \frac{\varkappa v + \lambda}{\mu v + \nu}$$

für reelle Werte von $\varkappa$, λ, μ, ν verbunden. Bewegt man aber die erste Gerade in sich und gelangt man dadurch zu der Transformation:

$$u' = \frac{au + b}{cu + d},$$

so mufs es möglich sein, auch diese zweite Lage auf die andere Gerade zu übertragen; also mufs deren Bewegung in sich durch eine Gleichung dargestellt werden, welche aus der vorstehenden erhalten wird, indem man

$$u \text{ durch } \frac{\varkappa v + \lambda}{\mu v + \nu} \text{ und } u' \text{ durch } \frac{\varkappa v' + \lambda}{\mu v' + \nu}$$

ersetzt. Dafs hierdurch aber der Charakter der Transformation nicht geändert wird, ist bereits oben gezeigt worden.

Sonach sind die angegebenen Möglichkeiten vollständig gegen einander abgegrenzt. Weitere Fälle sind aber ausgeschlossen, wofern wir nachweisen können, dafs die Determinante $ad - bc$ stets positiv sein mufs. Das läfst sich in der That sehr leicht zeigen. Wäre nämlich $ad - bc = 0$ oder $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, so würde die Gleichung (1) verlangen, dafs für einen Wert von x, der von $-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$ verschieden ist, jedesmal $x' = \frac{a}{c}$ würde. Eine derartige Veränderung, wodurch eine Strecke sich in einen Punkt zusammenzöge, ist aber dem Begriff der Bewegung nach vollständig ausgeschlossen. Ebensowenig darf $ad - bc$ negativ sein. Denn für die Ruhelage mufs $x' = x$, also $a = d$, $b = c = 0$ sein; somit ist $ad - bc$ für den Beginn der Bewegung positiv. Dieser Ausdruck darf sich aber nur stetig ändern. Würde er negativ, so müfste er durch null hindurchgehen, was unmöglich ist; also bleibt er stets positiv.

Bei der Herleitung der Gleichung (14) sind die Eigenschaften der Funktionen Sinus und Cosinus als bekannt vorausgesetzt; man kann jedoch auch diese Funktionen vermittelst der Transformations-Koeffizienten definieren und ihre Eigenschaften durch Zusammensetzung mehrerer Transformationen ermitteln.

§ 8.

Drehung einer Ebene um einen Punkt.

Indem wir jetzt dazu übergehen, die Änderungen zu entwickeln, welche die Koordinaten der Punkte einer Ebene erleiden, wenn die Ebene um einen ihrer Punkte gedreht wird, benutzen wir einige einfache geometrische Sätze, bei deren Beweis keinerlei Voraussetzung über die Unendlichkeit der Geraden u. s. w. erforderlich ist. Es sind dies folgende Sätze:

1. Bei der Drehung der Ebene um einen ihrer Punkte beschreibt jeder andere Punkt eine geschlossene Linie, den Kreis.

2. Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte geht durch die Mitte derselben.

3. Jeder Punkt auf der Geraden, welche auf einer gegebenen Strecke in ihrer Mitte senkrecht steht, ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, welches die Strecke zur Grundlinie hat.

4. Jede Tangente eines Kreises steht auf dem Radius senkrecht, der zum Berührungspunkte führt.

Die Sätze 2. und 3. werden in ihrer Anwendung auf den Kreis benutzt.

Der Untersuchung legen wir die in § 5 aufgestellten Koordinaten zu Grunde und nehmen den ruhenden Punkt zum Anfangspunkt. Dann möge eine zweite Lage der Ebene durch die Gleichungen bestimmt sein:

$$(1)\quad x' = \frac{\alpha' x + b' y}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{\alpha'' x + \beta'' y}{\alpha x + \beta y + \gamma}.$$

Wir betrachten zunächst die Veränderung, welche der durch den Ruhepunkt gehende Strahlbüschel erleidet. Hierfür gilt die Gleichung:

$$(2)\quad \frac{x'}{y'} = \frac{\alpha' x + \beta' y}{\alpha'' x + \beta'' y}.$$

Indem wir u als lineare (ganze oder gebrochene) Funktion von x : y in passender Weise bestimmen, kann die Gleichung (2) durch eine der folgenden ersetzt werden:

$$u' = e^{\nu t} . u \quad \text{oder} \quad u' = u + \nu t \quad \text{oder} \quad u' = \frac{u \cos \nu t - \sin \nu t}{u \sin \nu t + \cos \nu t}.$$

Nun kann man die Drehung so weit fortsetzen, bis ein Strahl (und damit jeder Strahl) wieder in seine Anfangslage gelangt. Demnach mufs für einen reellen Wert von t das x : y und damit u auch wieder seinen frühern Wert annehmen. Das ist in den beiden ersten Fällen nicht möglich, wohl aber im dritten, wo für $\nu t = \pi$ allgemein $u' = u$ wird. Setzen wir für u den Wert, welcher aus § 7 folgt, so ergiebt sich die Transformation:

$$(3) \quad \frac{x' + \varkappa y'}{\lambda y'} = \frac{(x + \varkappa y) \cos \varphi - \lambda y . \sin \varphi}{(x + \varkappa y) \sin \varphi + \lambda y \cos \varphi}.$$

Jetzt gehen wir auf die Transformation (1) zurück und fragen uns, welche lineare Funktion $Ax + By + C$ durch dieselbe bis auf einen Faktor in sich übergeht. Da keine reelle Gerade, die durch den ruhenden Punkt geht, bei der Bewegung in sich verbleibt, so dürfen wir annehmen, dafs C von null verschieden ist. Dann mufs sein:

$$Ax' + By' + C = \frac{(A\alpha' + B\alpha'' + C\alpha)\, x + (A\beta' + B\beta'' + B\beta)\, y + C\gamma}{\alpha x + \beta y + \gamma}$$
$$= \frac{\omega\,(Ax + By + C)}{\alpha x + \beta y + \gamma}.$$

Daraus folgt: $\omega = \gamma$, und dann liefert die Vergleichung der Koeffizienten von x und y in den Zählern zwei Gleichungen, welche gestatten, die Verhältnisse von A, B, C eindeutig zu bestimmen. (Wären nämlich diese beiden Gleichungen identisch, so würde auch eine durch den Nullpunkt gehende Gerade in Ruhe bleiben, was ausgeschlossen ist.)

Demnach können wir jetzt der Transformation folgende Form geben:

$$\frac{x' + \varkappa y'}{Ax' + By' + C} = \varrho \frac{(x + \varkappa y) \cos \varphi - \lambda y \sin \psi}{Ax + By + C},$$
$$\frac{\lambda y'}{Ax' + By' + C} = \varrho \frac{(x + \varkappa y) \sin \varphi + \lambda y \cos \varphi}{Ax + By + C}.$$

Indem wir diese Transformation mehrmals wiederholen, müssen wir ϱ durch ϱ^n und φ durch $n\varphi$ ersetzen. Dann kann ein Punkt (x, y) nur in seine Anfangslage zurückkehren, wenn $\varrho^n = 1$ und $n\varphi$ gleich einem Vielfachen von 2π ist. Nun sind komplexe Werte von ϱ der Natur der Sache nach ausgeschlossen; ϱ kann aber auch nicht gleich -1 sein, wie dieselbe Erwägung zeigt, welche am Schlusse des vorigen Paragraphen angestellt wurde, um zu zeigen, dafs $ad - bc$ nicht negativ sein kann. Folglich mufs $\varrho = 1$ sein.

Bei der Herleitung dieses Resultates wurde der Nullpunkt nur deshalb als ruhender Punkt gewählt, um die Formeln einfacher schreiben zu können. Das gewonnene Resultat läfst sich aber sehr leicht auch für den Fall aussprechen, dafs irgend ein anderer Punkt der Ebene in Ruhe gehalten wird. Man hat drei lineare Funktionen L_1, L_2, L_3 der Koordinaten x und y zu benutzen. Indem man $L_\varkappa(x', y')$ kurz mit $L'_\varkappa$ bezeichnet, gelten die Gleichungen:

$$(4)\quad \frac{L_1'}{L_3} = \frac{L_1 \cos\varphi - L_2 \sin\varphi}{L_3}, \quad \frac{L_2'}{L_3'} = \frac{L_1 \sin\varphi + L_2 \,.\, \cos\varphi}{L_3}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{L_1'^2 + L_2'^2}{L_3'^2} = \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_3^2}.$$

Alle Kreise, welche einen festen Punkt zum Mittelpunkte haben, können somit durch die Gleichung dargestellt werden:

$$(5)\quad L_1^2 + L_2^2 = r^2 L_3^2,$$

wo die Konstante r vom Radius abhängig ist.

Hier schneiden sich die Geraden $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ in dem ruhenden Punkte. Entsprechend dem Umstande, dafs die in den früheren Formeln benutzte Variabele y nur der Bedingung unterworfen ist, für die Punkte einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden zu verschwinden, darf auch L_2 im übrigen willkürlich gewählt werden; dagegen sind L_1 und L_3, wie wir später noch genauer sehen werden, durch die Wahl von L_2 vollständig bestimmt.

Statt der bisher benutzten Koordinaten darf man beliebige lineare gebrochene Funktionen von ihnen benutzen, sofern sie nur denselben Nenner haben. Dann bleiben alle Gleichungen in ihrer wesentlichen Form ungeändert; so z. B. sind die Transformations-Gleichungen wieder gebrochen-linear, und die Gleichung einer jeden Geraden bleibt vom ersten Grade. Gehen wir also wieder auf die Drehung um den Nullpunkt zurück und benutzen die oben eingeführten Konstanten, so möge gesetzt werden:

$$(6)\quad \xi = \frac{x - \varkappa}{Ax + By + C}, \quad \eta = \frac{\lambda y}{Ax + By + C}.$$

Dann gelten für die Drehung um den Punkt (0, 0) die Gleichungen:

$$(7)\quad \xi' = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad \eta' = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.$$

Zugleich wird die Gleichung eines beliebigen Kreises, der den Punkt (0,0) zum Mittelpunkt hat:

$$(8)\quad \xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

Setzen wir $\frac{\xi}{\eta} = u$, $\frac{\xi'}{\eta'} = u'$, so wird die durch (7) dargestellte Bewegung die Gerade u zur Deckung mit u' bringen; somit mufs die Gröfse φ in Beziehung zu dem Winkel stehen, welchen die Geraden u und u' einschliefsen. Setzt man aber

$$u'' = \frac{u' \cos \psi - \sin \psi}{u' \sin \psi + \cos \psi}, \text{ so folgt: } u'' = \frac{u \cos(\varphi + \psi) - \sin(\varphi + \psi)}{u \sin(\varphi + \psi) + \cos(\varphi + \psi)}.$$

Da zudem $u'' = u$ wird für $\varphi = \pi$, so stellt φ den Winkel selbst dar. Wir können aber auch umgekehrt die Gleichungen (7) zur Definition der Funktionen $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ benutzen, indem wir das Additions-Gesetz dieser Funktionen durch die Verbindung zweier Drehungen herleiten.

Wie aus der ersten Gleichung (7) hervorgeht, bildet die Gerade

$$(9)\quad \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha = 0$$

mit der Achse $\eta = 0$ den Winkel α. Auf dieser Geraden liegt bei beliebigem Werte von m der Punkt ($m \cos \alpha$, $m \sin \alpha$). Dieser Punkt liegt auch auf dem Kreise: $\xi^2 + \eta^2 = m^2$. Bekannte Entwicklungen zeigen, dafs die Tangente, welche diesen Kreis in dem gegebenen Punkte berührt, durch die Gleichung dargestellt wird:

$$(10)\quad \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = m.$$

Da diese Tangente auf dem Berührungsradius senkrecht steht, so stellt die Gleichung (9) eine Gerade dar, welche auf der Geraden $\xi \sin \alpha = \eta \cos \alpha$ senkrecht steht. Speziell steht also jede Gerade $\xi = m$ auf der Achse $\eta = 0$ und jede Gerade $\eta = m$ auf der Achse $\xi = 0$ senkrecht.

Die Gerade (10) trifft den Kreis (8) in zwei Punkten, deren Koordinaten aus

(11) $\xi = \mathrm{m} \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{m}^2},\ \eta = \mathrm{m} \sin\alpha - \sin\alpha \,.\, \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{m}^2}$

erhalten werden, indem man der Wurzel ihre beiden Werte beilegt. Diese beiden Punkte haben von jedem Punkt der Geraden $\xi \sin\alpha = \eta \cos\alpha$ gleichen Abstand, oder mit andern Worten: Geht eine Kreislinie, die einen Punkt der Geraden (9) zum Mittelpunkte hat, durch einen der Punkte (11), so erhält sie auch den andern. Dieser Satz kann benutzt werden, um einige Koeffizienten in der Gleichung des Kreises zu bestimmen.

Zu dem Zwecke gehen wir von der Gleichung (5) aus. Die Geraden $\mathrm{L}_1 = 0$ und $\mathrm{L}_2 = 0$ müssen durch den Mittelpunkt $(\mathrm{p} \cos\alpha,\ \mathrm{p} \sin\alpha)$ gehen, und man kann setzen:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_2 &= \xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha, \\ \mathrm{L}_1 &= \varkappa (\xi - \mathrm{p} \cos\alpha) + \lambda (\eta - \mathrm{p} \sin\alpha) \\ \mathrm{L}_3 &= \varrho\xi + \sigma\eta + \tau. \end{aligned}$$

Dadurch nimmt die Gleichung (5) die Gestalt an:

$$[\varkappa(\xi - \mathrm{p} \cos\alpha) + \lambda (\eta - \mathrm{p} \sin\alpha)]^2 + (\xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha)^2 = \mathrm{r}^2 (\varrho\xi + \sigma\eta + \tau)^2.$$

Hierin bestimme ich r so, dafs der Kreis durch den einen der Punkte (11) hindurchgeht; die Bedingung hierfür ist:

$$[(\mathrm{m}-\mathrm{p})(\varkappa \cos\alpha + \lambda \sin\alpha) + (\varkappa \sin\alpha - \lambda \cos\alpha) \sqrt{\mathrm{m}^2 - \mathrm{a}^2}]^2 + (\mathrm{m}^2 - \mathrm{a}^2)$$
$$\mathrm{r}^2 [\varrho\mathrm{m} \cos\alpha + \sigma\mathrm{m} \sin\alpha + \tau + (\varrho \cos\alpha - \sigma \cos\alpha) \sqrt{\mathrm{m}^2 - \alpha^2}]^2.$$

Diese Gleichung mufs aber auch befriedigt werden, wenn man der Wurzel das entgegengesetzte Zeichen beilegt. Daraus folgen die Bedingungen:

$$\varkappa \sin\alpha - \lambda \cos\alpha = 0,\ \ \varrho \sin\alpha - \sigma \cos\alpha = 0 \ \text{ oder}$$
$$\varkappa = \mu \cos\alpha,\ \ \lambda = \mu \sin\alpha,\ \ \varrho = \nu \cos\alpha,\ \ \sigma = \nu \sin\alpha.$$

[Die Beziehung zwischen $\varkappa$ und λ konnte auch unmittelbar daraus hergeleitet werden, dafs die Geraden $\mathrm{L}_1 = 0$ und $\mathrm{L}_2 = 0$ auf einander senkrecht stehen.]

Demgemäfs lautet jetzt die Gleichung des Kreises:

$$(12)\quad \mu^2 (\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - \mathrm{p})^2 + (\xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha)^2 = \mathrm{r}^2 (\nu\xi \cos\alpha + \nu\eta \sin\alpha + \tau)^2.$$

Ehe wir die noch unbekannten Gröfsen μ, ν, τ bestimmen, wollen wir die Entwicklungen des vorigen Paragraphen auf die Koordinaten ξ und η anwenden.

Da für $\eta = 0$ jeder Wert von ξ, wenn man in den Gleichungen (7) $\varphi = \pi$ setzt, in seinen entgegengesetzt gleichen übergeht, so ist die Strecke, welche von den Punkten $(\xi, 0)$ und $(\xi', 0)$ begrenzt wird, gleich derjenigen Strecke, deren Endpunkte $(-\xi', 0)$ und $(-\xi, 0)$ sind. Wenn demnach die Gerade $\eta = 0$ in sich verschoben wird und der Punkt ξ nach ξ' gelangt, so mufs zugleich $-\xi'$ in $-\xi$ übergehen. Betrachten wir zunächst eine hyperbolische Raumform, so kann die Verschiebung durch die Form dargestellt werden:

$$\frac{\xi' - \alpha}{\xi' - \beta} = \varrho \frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta}.$$

Dann mufs für dasselbe ϱ die Gleichung bestehen:

$$\frac{-\xi - \alpha}{-\xi - \beta} = \varrho \frac{-\xi' - \alpha}{-\xi' - \beta},$$

was nur für $\beta = -\alpha$ möglich ist; wir setzen

$$\alpha = -\beta = 1.$$

Setzt man in (7) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so geht der Punkt $(\alpha, 0)$ über in $(0, \alpha)$. Folglich wird auch die Änderung der η bei einer Bewegung, durch welche die Gerade $\xi = 0$ in sich verschoben wird, für $\xi = 0$ durch die Gleichung dargestellt:

$$\frac{\eta' - 1}{\eta' + 1} = \varrho \frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Wir suchen die Schnittpunkte des Kreises (12) mit der Geraden $\eta = 0$. Nennen wir ξ_1 und ξ_2 die beiden Wurzeln, welche die Gleichung (12) für $\eta = 0$ besitzt, so gelten die Beziehungen:

$$(13)\quad \xi_1 + \xi_2 = \frac{2(\mu^2 p + r^2 \nu r)\cos\alpha}{\mu^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - r^2 \nu^2 \cos^2\alpha},$$

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{\mu^2 p^2 - r^2 r^2}{\mu^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - r^2 \nu^3 \cos^2\alpha}.$$

Fällen wir aber vom Mittelpunkte $(p \cos\alpha, p \sin\alpha)$ auf die Gerade $\eta = 0$ die Senkrechte, so ist ihre Gleichung, wie wir im Anschlufs an die Gleichung (8) bemerkt haben: $\xi = p \cos\alpha$; der Fufspunkt hat also die Koordinaten: $\eta_0 = 0$, $\xi_0 = p \cos\alpha$. Dieser Punkt liegt aber in der Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten mit dem Kreise; man kann also durch Verschiebung der

Geraden in sich bewirken, dafs zugleich ξ_1 nach ξ_0 und ξ_0 nach ξ_2 gelangt. Es mufs also sein:

$$\frac{\xi_0 - 1}{\xi_0 + 1} = \varrho \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1}, \quad \frac{\xi_2 - 1}{\xi_2 + 1} = \varrho \frac{\xi_0 - 1}{\xi_0 + 1}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1} \cdot \frac{\xi_2 - 1}{\xi_2 + 1} = \left(\frac{\xi_0 - 1}{\xi_0 + 1}\right)^2 \text{ oder: } 2(\xi_1\xi_2 + 1^2)\xi_0 = (\xi_1 + \xi_2)(\xi_0{}^2 + 1^2).$$

Indem ich hierin die Werte aus (13) einsetze und berücksichtige, dafs die entstehende Gleichung für jeden Wert von r^2 gilt, erhalte ich die beiden Relationen:

$$\mu^2 p^2 - \mu^2 l^2 + l^2 = 0,$$

$$\iota^2 p^2 + \iota\nu(p^2 \cos^2\alpha + l^2) + \nu^2 p l^2 \cos^2\alpha = 0.$$

Die erste Gleichung liefert:

$$\mu^2 = \frac{l^2}{l^2 - p^2}, \text{ die zweite } \frac{\iota}{\nu} = -\frac{l^2}{p} \text{ oder } \frac{\iota}{\nu} = -p\cos^2\alpha.$$

Hätte man den Schnitt des Kreises (12) mit der Geraden $\xi = 0$ gesucht, so würde sich in entsprechender Weise die Gleichung ergeben haben:

$$\iota^2 p^2 + \iota\nu(p^2 \sin^2\alpha + l^2) + \nu^2 p l^2 \sin^2\alpha = 0.$$

Somit gilt nur der erste Wert von $\iota : \nu$, und wir erhalten (bei einer kleinen Änderung von r) als Gleichung des Kreises:

$$(14)\quad \frac{l^2}{l^2 - p^2}(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p)^2 + (\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha)^2 = r^2(p\xi\cos\alpha + p\eta\sin\alpha - l^2)^2.$$

Für eine elliptische Raumform kann dieselbe Rechnung durchgeführt werden; nur mufs überall l durch ki ersetzt werden. Somit lautet jetzt die Gleichung der Kreise:

$$(15)\quad \frac{k^2}{k^2 + p^2}(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p)^2 + (\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha)^2 = r^2(p\xi\cos\alpha + p\eta\sin\alpha + k^2)^2.$$

Wir gehen jetzt zu einem parabolischen Raume über und lassen die Gerade $\eta = 0$ in sich verschoben werden. Dann gilt eine der beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{\xi_1 - \alpha} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \varrho \text{ oder } \xi' = \xi + \varrho.$$

Sollte es im ersten Falle möglich sein, ξ' mit $-\xi$ und ξ mit $-\xi'$ zu vertauschen, so würde $\alpha = 0$ sein müssen, was nicht angeht, da der Anfangspunkt bewegt werden kann. Demnach gilt die zweite Transformations-Gleichung und daraus folgt:

$$\xi_0 = \xi_1 + \varrho,\ \xi_2 = \xi_0 + \varrho \text{ oder } 2\xi_0 = \xi_1 + \xi_2.$$

Indem wir hierin die Werte aus (13) einsetzen, erhalten wir die Beziehung:

$$2p\cos\alpha = \frac{2\cos\alpha\,(\mu^2 p^2 + r^2 \nu\tau)}{\mu^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - r^2\nu^2\cos^2\alpha}.$$

Diese zerlegt sich wieder in zwei Gleichungen, und indem man noch den Schnitt mit der Achse $\xi = 0$ betrachtet, folgt:

$$\mu^2 = 1,\ \nu = 0.$$

Die Gleichung des Kreises wird also:

$$(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p)^2 + (\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha)^2 = r^2 \text{ oder}$$

$$(16)\quad \xi^2 + \eta^2 - 2p\xi\cos\alpha - 2p\eta\sin\alpha = r^2 - p^2.$$

Lassen wir in der Gleichung (14) das l^2 immer gröfser werden, so nähert sich die linke Seite einem festen endlichen Werte; dasselbe mufs also auch auf der rechten Seite geschehen, oder es mufs $r^2 l^4$ einen endlichen Grenzwert haben. Dann geht also die Gleichung (14) in (16) über. Dasselbe geschieht, wenn man in (15) k^2 immer gröfser werden läfst. Nun ist aber die allgemeine Gleichung des Kreises für die Raumform selbst charakteristisch, wie der folgende Paragraph noch deutlicher zeigen wird; wir können daher sagen, ein parabolischer Raum stelle den Übergang von einem elliptischen zu einem hyperbolischen dar.

§ 9.

Die einfachsten Formeln für die ebene Geometrie.

Die Gleichung (15) des vorigen Paragraphen kann sehr leicht auf die Form gebracht werden:

$$(1)\quad \left(r^2 + \frac{1}{k^2+p^2}\right)(p\xi\cos\alpha + p\eta\sin\alpha + k^2)^2 = \xi^2 + \eta^2 + k^2.$$

Führt man diejenige Transformation aus, welche der Drehung um den Punkt $(p\cos\alpha,\ p\sin\alpha)$ entspricht, so ändert sich diese Gleichung für jeden beliebigen Wert von r nicht. Setzt man also $r^2 = -\frac{1}{k^2+p^2}$, so bleibt die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + k^2 = 0$ bei der angegebenen Transformation ungeändert, oder die Form $\xi^2 + \eta^2 + k^2$ wird nur mit einem Faktor multipliziert. In dieser Form kommt aber der ruhende Punkt nicht vor; folglich bleibt die Form bei jeder derartigen Transformation ungeändert. Da zudem jede Bewegung einer Ebene in sich aus Drehungen zusammengesetzt werden kann, so wird durch jede Transformation, welche einer starren Bewegung entspricht, die genannte Form nur mit einem Faktor multipliziert.

Dieser wichtige Satz kann in mancher anderen Weise hergeleitet werden; wir wollen einen zweiten Weg wenigstens andeuten. Die Gleichung: $A\xi + B\eta + C = 0$ stelle eine gerade Linie dar. Unter den Wertsystemen, welche dieser Gleichung genügen, giebt es zwei (ξ', η') und (ξ'', η''), die bei jeder, einer Verschiebung der Geraden in sich entsprechenden Transformation ungeändert bleiben. Gelangt bei einer beliebigen Bewegung der Ebene die obige Gerade auf eine andere, so mögen durch die entsprechende Transformation die Wertsysteme (ξ', η') und (ξ'', η'') in (ξ_1', η_1') und (ξ_1'', η_1'') übergehen. Dann genügen diese letzteren auch der Gleichung der zweiten Geraden und bleiben ungeändert bei einer Transformation für diejenige Bewegung, bei welcher die zweite Gerade in sich verschoben wird. Zugleich genügen alle derartigen Wertsysteme der Gleichung: $\xi^2 + \eta^2 + k^2 = 0$. Demnach bleibt diese Gleichung ungeändert bei jeder Transformation, welche einer Bewegung der Ebene in sich entspricht. Wie diese Sätze für eine elliptische Raumform aus den Resultaten des vorigen § herzuleiten sind, soll uns nicht weiter beschäftigen.

Da durch die Form der Gleichung (15) § 8 alle in L_1, L_2, L_3 vorkommenden Konstanten angegeben sind, können die Gleichungen (4) § 8 benutzt werden, um die Koeffizienten einer jeder Transformation zu bestimmen, bei der ein beliebiger Punkt der Ebene in Ruhe gehalten wird. Indessen bedarf es zu ihrer vollständigen Angabe noch der Auflösung linearer Gleichungen. Die Unveränderlichkeit der Form $\xi^2 + \eta^2 + k^2$ gestattet uns aber, die Transformations-Koeffizienten niederzuschreiben, ohne jene Gleichungen aufzulösen. Zu dem Ende ersetzen wir die Variabeln ξ, η durch das Verhältnis von drei Gröfsen t, u, v, indem sein soll: $\xi = \frac{u}{t}$, $\eta = \frac{v}{t}\cdot$ Dann kann man aber zwischen t, u, v noch eine Beziehung festsetzen, und zwar ist es am natürlichsten, die Form $k^2t^2 + u^2 + v^2$, welche bei den angegebenen Transformationen jedenfalls nur mit einem Faktor multipliziert wird, einer Konstanten gleichzusetzen. Wir stellen also die Bedingung auf:

$$(2)\quad k^2t^2 + u^2 + v^2 = k^2.$$

Die Transformationen müssen in t, u, v homogen linear sein; sie haben also die Form:

$$(3)\quad \begin{cases} t' = at + bu + cv \\ u' = a't + b'u + c'v \\ v' = a''t + b''u + c''v. \end{cases}$$

Dann mufs auch zwischen t', u', v' die Relation (2) statthaben; also mufs sein:

$$(4)\quad \begin{cases} k^2a^2 + a'^2 + a''^2 = k^2, & k^2ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ k^2b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & k^2ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ k^2c^2 + b'^2 + c''^2 = 1, & k^2bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$

Da alle Transformationen (3), welche den Bedingungen (4) genügen, die Form (2) ungeändert lassen, so werden sie auch, bei Anwendung der Koordinaten von zwei Punkten (t_1, u_1, v_1) und (t_2, u_2, v_2) die Form $k^2t_1t_2 + u_1u_2 + v_1v_2$ nicht verändern. Diese mufs also eine Funktion der Entfernung e der beiden Punkte sein, und wir dürfen setzen:

$$(5)\quad k^2t_1t_2 + u_1u_2 + v_1v_2 = \varphi(e).$$

Die Funktion φ (e) läfst sich auf demselben Wege ermitteln, der in § 10 zur Herleitungen der Gleichungen (5), (6) und (9) eingeschlagen werden soll. Man kann aber auch durch die beiden Punkte (t_1, u_1, v_1) und (t_2, u_2, v_2) eine gerade Linie legen und sie so in sich verschieben, bis der erste Punkt mit dem zweiten zur Deckung gelangt. Drückt man diese Verschiebung vermittelst der Gleichung (14) § 7 aus, so mufs die dort benutzte Gröfse t der Entfernung der beiden Punkte proportional sein. Nun kann man den ersten Punkt mit dem Punkte (1, 0, 0) zusammenfallen lassen und den zweiten in die Gerade $v = 0$ legen. Soll aber die Transformation

$$\frac{t \sin \mu e + u \cos \mu e}{t \cos \mu e - u \sin \mu e}$$

den Punkt (1, 0, 0) in den Punkt (t_2, u_2, 0) überführen, so mufs $\frac{u_2}{t_2} = \frac{\sin \mu e}{\cos \mu e}$ oder $t_2 = \cos \mu e$ sein. Also ist im vorliegenden Falle, da die linke Seite der Gleichung (5) in k^2t_2 übergeht,

$\varphi(e) = k^2 \cos \mu e$. Indem man noch die Längeneinheit so wählt, dafs $\mu = \frac{1}{k}$ wird, folgt allgemein:

$$(6)\quad k^2 t_1 t_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2 = k^2 \cos \frac{e}{k}\cdot$$

Beiläufig folgt hieraus, dafs für einen Punkt, der vom Anfangspunkte der Koordinaten die Entfernung e hat, die Koordinate t den Wert besitzt: $t = \cos \frac{e}{k}\cdot$

Die Gleichung einer geraden Linie sei:

$$At + Bu + Cv = 0.$$

Wendet man hierauf die Transformation (3) an und geht hierdurch die Gleichung über in

$$A't' + B'u' + C'v' = 0,$$

so ist

$$A't' + B'u' + C'v' = (A'a + B'a' + C'a'')t + (A'b + B'b' + C'b'')u$$
$$+ (A'c + B'c' + C'c'')v = At + Bu + Cv,$$

also

$$(7)\quad A = A'a + B'a' + C'a''$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Infolge der Beziehungen (4) ist also:

$$\frac{A^2}{k^2} + B^2 + C^2 = \frac{A'^2}{k^2} + B'^2 + C'^2.$$

Da aber der links stehende Ausdruck positiv ist, so können wir durch Multiplikation mit einer reellen Zahl erreichen, dafs ist:

$$(8)\quad \frac{A^2}{k^2} + B^2 + C^2 = 1,$$

und dann bleibt diese Beziehung bei den angegebenen Transformationen ungeändert.

Genügen die Koeffizienten (A_1, B_1, C_1) und (A_2, B_2, C_2) in den Gleichungen zweier Geraden der Forderung (8), so bleibt bei jeder Transformation (7), zwischen deren Koeffizienten die Beziehungen (4) bestehen, der Ausdruck $\frac{A_1 A_2}{k^2} + B_1 B_2 + C_1 C_2$ ungeändert. Wenn die Geraden einander schneiden, so können wir ihre Gleichungen so transformieren, dafs A_1 und A_2 verschwinden. Dann stellt nach den Entwicklungen des vorigen

Paragraphen der vorstehende Ausdruck den Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels dar; wir können also allgemein setzen:

$$(9)\quad \frac{A_1 A_2}{k^2} + B_1 B_2 + C_1 C_2 = \cos \varphi,$$

wo φ den Winkel bezeichnet, den die Geraden mit einander einschliefsen.

Wir setzen jetzt in die linke Seite der Gleichung einer geraden Linie die Koordinaten eines beliebigen Punktes ein; d. h. wir betrachten den Ausdruck

$$At + Bu + Cv,$$

wo A, B, C die Koeffizienten in der Gleichung einer geraden Linie sind und der Bedingung (8) genügen, während zwischen t, u, v als den Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene die Relation (2) besteht. Unterwerfen wir diesen Ausdruck einer Transformation (3), (4), so bleibt er ungeändert; er stellt also eine feste Beziehung zwischen dem Punkte und der Geraden dar und mufs somit eine Funktion des senkrechten Abstandes des Punktes von der Geraden sein. Nun kann ich aber durch eine Transformation von der angegebenen Form bewirken, dafs $A = B = 0$, $C = 1$, und $u = 0$ wird; der Ausdruck geht also in v über. Ist der Abstand gleich h, so ist $t = \cos \frac{h}{k}$, und weil $u = 0$ ist, folgt $v = k \sin \frac{h}{k}\cdot$ Folglich gilt unter den Bedingungen (2) und (8) ganz allgemein die Beziehung:

$$(10)\quad At + Bu + Cv = k \sin \frac{h}{k},$$

wo h den senkrechten Abstand des Punktes (t, u, v) von der Geraden (A, B, C) bezeichnet. Speziell ist noch:

$$u = k \sin \frac{m}{k},\quad v = k \sin \frac{n}{k},$$

wenn m und n die Senkrechten bezeichnen, welche von dem zu bestimmenden Punkte auf die Achsen gefällt werden können.

Hierdurch sind wir zu den analytischen Formeln gelangt, welche wir in I § 21 für die Riemannsche Ebene und ihre Polarform gefunden haben. Diese Formeln genügen aber, um die gesamte ebene Geometrie aufzubauen. Wir wollen sie noch benutzen, um die einfachsten Sätze der Trigonometrie herzuleiten.

Wenn ein Punkt (t_0, u_0, v_0) vom Anfangspunkte der Koordinaten die Entfernung r hat, so ist $t_0 = \cos\frac{r}{k}\cdot$ Dann folgt aus der Gleichung (2) unmittelbar:

$$u_0^2 + v_0^2 = k^2 \sin^2\frac{r}{k}\cdot$$

Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Punkte (1, 0, 0) zusammenfällt, hat nach § 8 die Gleichung: $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ oder $u^2 + v^2 = a^2 t^2$. Wenn also sein Radius gleich r ist, so folgt: $a = k \operatorname{tg}\frac{r}{k}\cdot$ Zugleich ist: $\xi = a\cos\alpha$, $\eta = a \sin\alpha$, wenn α den Winkel bezeichnet, den die Gerade $\eta = 0$ mit der durch die Punkte (1, 0, 0) und (t_0, u_0, v_0) gelegten Geraden bildet. Folglich ist

$$\frac{v_0}{t_0} = k \operatorname{tg}\frac{r}{k}\,.\sin\alpha,$$

oder, indem man für v_0 und t_0 die oben angegebenen Werte einsetzt:

$$(11)\quad \sin\frac{n}{k} = \sin\frac{r}{k}\,.\sin\alpha.$$

Hier bezeichnet r die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, n die eine Kathete und α den dieser Kathete gegenüberliegenden Winkel.

Die Gleichung der vom Punkte (t_0, u_0, v_0) auf die Gerade $v = 0$ gefällten Senkrechten ist:

$$tu_0 - ut_0 = 0.$$

Für ihren Fuſspunkt ist:

$$k^2t^2 + u^2 = k^2, \text{ also } t^2 = \frac{k^2t_0^2}{k^2t_0^2 + u_0^2} = \frac{k^2t_0^2}{k^2 - v_0^2}\cdot$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Fuſspunktes vom Anfangspunkte mit p, so ist:

$$t = \cos\frac{p}{k},\ t_0 = \cos\frac{r}{k},\ k^2 - v_0^2 = k^2\cos^2\frac{n}{k},$$

wo r und n wieder die frühere Bedeutung haben.

Sind demnach p und n die Katheten, r die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so besteht die Beziehung:

$$(12)\quad \cos\frac{n}{k}\,.\cos\frac{p}{k} = \cos\frac{r}{k}\cdot$$

Aus den Gleichungen (11) und (12) kann man aber die sämtlichen Formeln der Trigonometrie herleiten.

Die vorstehenden Entwicklungen gingen von der Gleichung (14) § 8 aus; die Folgerungen stützten sich, aufser auf die elementarsten geometrischen Anschauungen, auf die Sätze der Analysis. Wir können also auch dieselben Entwicklungen durchführen, wenn wir die Gleichung (13) § 8 zu Grunde legen, wofern wir nur k^2 mit $-l^2$ vertauschen. Indem wir wieder die Gröfsen t, u, v durch die Beziehung $\xi = \frac{u}{t}$, $\eta = \frac{v}{t}$ einführen, erkennen wir, dafs die Form $-l^2 t^2 + u^2 + v^2$ stets negativ ist: wir dürfen also die Bedingung festsetzen:

$$-l^2 t^2 + u^2 + v = -l^2.$$

Dagegen ist der Ausdruck $-\frac{A^2}{l^2} + B^2 + C^2$, wo A, B, C die Koeffizienten in der Gleichung einer geraden Linie sind, stets positiv; wir dürfen also wieder

$$-\frac{A^2}{l^2} + B^2 + C^2 = 1$$

setzen. Dann bleiben die vorstehenden Entwicklungen ungeändert; wir müssen nur $k \sin \frac{m}{k}$ durch $li \sin \frac{m}{li} = l \,\mathrm{Sh} \frac{m}{l}$ und $\cos \frac{m}{k}$ durch $\cos \frac{m}{li} = \mathrm{Ch} \frac{m}{l}$ ersetzen. Wir erhalten also die analytischen Formeln des 16. Paragraphen im ersten Abschnitt und die trigonometrischen Gleichungen, welche wir in I § 15 für die Lobatschewskysche Ebene aufgestellt haben.

Es wird nicht nötig sein, die Formeln für die parabolische Geometrie ausführlich zu entwickeln. Legen wir die Gleichung des Kreises in der Form § 8 (15) zu Grunde, so erkennen wir, dafs durch jede Transformation, welche einer starren Bewegung entspricht, die Form $(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2$ in $(\xi' - a')^2 + (\eta' - b')^2$ übergehen mufs, wo a, b, a', b', beliebige Konstanten sind. Zunächst erkennt man hieraus, dafs die Transformationen durch ganze Funktionen vermittelt werden. Setzen wir aber:

$$\xi' = \varkappa\xi + \lambda\eta + \mu$$
$$\eta' = \varrho\xi + \sigma\eta + \tau,$$

so folgt: $\varkappa^2 + \varrho^2 = 1$, $\lambda^2 + \sigma^2 = 1$, $\varkappa\lambda + \varrho\sigma = 0$.

Somit sind ξ, η identisch mit den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten, und wir gelangen zu den bekannten Formeln der euklidischen Geometrie.

§ 10.

Andere Herleitungen der gewonnenen Resultate.

Die Resultate des vorigen Paragraphen können in mancherlei anderer Weise gewonnen werden. So kann man von der Thatsache ausgehen, dafs die Gesamtheit der starren Bewegungen in der Ebene eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit bildet, die Transformationen, durch welche diese Bewegung analytisch beschrieben wird, demnach drei willkürliche Parameter enthalten. Das System dieser Transformationen hat aber die charakteristische Eigenschaft, dafs jedesmal die aus zwei Transformationen des Systems zusammengesetzte Transformation wieder dem System angehört. Nehmen wir noch die Eigenschaft des Kreises als einer geschlossenen Linie hinzu, so kann man das System der Transformationen vollständig bestimmen. Die Rechnung, welche zu diesem Resultate führt, läfst sich bedeutend erleichtern, wenn man berücksichtigt, dafs die Transformationen linear gebrochene Funktionen der Koordinaten sind. Indessen bleiben diese Entwicklungen, so lange man nicht die ersten Sätze aus der Theorie der Transformations-Gruppen voraussetzt, so weitläufig, dafs wir von ihrer Mitteilung Abstand nehmen müssen.

Ein zweiter Weg scheint geeignet, den von uns gelieferten Beweis beträchtlich abzukürzen. Den Ausgangspunkt bilden wieder die Entwicklungen von § 7. Hier stellt sich die Verschiebung einer Geraden in sich in dem einen Falle (der einer hyperbolischen Transformation) durch die Gleichung dar:

$$\frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = e^{\nu t} \frac{x - \alpha}{x - \beta}.$$

Wenn hier $\nu > 0$ ist, so wird, von welchem Werte x man auch ausgehen mag, für ein immer gröfser werdendes t die rechte Seite ihrem absoluten Betrage nach unbegrenzt wachsen, also mufs x' immer näher an β herankommen; dagegen wird, wenn t negativ, aber seinem absoluten Betrage nach immer gröfser wird, die rechte Seite immer näher an null, also x' immer näher an α kommen. Für ein negatives ν hat man nur die beiden Fälle umzutauschen, im übrigen bleibt das Resultat ungeändert. Da sich demnach die den Punkt bestimmende Zahl bei jeder Transformation, durch welche eine Verschiebung der Geraden in sich dargestellt wird, einem von zwei bestimmten Zahlwerten unbegrenzt nähert, denkt man auch diesen beiden Zahlen im uneigentlichen Sinne Punkte zugeordnet und nennt sie die unendlich fernen Punkte der Geraden. Macht man jetzt die ersten Entwicklungen von § 8 und führt die Koordinaten (ξ, η) ein, so stellt sich in ihnen die Gleichung eines jeden um den Nullpunkt beschriebenen Kreises durch die Gleichung: $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ dar. Folglich liegen auch die unendlich fernen Punkte für eine jede durch den Anfangspunkt gehende Gerade auf einem Kegelschnitt, dessen Gleichung ist: $\xi^2 + \eta^2 = 1^2$. Diese Gleichung stellt also die sämtlichen unendlich fernen Punkte der Ebene dar; folglich mufs sie bei jeder Transformation, welche einer Bewegung der Ebene in sich entspricht, ungeändert bleiben. Man hat also aufser dem § 7 nur die ersten Entwicklungen von § 8 nötig und kann die langwierigen Rechnungen des letzteren ganz entbehren.

Leider kann aber ein solches Verfahren nicht als streng anerkannt werden. Die »unendlich fernen« Punkte sind eben nur für eine einzelne Gerade und für eine Verschiebung dieser Geraden in sich definiert. Ein Wertsystem ($\xi = m$, $\eta = n$) stellt einen unendlich fernen Punkt der Geraden $A\xi + B\eta + C = 0$ dar, wenn 1. die Gleichung $Am + Bn + C = 0$ erfüllt ist, und 2. diejenige Transformation, für welche die Gerade in sich verschoben wird, das Wertsystem (m, n) nicht ändert. Hieraus kann man aber keineswegs den Schlufs ziehen, dafs, wofern auch die Gleichung einer zweiten Geraden $A'\xi + B'\eta + C' = 0$ für das Wertsystem (m, n) befriedigt wird, auch diejenige Transformation, für welche die zweite Gerade in sich verschoben wird, das genannte Wertsystem ungeändert läfst. Das erfordert vielmehr unbedingt einen Beweis. Ob er nicht so langwierige Entwicklungen nötig macht, als wir in § 8 angestellt haben, mag dahin gestellt bleiben; jedenfalls mufs er gewisse geometrische Sätze oder das vorhin erwähnte System von Transformationen (die dreigliedrige Transformations-Gruppe) benutzen. Zudem ist meines Erachtens ein Beweis nur dann vollständig befriedigend, wenn er nicht über ein einmal fest gewähltes, allseitig begrenztes Gebiet hinausgeht.

Ein vierter Weg setzt von der Metrik nichts voraus, sondern verbleibt mit voller Konsequenz innerhalb der Projektivität. [25]) Die Entwicklungen des § 5 gestatten uns, ebene algebraische Kurven von jeder Ordnungszahl durch die dort aufgestellten Koordinaten x und y zu definieren. Dabei sind sog. imaginäre Kurven keineswegs ausgeschlossen. Wenn z. B. zwischen x und y eine Gleichung zweiten Grades besteht und diese für kein reelles Wertepaar befriedigt wird, so wird durch die Gleichung ein Polarsystem bestimmt, welches imstande ist, die Kurve zu ersetzen. Statt also diejenigen Voraussetzungen zu machen, welche die Grundlage der Metrik bilden, kann man die Forderung stellen, dafs nur solche Transformationen angewandt werden sollen, bei denen eine gewisse Gleichung ungeändert bleibt. Eine einzelne Transformation und deren Fortsetzung läfst selbstverständlich eine Schar von Gleichungen ungeändert, nämlich die aller Kurven, in denen sich die Punkte bewegen. Im allgemeinen wird aber eine solche Gleichung nicht auch noch durch andere Transformationen ungeändert bleiben. Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, alle Gleichungen aufzusuchen, welche bei allen Transformationen einer mehrgliedrigen Gruppe sich nicht ändern; wir erinnern nur daran, dafs sämtliche Gleichungen ersten und zweiten Grades die angegebene Eigenschaft haben. Indem wir homogene Koordinaten x_1, x_2, x_3 benutzen, legen wir die Form zweiten Grades

$$(1)\quad \Omega_{xx} = \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa$$

zu Grunde und denken die Transformations-Koeffizienten so bestimmt, dafs diese Form ungeändert bleibt.

Wenn vier Punkte in gerader Linie liegen und durch eine Transformation auf vier Punkte einer andern geraden Linie gebracht werden, so mufs das Doppelverhältnis für die beiden Quadrupel dasselbe sein. Das gilt aber nicht blofs für eigentliche Punkte, sondern auch für Wertsysteme, welche den betreffenden Gleichungen genügen. So seien zwei Punkte (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) gegeben. Wir suchen die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit dem Kegelschnitt $\Omega = 0$, oder mit andern Worten: wir bestimmen diejenigen beiden Wertsysteme, welche 1. der Gleichung $\Omega = 0$, und 2. der Gleichung der durch die beiden Punkte gelegten geraden Linie genügen. Diese vier Punkte bestimmen ein Doppelverhältnis, und dies bleibt ungeändert, wofern man nur solche Transformationen zuläfst, bei denen die Form Ω in sich übergeht. Denn wenn durch eine solche Transformation die beiden ersten Wertsysteme, welche zu den beiden Punkten gehören, in zwei andere übergehen, so wird die Verbindungsgerade der ersten in die der neuen Punkte verwandelt werden. Die beiden letzten Wertsysteme gehen also in zwei andere über, welche 1. der Gleichung der Verbindungsgeraden der neuen Punkte, und 2. der Gleichung $\Omega = 0$ genügen. Um demnach zu erkennen, ob die Koordinaten zweier Punkte durch eine Transformation der bezeichneten Art in die zweier anderer Punkte übergeführt werden können, bestimme man das Doppelverhältnis der ersten Punkte zu den beiden Punkten, in denen ihre Verbindungsgerade den Kegelschnitt $\Omega = 0$ schneidet, und suche das entsprechende Doppelverhältnis für die beiden andern Punkte; sind diese Doppelverhältnisse gleich, so ist die Überführung durch eine solche Transformation ausführbar. Demnach stellt dies Doppelverhältnis eine feste Beziehung zwischen den beiden Punkten dar; es entspricht somit der Entfernung oder ist, genauer ausgedrückt, eine Funktion derselben.

Um das Doppelverhältnis analytisch darzustellen, stelle ich alle Punkte der durch die Punkte (x) und (y) gehenden Geraden in der Form $(x + \lambda y)$ dar. Soll ein solcher Punkt der Gleichung $\Omega(x + \lambda y) = 0$ genügen, so mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}(x_\iota + \lambda y_\iota)(x_\varkappa + \lambda y_\varkappa) = 0 \text{ oder:}$$

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa + 2\lambda \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota y_\varkappa + \lambda^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa = 0.$$

Diese möge kürzer in der Form geschrieben werden:

$$(2)\quad \Omega_{xx} + 2\lambda \Omega_{xy} + \lambda^2 \Omega_{yy} = 0,$$

wo sich die Bedeutung von Ω_{yy} und von $\Omega_{xy} = \Omega_{yx}$ aus der vorangehenden Form ergiebt. Da die Wurzeln der Gleichung (2) sind:

$$(3)\quad \lambda = \frac{-\Omega_{xy} \pm \sqrt{\Omega_{xy}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{yy}},$$

und da das Doppelverhältnis der vier Punkte (x), (y), $(x + \lambda_1 y)$, $(x + \lambda_2 y)$ gleich $\lambda_1 : \lambda_2$ ist, hat das gesuchte Doppelverhältnis den Wert:

$$(4)\quad D_{xy} = \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Um die Beziehung zu finden, in welcher dies Doppelverhältnis zu der Entfernung der beiden Punkte steht, beachten wir folgendes. Drei Punkte a, b, c mögen in gerader Linie liegen und zwar b auf der Strecke ac; werden dann die Entfernungen je zweier dieser Punkte durch (ab), (bc) und (ac) bezeichnet, so ist $(ab) + (bc) = (ac)$. Setzen wir aber $(ac) = -(ca)$, so gilt die Beziehung:

$$(ab) + (bc) + (ca) = 0.$$

In dieser Relation kommen aber die Punkte a, b, c ganz gleichmäfsig vor; sie wird also stets gelten, wenn die drei Punkte in gerader Linie liegen.

Um demnach die Entfernung E_{xy} der Punkte (x) und (y) als Funktion $\psi(D_{xy})$ dieses Doppelverhältnisses darzustellen, wählen wir einen dritten Punkt $(z = x + \mu y)$ auf der Verbindungsgeraden der beiden ersten. Dann mufs sein:

$$E_{yz} + E_{zx} + E_{xy} = 0, \text{ oder}$$
$$\psi(D_{yz}) + \psi(D_{zx}) + \psi(D_{xy}) = 0.$$

Bei Entwicklung dieser Gleichung beachte man, dafs

$$\Omega_{xz} = \Omega_{xx} + \mu\Omega_{xy} \text{ u. s. w.}$$

ist. Dann kommen in den nach (4) zu bildenden Ausdrücken für D_{yz}, D_{zx}, D_{xy} noch Wurzelgröfsen vor, deren Zeichen so zu wählen sind, dafs $D_{yz} \,.\, D_{zy} = D_{zx} \,.\, D_{xz} = D_{xy} \,.\, D_{yx} = 1$ ist. Nachdem eine solche Wahl getroffen ist, bietet die Bestimmung der Funktionalgleichung ψ keine Schwierigkeit. Indessen eröffnet sich ein anderer Weg, der keinerlei Rechnung erfordert.

Man denke wieder nach § 3 jedem Punkte einer Geraden eine Zahl zugeordnet. Wählt man drei eigentliche Punkte auf der Geraden, so mögen ihnen die Zahlen ϱ, σ, ι entsprechen, während den beiden uneigentlichen Punkten die Zahlen α und β zugeordnet sein sollen. Die Doppelverhältnisse je zweier unter den drei ersten Punkten zu den beiden letzten werden dann durch die drei Ausdrücke:

$$\frac{\varrho-\alpha}{\alpha-\sigma} : \frac{\varrho-\beta}{\beta-\sigma}, \quad \frac{\sigma-\alpha}{\alpha-\iota} : \frac{\sigma-\beta}{\beta-\iota}, \quad \frac{\iota-\alpha}{\alpha-\varrho} : \frac{\iota-\beta}{\beta-\iota}$$

dargestellt. Setzt man $\dfrac{\varrho-\alpha}{\varrho-\beta} = \varrho'$ und führt σ', ι' entsprechend ein, so sind die drei Doppelverhältnisse:

$$\frac{\varrho'}{\sigma'}, \quad \frac{\sigma'}{\iota'}, \quad \frac{\iota'}{\varrho'}.$$

Diese sind an die Stelle von D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} zu setzen, so dafs man die Gleichung erhält:

$$\psi\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right) + \psi\left(\frac{\sigma'}{\iota'}\right) + \psi\left(\frac{\iota'}{\varrho'}\right) = 0.$$

Dieser Gleichung genügt man nur, wenn man die Funktion ψ gleich dem mit einer beliebigen Konstanten multiplizierten Logarithmus setzt. In der That ist, wenn c eine beliebige Konstante bezeichnet:

$$c \,.\, \ln\frac{\varrho'}{\sigma'} + c \ln\frac{\sigma'}{\iota'} + c\ln\frac{\iota'}{\varrho'} = 0.$$

Demnach erhalten wir für die Entfernung E_{xy} der Punkte (x) und (y) die Gleichung:

$$(5)\quad E_{xy} = c \,.\, \ln \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist, so mufs c offenbar einen reellen Wert haben; wenn aber dieser Ausdruck negativ ist, so hat man der Konstanten c einen rein imaginären Wert beizulegen. Die letzte Behauptung beweist man durch die folgende Rechnung, welche zugleich den Abstand in reeller Form liefert.

Setzt man $a + bi = M(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so folgt:

$$\ln\frac{a+bi}{a-bi} = \ln\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \ln\frac{e^{\alpha i}}{e^{-\alpha i}} = \ln e^{2\alpha i} = 2\alpha i.$$

Wenn also

$$a = \Omega_{xy},\ b = \sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}\Omega_{xy}}$$

gesetzt wird, so folgt aus

$$M^2 = a^2 + b^2 = \Omega_{xx}\Omega_{yy} \text{ und } M\cos\alpha = a:$$

$$\cos\alpha = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Aus (5) ergiebt sich:

$$E_{xy} = c \,.\, 2\alpha i \text{ oder für } E_{xy} = \alpha k : c = \frac{k}{2i}, \text{ also}$$

$$(6)\quad \cos\frac{E_{xy}}{k} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Die Kurve $\Omega = 0$ soll jetzt in bekannter Weise durch Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 dargestellt werden, und die neue Gleichung sei:

$$(7)\ H_{uu} = \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0.$$

Zwei Gerade (u) und (v) mögen sich schneiden und die vom Schnittpunkte an das Gebilde (7) gelegten Tangenten mögen die Koordinaten haben $(u + \mu_1 v)$ und $(u + \mu_2 v)$. Dann ergeben sich μ_1 und μ_2 als Wurzeln der Gleichung:

$$(8)\ H_{uu} + 2\mu H_{uv} + \mu^2 H_{vv} = 0,$$

wo die Bedeutung der Ausdrücke H_{uu}, H_{uv}, H_{vv} unmittelbar klar ist. Demnach ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{H_{uv} + \sqrt{H_{uv}H_{uv} - H_{uu}H_{vv}}}{H_{uv} - \sqrt{H_{uv}H_{uv} - H_{uu}H_{vv}}}.$$

Dies bleibt bei jeder Transformation ungeändert, durch welche Ω und somit auch H in sich verwandelt wird; es ist also eine Funktion des Winkels ϑ der beiden Geraden. Demnach kann der Winkel ganz entsprechend der Gleichung (5) oder (6) dargestellt werden. Wenn speziell die Wurzel einen imaginären Wert hat, so setze man $c = \frac{1}{2i}$ und erhält auf demselben Wege, der uns vorhin zur Gleichung (6) geführt hat:

$$(9)\ \cos\vartheta = \frac{H_{uv}}{\sqrt{H_{uu}H_{vv}}}.$$

Nennen wir der Kürze wegen den Kegelschnitt $\Omega = 0$ den unendlich fernen Kegelschnitt, so können wir die erhaltenen Resultate in folgender Weise aussprechen:

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem mit einer gewissen Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses der Punkte zu den beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungsgerade mit dem unendlich fernen Kegelschnitt. Ebenso ist der Winkel, den zwei Gerade mit einander bilden, bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, in dem die Geraden zu den beiden Tangenten stehen, welche von ihrem Schnittpunkte aus an den unendlich fernen Kegelschnitt gezogen werden können.

Wenn der Kegelschnitt $\Omega = 0$ imaginär ist, d. h. wenn die Form Ω für reelle Gröfsen x_1, x_2, x_3 nur dadurch zum Verschwinden gebracht werden kann, dafs man $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ setzt, so können auch die Schnittpunkte mit keiner reellen Geraden reell sein. Daher mufs in (5) unter dem Wurzelzeichen eine negative Gröfse stehen; für die Entfernung gilt also die Formel (6). In diesem Falle wird auch bei reellen Werten von u_1, u_2, u_3 die Form H nur für $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ verschwinden können; somit wird der Winkel zweier Geraden (u) und (v) durch die Formel (9) dargestellt. Schon hieraus erkennen wir, dafs hierdurch eine elliptische Raumform dargestellt wird.

Wenn es aber reelle Zahlen giebt, für welche die Form Ω verschwindet, so möge der dargestellte Kegelschnitt nicht zerfallen. Wir betrachten zunächst nur Punkte im Innern des Kegelschnitts, d. h. Punkte von der Eigenschaft, dafs jede hindurchgelegte Gerade den Kegelschnitt schneidet. Dann hat die Gleichung (2) stets zwei reelle Wurzeln; demnach ist die Konstante c in (5) reell zu wählen. Wir können aber auch in (6) für k eine rein imaginäre Gröfse li setzen und erhalten:

$$(10)\quad \mathrm{Ch}\,\frac{e}{l} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}.$$

Wenn sich zwei Gerade im Innern des Kegelschnitts schneiden, so kann offenbar durch den Schnittpunkt keine Tangente an den Kegelschnitt gelegt werden; die Gleichung (8) hat also zwei imaginäre Wurzeln und infolgedessen bleibt die Formel (9) ungeändert. Alles dies steht in Übereinstimmung mit der hyperbolischen Geometrie.

Wollten wir aber den Punkt im Äufsern des Kegelschnitts annehmen, so würden wir zu einem System von Sätzen gelangen, welches mit der Erfahrung nicht übereinstimmt. So werden bei der Ruhe eines Punktes zwei gerade Linien, nämlich die beiden von ihm aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten, in Deckung mit ihrer Anfangslage bleiben; jeder nicht in einer von ihnen gelegene Punkt nähert sich bei unbeschränkter Fortsetzung der Bewegung einer der beiden Tangenten, kann also hierbei nicht in seine Anfangslage zurückkehren. Noch in anderer Weise erkennt man leicht die Unzulässigkeit dieser Bedingung. Für unsere Geometrie ist es wesentlich, dafs jede Gerade mit jeder andern Geraden zur Deckung gebracht werden kann. Wenn aber eine Gerade den Kegelschnitt schneidet, so kann sie durch die zulässigen Transformationen nur in solche Gerade übergeführt werden, welche ebenfalls schneiden, aber nicht in jede beliebige Gerade. Deshalb müssen wir von diesem Falle absehen.

Um die Übereinstimmung der durch die vorstehende Betrachtung gewonnenen Raumformen mit den früher entwickelten noch deutlicher hervortreten zu lassen, denken wir uns die Koordinaten x_1, x_2, x_3 so gewählt, daſs die Form Ω sich als Summe von Quadraten darstellt. Wir wollen zunächst

$$(11)\quad \Omega_{xx} = k^2 x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$$

voraussetzen. Dann gelten für die Transformations-Koeffizienten die in § 9 Gleichung (4) aufgestellten Bedingungen. Zudem können wir, da es nur auf die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ ankommt, die Voraussetzung machen:

$$\Omega_{xx} = \Omega_{yy} = k^2.$$

Dann geht die Gleichung (6) über in:

$$k^2 \cos\frac{e}{k} = k^2 x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Jetzt nimmt H die Gestalt an:

$$(12)\quad H_{uu} = \frac{u_1{}^2}{k^2} + u_2{}^2 + u_3{}^2,$$

und wir können allgemein $H = 1$ voraussetzen. Dadurch wird:

$$\cos \varepsilon = \frac{u_1 v_1}{k^2} + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Die Formeln werden also mit den im vorigen Paragraphen für eine elliptische Raumform aufgestellten identisch.

Der Fall, daſs der Kegelschnitt reell ist und nur Punkte in seinem Innern betrachtet werden, wird aus dem vorigen erhalten, indem wir k^2 mit $-l^2$ vertauschen; wir erhalten also die Formeln einer hyperbolischen Raumform.

§ 11.

Übertragung auf den Raum.

Da die in den §§ 8 und 9 entwickelten Gesetze für jede Ebene gelten, übertragen sich die gewonnenen Resultate unmittelbar auf den Raum. Für einen endlichen Teil desselben, in welchem die am Schluſs des ersten Paragraphen aufgestellten Forderungen erfüllt sind, giebt es nur drei Möglichkeiten, und solange wir nur einen solchen Bereich betrachten, haben wir nur einen hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Raum zu unterscheiden. Jeder ist charakterisiert durch die Form der Transformation, welche für die Verschiebung einer Geraden in sich gilt. Vergleichen wir hiermit die Ergebnisse des vorigen Abschnitts, so folgt, dafs die euklidische Raumform als parabolisch, die Lobatschewskysche als hyperbolisch, dagegen die Riemannsche und ihre Polarform beide als elliptisch zu bezeichnen sind.

Wollen wir ganz auf dem Boden der projektiven Geometrie bleiben, so können wir folgende Erwägung anstellen. Die allgemeine projektive Umgestaltung des Raumes hängt von fünfzehn willkürlichen Parametern, den Verhältnissen der 16 Transformations-Koeffizienten ab. Diese wollen wir so beschränken, dafs die Gesamtheit der auszuwählenden Transformationen nur noch von sechs Parametern abhängt. Allerdings erhalten wir dadurch noch ganz verschiedene sechsgliedrige Transformations-Gruppen. Wir wählen diejenigen aus, für welche jedesmal bei der Ruhe zweier Punkte ein bewegter Punkt bei fortschreitender Bewegung in seine Anfangslage zurückgeführt werden kann; oder was auf dasselbe hinauskommt, wir suchen diejenigen sechsgliedrigen Transformations-Gruppen, welche gestatten, eine Gerade mit jeder andern zur Deckung zu bringen. Dadurch werden wir zu demselben Resultate geführt.

Statt dessen können wir aber auch nach denjenigen projektiven Transformations-Gruppen fragen, welche eine fest gewählte Fläche ungeändert lassen. Wir wollen hierfür eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung voraussetzen, also den Kegel und den Kegelschnitt ausschliefsen. Die Gleichung dieser Fläche sei:

$$\Omega_{xx} \equiv \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0,$$

wo jetzt die vier Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4 benutzt werden. Dann bleiben die Entwicklungen ungeändert, welche sich im vorigen Paragraphen an die Formen Ω und H anschlossen. Somit gelten wieder die Formeln (4), (5), (6), (9) mit dem Unterschiede, dafs jetzt die Summation sich auf die vier Marken 1 ... 4 erstreckt. Soll aber eine Gerade mit jeder andern zur Deckung gebracht werden können, so müssen die durch einen gegebenen Punkt gelegten Geraden die Fläche entweder sämtlich schneiden oder sämtlich nicht schneiden. Daher darf die Fläche keine gerade Linie enthalten; zudem müssen die Punkte, wenn die Fläche reell ist, in ihrem Innern angenommen werden. Wir erhalten also auch hier nur zwei Fälle. Erstens können wir die Fläche als imaginär voraussetzen. Dann ist es gestattet, die Gröfsen x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 so zu wählen, dafs ist:

$$\Omega = k^2 x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = k^2, \text{ und}$$

$$H = \frac{u_1{}^2}{k^2} + u_2{}^2 + u_3{}^2 + u_4{}^2 = 1.$$

In diesem Falle gilt für den Abstand e zweier Punkte (x) und (y) die Relation:

$$k^2 \cos\frac{e}{k} = k^2 x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

und für den Winkel ε zweier Ebenen (u) und (v):

$$\cos\varepsilon = \frac{u_1 v_1}{k^2} + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4.$$

Zweitens dürfen wir die Fläche reell ungeradlinig annehmen. Die entsprechenden Formeln werden erhalten, indem man k^2 durch $-l^2$ ersetzt. Jede der gemachten Voraussetzungen liefert ein System, welches unserer Erfahrung genügt.

Was die übrigen Gebilde zweiter Ordnung und zweiter Klasse betrifft, so übersieht man sofort, dafs sie im allgemeinen nicht zu Grunde gelegt werden dürfen, wenn man die Forderung stellt, dafs eine Gerade mit jeder andern zur Deckung gebracht werden kann. Nur bei einem imaginären Kegelschnitt kann dieser Forderung noch genügt werden. Man könnte daher versucht sein, die parabolische Geometrie auf der Annahme aufzubauen, dafs die zu benutzenden Transformationen einen solchen Kegelschnitt nicht verändern. Soll aber für $x_4 = 0$ zugleich $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$ ungeändert bleiben, so müssen bei Benutzung der Transformationen:

$$X_\iota = \Sigma_\varkappa p_{\iota\varkappa} x_\varkappa \quad \text{für } \iota, \varkappa = 1 \ldots 4$$

die Beziehungen bestehen:

$$p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0,$$
$$p_{11}{}^2 + p_{12}{}^2 + p_{13}{}^2 = p_{21}{}^2 + p_{22}{}^2 + p_{23}{}^2 = p_{31}{}^2 + p_{32}{}^2 + p_{33}{}^2$$
$$p_{11}p_{21} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{23} = \ldots = 0.$$

Da es nur auf die Verhältnisse ankommt, darf man $p_{44} = 1$ annehmen, und dann hangen die Koeffizienten von sieben willkürlichen Gröfsen ab. Um das Wesen der hierdurch bestimmten Mannigfaltigkeit zu erkennen, bilden wir sie auf den parabolischen (euklidischen) Raum ab, indem wir

$$\frac{x_1}{x_4} = x, \quad \frac{x_2}{x_4} = y, \quad \frac{x_3}{x_4} = z$$

setzen und x, y, z als rechtwinklige Cartesische Koordinaten betrachten. Sind dann (x, y, z) und (x', y', z') die Koordinaten zweier Punkte und gehen diese durch die angegebene Transformation in (X, Y, Z), (X', Y', Z') über, so wird sein:

$$(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2=a^2\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}.$$

Somit ändern sich alle Strecken nach dem konstanten Verhältnis a; jedes räumliche Gebilde geht also in ein ähnliches über. Die aufgestellte Transformations-Gruppe stellt also eine Umgestaltung des Raumes dar, bei welcher nicht die Längen, sondern nur die sämtlichen Winkel ungeändert bleiben.

Will man also auf diesem Wege zur parabolischen Geometrie gelangen, so mufs man noch eine weitere Beschränkung einführen. So kann man die Forderung stellen: Es soll nicht möglich sein, bei der Ruhe eines Punktes eine durch denselben gehende Gerade in sich zu verschieben. Statt dessen kann man auch verlangen, dafs bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter Punkt nicht mehr jede beliebige Lage erhalten kann, sondern gezwungen ist, auf einer Fläche zu verbleiben. Endlich dürfen wir zu der Forderung, dafs ein imaginärer Kegelschnitt unverändert bleibt, noch die weitere hinzufügen, dafs die Gesamtheit der Bewegungen nur eine sechsfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bildet. Da der Beweis dieser Behauptungen zwar leicht ist, aber immerhin die ersten Sätze aus der Theorie der Transformations-Gruppen benutzt, möge er nur im Anhange mitgeteilt werden.[26])

Indessen kann man noch auf einem andern Wege zur parabolischen Geometrie gelangen. Die für einen elliptischen Raum angegebenen Formeln gelten für jeden Wert von k^2. Man kann daher nach dem Grenzwerte fragen, dem sich die Formeln bei unbegrenzt wachsendem Werte von k^2 nähern. Den Ausdruck für den Winkel zweier Ebenen erhält man dann unmittelbar. Um den Abstand zweier Punkte darstellen zu können, ersetzen wir den Cosinus durch den Sinus. Dann folgt:

$$k^2 \sin^2\frac{e}{k} = k^2 - k^2\cos^2\frac{e}{k} =$$

$$\frac{(k^2t_1^2+u_1^2+v_1^2+w_1^2)(k^2t_2^2+u_2^2+v_2^2+w_2^2)-(k^2t_1t_2+u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2)^2}{k^2}$$

$$(t_1u_2-t_2u_1)^2+(t_1v_2-t_2v_1)^2+(t_1w_2-t_2w_1)^2+\frac{(u_1v_2-u_2v_1)^2+\cdots}{k^2}.$$

Bei wachsendem k^2 kommen t_1 und t_2 immer näher an eins, u, v, w immer näher an gewisse Längen x, y, z und k sin $\frac{e}{k}$ immer näher an e. Somit gilt die Gleichung:

$$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Derselbe Grenzwert wird aber erhalten, wenn man in einer hyperbolischen Raumform l^2 unbegrenzt wachsen läfst. Demnach stellt die parabolische Raumform die Grenze zwischen der elliptischen und hyperbolischen dar.

Statt die Gesamtheit der projektiven Umgestaltungen durch die Forderung zu beschränken, dafs eine Fläche zweiter Ordnung in sich verbleiben soll, kann man durch manche andere Beschränkung der allgemeinen projektiven Gruppe zur Metrik gelangen. Unter anderem kann man von gewissen Eigenschaften der starren Bewegung ausgehen. Zwar wird es möglich sein, bei passender Wahl der zu Grunde gelegten Eigenschaften die lästigen Rechnungen des § 8 durch einfache und natürliche Entwicklungen zu ersetzen; aber man verläfst bei jedem derartigen Verfahren den rein projektiven Standpunkt. Man fügt nur einen neuen Beweis dafür bei, dafs die Voraussetzungen Euklids auch bei ihrer Beschränkung auf ein endliches Gebiet zur Begründung der Geometrie genügen und die drei bekannten Systeme liefern. Wollen wir aber eine neue Herleitung suchen, die ganz auf dem Boden der Projektivität bleibt, so können wir folgende Erwägung anstellen.

Die projektiven Umgestaltungen des Raumes gestatten in ihrer Gesamtheit nicht nur, jeden Punkt in jeden andern Punkt, sondern auch jede Gerade in jede andere Gerade und jede Ebene in jede andere Ebene zu transformieren. Beschränkt man sich auf einen beliebig kleinen Bereich oder, wie wir der Kürze wegen sagen wollen, auf die Umgebung eines gewissen Punktes, so kann man nach der kleinsten projektiven Gruppe fragen, welche imstande ist, alle hierin gelegenen Punkte, Geraden und Ebenen in einander überzuführen. Hierbei tritt die merkwürdige Vereinfachung ein, dafs man sich auf Ebenen oder auf Geraden beschränken darf, dafs man also etwa nur die Forderung zu stellen braucht: Von der allgemeinen projektiven Gruppe des Raumes soll die kleinste Untergruppe gesucht werden, die imstande ist, alle in der Umgebung eines Punktes gelegenen Ebenen in einander zu transformieren. Dieser Forderung genügt man nur durch die elliptische, die parabolische und die hyperbolische Geometrie. Die kleinste Untergruppe, durch welche die gestellte Forderung befriedigt wird, enthält nämlich noch eine willkürliche Konstante; jenachdem diese positiv, null oder negativ ist, wird die Verschiebung der Geraden in sich (d. h. die projektive Beziehung der Punkte einer Geraden auf einander) durch eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Transformation dargestellt.

Da der Beweis dieser Behauptung einige Sätze aus der Theorie der Transformations-Gruppen voraussetzt, die leider nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden können, ziehe ich es vor, ihn an einer andern Stelle zu veröffentlichen. Auch will ich nicht darauf eingehen, die Frage zu beantworten, welche Beschränkung am besten geeignet ist, die Forderung zu ersetzen, dafs die Untergruppe gerade die geringste Zahl von Parametern haben soll.

§ 12.

Rückblick.

Die volle Bedeutung der auf den vorangehenden Seiten durchgeführten Entwicklungen kann erst im zweiten Bande erkannt werden. Dort werden wir also nochmals auf die Lehren dieses Abschnitts eingehen und einzelne Punkte näher besprechen, welche hier nur angedeutet werden können.

Ein Vorteil, der in rein theoretischer Hinsicht wohl nicht der bedeutsamste ist, aber bei unserer Behandlung am klarsten hervortritt, möge an erster Stelle erwähnt werden. Nachdem es gelungen war, alle Sätze der Projektivität herzuleiten, ohne ein gewisses Gebiet zu verlassen und ohne den Begriff der Länge einer Strecke oder des Winkels zweier Geraden vorauszusetzen, brauchten wir nur einige der einfachsten metrischen Sätze, deren Beweis keinerlei Bedenken unterliegt, anzunehmen, um, gestützt auf projektive Sätze, die Metrik einwurfsfrei aufzubauen. Dabei stellten sich von Anfang an drei verschiedene Fälle als gleichberechtigt heraus; jeder unter ihnen gestattete einen streng folgerichtigen Aufbau und führte zu einem Formelsystem, aus welchem jedesmal die Gesamtheit aller geometrischen Beziehungen vermittelst rein analytischer Folgerungen hergeleitet werden kann. Jede dieser Möglichkeiten wurde charakterisiert durch eine gewisse Gleichung, deren Wesen schon erkannt werden kann, wenn man nur zwei Lagen einer Strecke auf einer einzigen Geraden mit einander vergleicht. Weder der Ausgangspunkt noch der weitere Aufbau gestattete, eine dieser Möglichkeiten zu bevorzugen; ihre theoretische Gleichberechtigung kann also nicht dem geringsten Zweifel unterliegen. Dabei erkennen wir, dafs alle Voraussetzungen, welche in den Lehrbüchern gemacht werden und nicht implicite über einen gewissen endlichen Bereich hinausgehen, speziell also auch die Grundlagen, von denen Euklid ausgeht, wofern man von der Unendlichkeit der Geraden und damit vom Parallel-Axiom absieht, für jede dieser Möglichkeiten ihre Geltung bewahren. Auch bei der ganzen Herleitung waren wir nicht gezwungen, über das einmal gewählte Gebiet hinauszugehen.

Die §§ 24 und 25 des ersten Abschnitts haben zwar auch zu demselben Resultate geführt. Aber dort mufsten wir zunächst die Eigenschaften eines unendlich kleinen Gebietes zu Grunde legen und für ein solches die Übereinstimmung mit der euklidischen Geometrie beweisen. Ein derartiges Verfahren erfordert grofse Vorsicht bei der Herleitung der Sätze und setzt genauere Untersuchungen über die Stetigkeit voraus. Um so erwünschter mufs es uns sein, hier einen Weg gefunden zu haben, welcher von derartigen Erwägungen unabhängig ist.

Die hier benutzten Kleinschen Bezeichnungen für die einzelnen Raumformen bieten manche Vorzüge vor den von Riemann eingeführten. Riemann unterscheidet Räume positiver, verschwindender und negativer Krümmung. Hierdurch sind manche verleitet worden, das Wort Krümmung im geometrischen Sinne zu nehmen, was nicht gestattet ist, während nur gewisse, für den Raum charakteristische Formeln nach ihrer analytischen Seite unterschieden werden sollen. Der Kleinschen Bezeichnung aber liegt ein Prinzip zu Grunde, welches zu keinem Mifsverständnis führen kann. Die Transformation, welche bei Verschiebung einer Geraden in sich angewandt werden mufs, wird ihrer analytischen Natur nach entweder elliptisch oder parabolisch oder hyperbolisch sein. Jede dieser Möglichkeiten ist für die Raumform selbst charakteristisch und deshalb darf der für die Transformation geltende Namen auf die Raumform selbst übertragen werden. Jedoch wird es notwendig sein, die Bezeichnung nur für ein endliches Gebiet der bezeichneten Art und nicht auch für den weiteren Verlauf der Raumform anzuwenden.

Die gröfste Bedeutung haben jedoch die durchgeführten Entwicklungen für die projektive Geometrie, welche auf dem angegebenen Wege erst eine feste Grundlage und einen konsequenten Abschlufs erhält. Nur beiläufig möchte ich darauf hinweisen, dafs von den vier im ersten Abschnitt gefundenen Raumformen die Kleinsche den Anforderungen der Projektivität am vollsten entspricht, da in ihr je zwei Ebenen sich in einer Geraden, je drei Ebenen in einem Punkte schneiden und je zwei Gerade derselben Ebene einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Indem v. Staudt die »unendlich ferne Ebene« hinzunimmt und die auf derselben gelegenen Gebilde als »uneigentliche« von den übrigen Gebilden unterscheidet, bewegt er sich streng genommen auf dem Gebiete der Metrik. Denn die Projektivität führt z. B. »uneigentliche« Punkte in »eigentliche« über, nimmt also beide als gleichberechtigt an. Indem man diese Unterscheidung desungeachtet einführt, erkennt man über der Projektivität ein höheres Prinzip an, welches erst die wahre Grundlage liefert. Diesem Mangel entgehen wir, indem wir die am Schlusse des ersten Paragraphen angegebenen Grundsätze voranstellen und innerhalb des dort bestimmten Gebietes bleiben. Wollen wir dann ein abgeschlossenes Ganzes haben, so werden wir am besten thun, was wir hier der Kürze wegen unterlassen haben, die Theorie der uneigentlichen (d. h. diesem Gebiete nicht angehörenden) Punkte, Geraden und Ebenen durch Betrachtungen zu entwickeln, welche sich ganz in dem angenommenen Bereiche bewegen. Dadurch ist eine Grundlage gewonnen, welche vollständig in sich abgeschlossen ist und der Metrik gar nicht bedarf.

Der »Geometrie der Lage« fügt Staudt sowohl in seinem Hauptwerk als in jedem Hefte seiner »Beiträge« einige Abschnitte bei, welche er nur als Anhang betrachtet wissen will, weil darin metrische Beziehungen entwickelt werden. Den Übergang von der Projektivität zur Metrik kann Staudt natürlich nicht geben; der vorliegende Abschnitt zeigt einen solchen und ergänzt dadurch eine Lücke der Staudtschen Theorie.

Hierüber möchte ich einige Bemerkungen beifügen, selbst auf die Gefahr hin, dafs sie an dieser Stelle nicht allgemein verständlich sind. Die Aufgabe der projektiven Geometrie geht weiter, als sie meistens gefafst wird. Es genügt nicht, die einzelnen Gebilde zu definieren und ihre Eigenschaften zu entwickeln. Wir müssen aufserdem die Gesamtheit der Transformationen untersuchen, dabei aber auch die einzelnen Transformationen klassifizieren und ihre Besonderheiten kennen lernen. Endlich müssen wir wieder die sämtlichen in sich abgeschlossenen Systeme von Transformationen aufstellen und deren charakteristische Eigenschaften entwickeln. Hierdurch tritt die projektive Geometrie in enge Beziehung zur Theorie der Lieschen Transformations-Gruppen. Für den Raum hängt die Gruppe sämtlicher projektiver Umgestaltungen von 15 Parametern ab. Zur Aufgabe dieser Theorie gehört es, die sämtlichen Untergruppen in Klassen einzuteilen. Da interessieren zunächst die eingliedrigen Untergruppen, bei denen jedesmal die Punkte in gewissen Linien und diese Linien sämtlich in sich verbleiben. Aber auch die Untergruppen mit einer gröfsern Zahl von Parametern müssen gefunden werden, und zu ihnen gehören diejenigen, durch welche die Bewegung in einer euklidischen oder nicht-euklidischen Raumform beschrieben wird.

Auch die Frage nach den verschiedenen Möglichkeiten, welche unserer Erfahrung genügen, kommt darauf hinaus, die verschiedenen Untergruppen der allgemeinen projektiven Gruppe aufzustellen und jede zu prüfen, ob sie mit der Erfahrung vereinbar ist. Für einen gewissen allseitig begrenzten Bereich ist diese Frage bereits hier vollständig gelöst. Wie wir aber für den ganzen Raum zum Abschlufs gelangen, müssen wir späteren Darlegungen vorbehalten.

Dritter Abschnitt.

Der mehrdimensionale Raum.

§ 1.

Euklids Definitionen des Punktes, der Linie, der Fläche und des Körpers.

Die beiden ersten Abschnitte beschäftigen sich vor allem mit der Frage, ob die Unendlichkeit der Geraden und das fünfte Postulat Euklids zu den wesentlichen Grundlagen der Geometrie gehören oder ob man die Raumwissenschaft auch aufbauen kann, indem man einerseits die Gerade als geschlossen voraussetzt, andererseits bei der Annahme ihrer Unendlichkeit die Parallelen-Theorie nicht als streng richtig betrachtet. Das Ergebnis unserer Untersuchung legt die Aufgabe nahe, auch die übrigen Voraussetzungen Euklids einer eingehenden Prüfung zu unterziehen. Die vollständige Erledigung dieser Aufgabe müssen wir dem zweiten Bande vorbehalten; an dieser Stelle wollen wir anknüpfen an Euklids Definitionen des Punktes, der Linie, der Fläche und des Körpers, die sich in den Vorbemerkungen zum ersten und zum elften Buche finden und die in wörtlicher Übersetzung folgendermafsen lauten:

I. 1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.
3. Das Äufserste einer Linie sind Punkte.
4. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
5. Das Äufserste einer Fläche sind Linien.

XI. 1. Ein Körper ist, was Länge, Breite und Höhe hat.
2. Eines Körpers Grenze ist eine Fläche.

Die Mangelhaftigkeit dieser Definitionen drängt sich dem Leser sofort auf. So wird in der ersten Definition des elften Buches der Begriff des Körpers auf die von Länge, Breite und Höhe zurückgeführt, also ein einfacher auf schwierigere Begriffe. Denn es ist jedem von vorn herein klar, was ein Körper sei; dagegen mufs der Lehrer die Begriffe: Länge, Breite und Höhe erst entwickeln. Dabei gebraucht er den Körper, aber nicht jeder Körper ist zur Herleitung geeignet; denn schwerlich wird jemand sagen können, was bei der Kugel, dem Oktaeder und den meisten andern Körpern unter Länge, Breite und Höhe zu verstehen sei. In voller Reinheit treten diese Begriffe nur beim rechtwinkligen Parallelepipedon auf, also bei einem Körper, der von sechs Rechtecken begrenzt wird. In jeder Ecke eines solchen Körpers stofsen drei Kanten zusammen und diese werden als Länge, Breite und Höhe unterschieden.

Ferner wird z. B. das Wort Länge nicht immer in demselben Sinne gebraucht; denn unter der Länge eines Körpers wird, wenn überhaupt etwas, so doch nur eine gerade Strecke verstanden, während die zweite Definition des ersten Buches jeder Linie eine Länge beilegt.

Die Begriffe: Fläche, Linie und Punkt finden sich in je zwei Definitionen. Wir dürfen wohl annehmen, dafs durch die Worte: Eines Körpers Grenze ist eine Fläche, nicht die Grenze eines Körpers, sondern die Fläche definiert werden soll. Dann haben wir für jeden solchen Begriff zwei Definitionen, und es bedarf des Nachweises, dafs beide auf eine einzige hinauskommen.

Jede Definition soll uns befähigen, für den definierten Begriff Sätze herzuleiten. Vergebens würde man sich aber nach Sätzen umsehen, bei deren Beweis man etwa davon Gebrauch macht, dafs der Körper Länge, Breite und Höhe hat.

Das sind einige Bedenken, die sich gegen den Wortlaut der mitgeteilten Definitionen geltend machen lassen. Den Sinn, den der grofse Geometer mit seinen Worten verbindet, glauben wir am besten zu treffen, wenn wir dem Körper drei, der Fläche zwei und der Linie eine Dimension beilegen. Thun wir das, so mufs die Zahl der Dimensionen noch erklärt werden.

§ 2.

Die Zahl der Dimensionen und die der Koordinaten.

Die analytische Geometrie gebraucht zur Darstellung der Punkte in der Ebene zwei und im Raume drei Koordinaten. Bei der Darstellung einer Linie macht sie die Koordinaten von einer einzigen veränderlichen Gröfse abhängig, indem sie etwa setzt: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, wodurch angedeutet wird, dafs x, y, z von einer Gröfse t abhangen. Ebenso ergeben sich in vielen Fällen die Eigenschaften einer Fläche dann besonders einfach, wenn man ihre Koordinaten als Funktionen zweier unbeschränkt veränderlichen Gröfsen u und v darstellt, also setzt $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$. Man hat demnach vielfach geglaubt, als Zahl der Dimensionen eines Gebildes die Zahl der unabhängigen Variabeln ansehen zu dürfen, welche bei ihrer Darstellung nötig sind. Es ist aber mifslich, eine Erklärung, welche unbedingt in den Beginn der Geometrie gehört, auf eine der Geometrie an sich ganz fremde Betrachtung gründen zu wollen, und noch dazu auf eine solche, zu deren Begründung recht viele geometrische Sätze erforderlich sind.

Indessen fragt es sich, ob die Zahl der Variabeln, welche zur Darstellung sämtlicher Punkte einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers geeignet sind, notwendig der Zahl der Dimensionen gleich sein mufs. Diese Frage mufs offenbar verneint werden, wenn es z. B. gelingt, den sämtlichen Punkten eines Körpers die sämtlichen Punkte einer Linie so zuzuordnen, dafs jedem Punkte des Körpers ein einziger Punkt der Linie und jedem Punkte der Linie ein einziger Punkt des Körpers entspricht. Das ist aber möglich, wie Hr. G. Cantor zuerst bewiesen hat. Dabei benutzt er den allgemein bekannten Satz, dafs jede irrationale Zahl e zwischen null und eins auf eine einzige Weise in der Form eines unendlichen Kettenbruches

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{\alpha_\nu + \cdots}}}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots)$$

dargestellt werden kann, wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r \ldots$ positive ganze Zahlen sind. Umgekehrt bestimmt eine beliebige Wahl der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r \ldots$ eine einzige Zahl e in der angegebenen Weise.

Man wähle die Kanten eines Würfels gleich eins und fälle von einem Punkte die Senkrechten e_1, e_2, e_3 auf drei seiner Grenzflächen, die in demselben Eckpunkte zusammenstofsen. Nimmt man den Punkt im Innern des Würfels, so müssen die drei Gröfsen e_1, e_2, e_3 zwischen null und eins liegen. Wir nehmen zuerst an, die drei Gröfsen seien irrational. Dann läfst sich jede durch einen unendlichen Kettenbruch darstellen, so dafs wir setzen dürfen:

$$e_1 = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots), \; e_2 = (\beta_1, \beta_2 \ldots), \; e_3 = (\gamma_1, \gamma_2 \ldots).$$

Wenn wir jetzt positive ganze Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ einführen durch die Festsetzung:

$$\varepsilon_1 = \alpha_1, \; \varepsilon_2 = \beta_1, \; \varepsilon_3 = \gamma_1, \; \varepsilon_4 = \alpha_2, \; \varepsilon_5 = \beta_2, \; \varepsilon_6 = \gamma_2 \ldots$$
$$\varepsilon_{3r+1} = \alpha_{r+1}, \; \varepsilon_{3r+2} = \beta_{r+1}, \; \varepsilon_{3r+3} = \gamma_{r+1} \ldots,$$

so bestimmen auch $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\varrho \ldots$ eine einzige Zahl l zwischen 0 und 1.

Umgekehrt kann man von der irrationalen Zahl l ausgehen und erhält eindeutig die drei Zahlen e_1, e_2, e_3 durch die Festsetzung:

$$e_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_7 \ldots \varepsilon_{3r+1} \ldots)$$
$$e_2 = (\varepsilon_2, \varepsilon_5, \varepsilon_8 \ldots \varepsilon_{3r+2} \ldots)$$
$$e_3 = (\varepsilon_3, \varepsilon_6, \varepsilon_9 \ldots \varepsilon_{3r} \ldots)$$

Hierdurch sind allen Punkten im Innern des Würfels, deren Abstände von den Grenzflächen irrational sind, Punkte auf einer geraden Strecke eindeutig so zugeordnet, dafs auch jedem solchen Punkte der Strecke ein einziger Punkt des Körpers entspricht. Diese Zuordnung kann denn auch auf die rationellen Werte ausgedehnt werden. Hiernach ist an sich die Zahl der Variabeln ganz willkürlich, welche zur Darstellung der Punkte eines Gebildes benutzt werden. Diese Zahl kann beliebig kleiner oder gröfser als die der Dimensionen des Gebildes gewählt werden. Sie mufs nur dann der Zahl der Dimensionen gleich genommen werden, wenn die Zuordnung stetig sein soll, wie Herr Netto bewiesen hat.

Wie wenig die Zahl der Dimensionen der der Variabeln entspricht, zeigt ein von Herrn Peano angegebenes Beispiel, wo durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t)$$

alle Punkte einer Fläche definiert werden, obwohl $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ stetige und eindeutige Funktionen von t sind.

Zu dem Ende legt Hr. Peano die Zahl drei als Basis des Zahlensystems zu Grunde und versteht unter den Ziffern a_ν, b_ν, c_ν nur Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2. Dann läfst sich jede Zahl t zwischen null und eins mit Einschlufs der Grenzen in der Form schreiben:

$$(1)\quad t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_\nu}{3^\nu} + \dots = [a_1, \; a_2, \; a_3 \dots a_\nu \dots].$$

Alle irrationalen Zahlen, sowie überhaupt alle Zahlen, deren Nenner keine Potenz von drei ist, lassen nur eine einzige Darstellung zu, die dieser Festsetzung entspricht; d. h. wenn t eine solche Zahl ist, so werden durch die Gleichung (1) in Verbindung mit der Forderung, dafs jedes a_ν eine der drei Zahlen 0, 1, 2 sei, alle Zahlen a_ν vollständig bestimmt. Alle diese Zahlen t rechnet Hr. Peano zur ersten Klasse.

Wenn aber die Zahl t den Nenner 3^n hat, so kann man (mit Ausschlufs der Zahlen 0 und 1 selbst) sie entweder in der Form

$$(2)\quad [a_1, \; a_2 \dots a_{n-1}, \; a_n, \; 2, \; 2 \dots].$$

oder in der Form

$$(3)\quad [a_1, \; a_2 \dots a_{n-1}, \; a'_n, \; 0, \; 0 \dots]$$

darstellen, wo die $n-1$ ersten Ziffern in (2) und (3) übereinstimmen, a_n von 2 verschieden, $a'_n = a_n + 1$ ist, und wo in (2) auf a_n lauter Ziffern 2, und in (3) auf a'_n lauter Ziffern null folgen. Alle diese Zahlen t werden der zweiten Klasse zugerechnet.

Jetzt wird zu jeder Ziffer a die Komplementziffer $ka = 2 - a$ eingeführt, so dafs ist:

$$(4)\quad k0 = 2, \; k1 = 1, \; k2 = 0.$$

Ferner soll sein:

$$(5)\quad k^2a = k(ka) = 2 - ka, \; \dots \; k^n a = 2 - k^{n-1}a, \; \dots$$

Um der durch die Gleichung (1) definierten Zahl t zwei weitere Zahlen zuzuordnen, setze man:

$$b_1 = a_1, \; c_1 = k^{a_1} a_2, \; b_2 = k^{a_2} a_3, \; c_2 = k^{a_1 + a_2} a_4 \; \dots$$

$$(6)\quad b_n = k^{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \; c_n = k^{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}} a_{2n}.$$

Dann soll entsprechend der Gleichung (1) sein:

$$(7)\quad x = [b_1, \; b_2 \dots b_\varrho \dots], \; y = [c_1, \; c_2 \dots c_\varrho \dots].$$

Hiernach sind x und y eindeutige Funktionen von t. Denn offenbar sind alle Ziffern b und c bestimmt, sobald die Ziffern a gegeben sind. Wenn aber die Zahl t der zweiten Klasse angehört und demnach in den Formen (2) und (3) dargestellt werden kann, so erhält man auch für x und y je zwei verschiedene Darstellungen; man kann aber zeigen, dafs diese jedesmal denselben Wert liefern. Demnach bestimmt jeder Wert von t ein einziges Wertepaar (x, y).

Zweitens sind x und y stetige Funktionen von t. Sollen sich nämlich x und x_0 nur um $\frac{1}{3^\mu}$, y und y_0 nur um $\frac{1}{3^\nu}$ unterscheiden, so erkennt man, dafs sich auch t und t_0 nur um $\frac{1}{3^\varrho}$ unterscheiden dürfen und dafs man μ, ν, ϱ gleichzeitig beliebig grofs machen kann.

Umgekehrt bestimmt jede Wahl der Ziffern $b_1, b_2 \ldots$ und $c_1, c_2 \ldots$ ein einziges System der Ziffern a. Denn aus den Gleichungen (6) ergiebt sich unmittelbar:

$$a_1 = b_1,\; a_2 = k^{b_1} c_1,\; a_3 = k^{c_1} b_2,\; a_4 = k^{b_1 + b_2} c_2 \ldots$$
$$a_{2n-1} = k^{c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}} b_n,\; a_{2n} = k^{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} c_n.$$

Jede Darstellung der Zahlen x und y, welche den Gleichungen (7) entspricht, liefert somit einen einzigen Wert von t. Gehören also die Zahlen x und y beide der ersten Klasse an, so bestimmen sie eine einzige Zahl t; wenn aber eine dieser Zahlen in die zweite Klasse zu rechnen ist, so gehören zum Wertepaar (x, y) zwei Zahlen t, und wenn x und y beide eine Potenz von drei zum Nenner haben, so erhält man aus ihnen vier verschiedene Zahlen t.

Man kann demnach eine Strecke auf das Innere eines Quadrats (mit Einschlufs der Grenzen) so beziehen, dafs jedem Punkte der Linie ein einziger Punkt des Quadrats und jedem Punkte des Quadrats ein oder zwei oder vier Punkte der Linie entsprechen.

Indem man die Variabele t als die Zeit, x und y als die Koordinaten eines Punktes auffafst und die Ortsveränderung dieses Punktes eine Bewegung nennt, kann man dem gewonnenen Resultat auch folgenden Ausspruch geben:

Man kann einen Punkt so bewegen, dafs er jeden Punkt im

Innern und auf der Grenze eines Quadrats erreicht und durch jeden einzelnen Punkt entweder einmal oder zweimal oder viermal hindurchgeht.[27])

§ 3.

Die Raumgebilde durch Bewegung erhalten.

Daſs ein bewegter Punkt eine Linie, eine bewegte Linie eine Fläche und eine bewegte Fläche einen Raumteil beschreibt, findet in der Geometrie oftmalige Anwendung. Wenn manche aber glauben, hierauf die Definitionen der Linie, der Fläche und des Körpers gründen zu können, so möchten wir zunächst an das letzte Ergebnis des vorigen Paragraphen erinnern, wo wir gesehen haben, daſs ein bewegter Punkt eine ganze Fläche beschreiben kann. Um nicht gar zu breit zu werden, wollen wir in den nächsten Darlegungen von dieser Möglichkeit ganz absehen.

Gegen die angegebene Definition lassen sich auch noch viele andere Bedenken geltend machen. Vor allem dürfte es am natürlichsten sein, vom Körper auszugehen;, denn die Natur enthält nur Körper, und der Begriff des Punktes wird erst durch Abstraktion gewonnen.

Dazu kommt, daſs nicht alle Linien durch Bewegung von Punkten und auch wohl nicht alle Flächen durch Bewegung von Linien entstehen. Soll nämlich eine Linie durch die Bewegung eines Punktes entstehen, so muſs der bewegte Punkt an jeder Stelle eine gewisse Geschwindigkeit haben; höchstens muſs die Anzahl der Stellen, an denen von Geschwindigkeit nicht gesprochen werden kann, eine endliche sein. Wenn also die Kurve durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellt wird, so muſs die Funktion $f(x)$ im allgemeinen einen bestimmten Differentialquotienten haben. Nun hat bereits Riemann stetige Funktionen einer Veränderlichen gebildet, für welche in jedem endlichen Intervalle unendlich viele Stellen ohne Differentialquotienten vorkommen. Herr Weierstraſs hat sogar gezeigt, daſs es auch stetige endliche Funktionen giebt, welche an keiner Stelle einen Differentialquotienten besitzen. Als Beispiel einer solchen Funktion stellt er den Wert der Reihe auf:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$$

wo x eine reelle Variabele, a eine ungerade ganze Zahl und b eine positive Konstante < 1 ist, und wo die Bedingung erfüllt ist: $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Wohl unabhängig hiervon hat Cellérier die gleiche Eigenschaft von der Funktion bewiesen, welche durch die unendliche Reihe definiert wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a^n x)}{a^n},$$

wo a eine ganze positive, nicht zu kleine Zahl ist. Die Einfachheit dieser Beispiele läfst vermuten, dafs dieselbe Eigenschaft recht vielen Funktionen zukommt, dafs also auch recht viele Linien nicht durch Bewegung eines Punktes entstehen können.[28]

Dafs durch Bewegung einer Fläche, einer Linie und eines Punktes im allgemeinen ein Gebilde von einer Dimension mehr erzeugt wird, mufs also zu den Lehrsätzen der Geometrie gezählt werden. Der bewegte Punkt beschreibt immer eine Linie; dagegen wird die bewegte Linie entweder in sich verschoben oder sie beschreibt eine Fläche. Im zweiten Falle begrenzt die Linie in irgend einer Lage, welche sie bei der Bewegung erlangt, Teile der erzeugten Fläche gegen einander. Im ersten Falle ist die Linie, wofern sie weder geschlossen noch unendlich ist, ein Teil der von ihr beschriebenen. Sind E und E' irgend zwei Lagen der bewegten Linie, so haben diese entweder einen Teil gemeinschaftlich oder man kann weitere Lagen E_1, $E_2 \ldots E_n$, welche von der Linie bei der Bewegung gedeckt werden, so einschieben, dafs E und E_1, E_1 und E_2, überhaupt je zwei auf einander folgende Lagen einen Teil mit einander gemeinschaftlich haben. Dasselbe gilt von einer bewegten Fläche; hier sind wieder zwei Fälle möglich. Dagegen wird ein bewegter Körper stets nur einen Raumteil beschreiben, welchem der von dem Körper in der Anfangslage eingenommene als Teil angehört oder der als Ganzes damit identisch ist. Hierdurch tritt die Zahl drei in eine ganz enge Beziehung zum Raume und wir fragen uns: Könnte nicht auch ein dreidimensionales Gebilde so bewegt werden, dafs es ein Gebilde von mehr Dimensionen beschriebe? Dieselbe Frage wird uns im wesentlichen im folgenden Paragraphen wieder entgegentreten.

§ 4.

Die Zahl der Dimensionen eines Raumgebildes.

Die einzig richtige Definition der Raumgebilde, wie sie auch jetzt fast regelmäfsig in den Lehrbüchern gegeben wird, geht vom Begriffe des Körpers und dem der Teilung aus. Man teile einen Körper, so wird die gegenseitige Grenze eine Fläche sein; teilt man aber die Fläche wieder, so wird die gegenseitige Grenze der beiden Teile durch eine Linie gegeben, und wenn man endlich eine Linie in zwei Teile zerlegt, so besteht die gegenseitige Grenze in einem Punkte. Auch bei dieser Definition sind gewisse Vorsichtsmafsregeln nicht aufser acht zu lassen; ebenso bedarf das Wort Grenze noch einer nähern Erklärung. Hierauf wollen wir jedoch erst an einer spätern Stelle eingehen.

Mit dieser Definition hängt eine genaue Erklärung für den Ausdruck zusammen: Der Raum hat drei Dimensionen. Wenn ein Raumteil oder ein Körper in zwei Teile zerlegt wird, so wird die gegenseitige Grenze noch teilbar sein; zerlegt man diese Grenze wieder, so ist das neue Grenzgebilde wieder teilbar; wird dasselbe geteilt und das dadurch erhaltene Grenzgebilde bestimmt, so ist das neue Grenzgebilde unteilbar. Anders ausgedrückt: Man teile einen Körper in zwei Teile und bezeichne ihre gegenseitige Grenze als ein Grenzgebilde erster Ordnung; dies ist teilbar, und wenn es in zwei Teile zerlegt wird, so bezeichne man die gegenseitige Grenze als ein Grenzgebilde zweiter Ordnung; auch dieses ist teilbar und führt durch eine Zerlegung in zwei Teile zum Grenzgebilde dritter Ordnung; dieses ist aber, ganz unabhängig von dem Körper, von dem man ausging, und von der Art der Teilungen, welche der Reihe nach ausgeführt sind, stets unteilbar. Ohne ein Mifsverständnis befürchten zu müssen, können wir daher sagen: Führt man der Reihe nach drei Teilungen aus, indem man jede Teilung mit einem Übergang zur Grenze verbindet, so gelangt man zum unteilbaren Gebilde. Hiermit ist die Erklärung für die Dreizahl der Dimensionen des Raumes gegeben; wir können damit die Erklärung für die Zahl der Dimensionen, welche ein Raumgebilde besitzt, verbinden, indem wir sagen: Die Grenze von irgend zwei Teilen, in welche ein dreidimensionales Gebilde zerlegt wird, ist ein Gebilde von zwei Dimensionen; die Grenze von irgend zwei Teilen, in welche ein zweidimensionales Gebilde zerlegt wird, besitzt eine Dimension; dagegen ist die gegenseitige Grenze zweier Teile eines eindimensionalen Gebildes unteilbar.

Statt das Wort Dimension zu gebrauchen, spricht man auch von Ausdehnung und sagt, der Raum sei dreifach, die Fläche zweifach, die Linie einfach ausgedehnt.

Die Zahl drei, welche auf diese Weise erhalten wird und welche für den Raum durchaus charakteristisch ist, wurde auch im vorigen Paragraphen erhalten. In beiden Fällen konnte ihr (wenigstens zunächst) eine begriffliche Notwendigkeit keineswegs zugesprochen werden. Warum führt gerade die dreimalige Teilung (in dem angegebenen Sinne) auf das unteilbare Gebilde, und weshalb führt nach der Darstellung des vorigen Paragraphen die dreimal nach einander ausgeführte Bewegung vom Punkte aus zu einem Gebilde, welches nur noch in sich bewegt werden kann? Allerdings haben manche philosophische Systeme Beweise dafür beibringen wollen, dafs die Dreizahl der Dimensionen im Wesen des Raumes begründet sei. Meistens ist aber dann schon die Fragestellung ganz unrichtig oder der Beweis macht einen Cirkel, weil die Dreizahl bereits axiomatisch im Beweise vorausgesetzt wird. Bei allen solchen Versuchen hat es mir immer unmöglich geschienen, dafs jemand im Ernst an die Beweiskraft der Gründe glauben könnte. Es wird also wohl nicht nötig sein, die Versuche genauer zu prüfen; es genüge, die Frage selbst noch in folgender Form auszusprechen: Ist es begrifflich gestattet anzunehmen, dafs für ein Seiendes, welches geteilt werden kann und dessen Teile eine gegenseitige Grenze haben, erst eine mehr als dreimal ausgeführte Teilung, jedesmal mit einem Grenzübergange verbunden, auf das unteilbare Gebilde führt?

Dafür, dafs diese Frage nicht unbedingt verneint werden darf, kann man wohl den Umstand anführen, dafs die Eigenschaften der Ebene, also eines zweidimensionalen Gebildes, ganz denen des Raumes entsprechen. Ebenso haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, dafs dem dreidimensionalen Lobatschewskyschen Raume die Flächen konstanter negativer Krümmung und dem dreidimensionalen Riemannschen Raume die Kugelflächen im euklidischen Raume entsprechen.

Andererseits ist behauptet worden, der Raum besitze eine gröfsere Zahl von Dimensionen und scheine uns nur dreidimensional zu sein. Da die Gründe, welche für diese Behauptung angeführt werden, aber nicht mathematischer Natur sind, müssen wir von ihrer Prüfung hier absehen. Zudem ist es für die folgenden Untersuchungen gleichgültig, ob der Leser annimmt, die Erfahrung beweise streng die Dreizahl der Dimensionen des Raumes, oder ob er meint, die Erfahrung gestatte die Annahme einer gröfseren Zahl von Dimensionen. Ich selbst bin, wie ich schon hier erwähnen möchte, der festen Überzeugung, dafs die Dreizahl der Dimensionen durch die Erfahrung aufs strengste erwiesen wird, und ich kann allen gegenteiligen Gründen keine Beweiskraft beilegen.

Um aber zu einer Antwort auf die Frage zu gelangen, ob ein mehrdimensionaler Raum begrifflich möglich sei, wenden wir uns zu der sogenannten mehrdimensionalen Geometrie. Wir gehen von der Analysis aus und werden dann immer mehr zu einer Wissenschaft gelangen, welche den Namen der Geometrie verdient.[29])

§ 5.

Grafsmanns Ausdehnungslehre.

Ehe wir zu den angekündigten Entwicklungen übergehen, wird es notwendig sein, der ältesten, bereits hoch entwickelten Theorie zu gedenken, welche zuerst über den mehrdimensionalen Raum aufgestellt ist. Es ist Grafsmanns Ausdehnungslehre, von der uns hier aber nur ein kleiner Teil interessiert. Dabei schliefsen wir uns, meistens mit den eigenen Worten des Auktors, dem Überblick an, welchen Grafsmann selbst bereits im Jahre 1845 im 6. Bande von Grunerts Archiv veröffentlicht hat.[30])

Grafsmann hebt hervor, dafs die Sätze der Raumlehre eine Tendenz zur Allgemeinheit haben, die in ihr vermöge ihrer Beschränkung auf drei Dimensionen keine Befriedigung findet. Er erläutert dies an zwei Beispielen: 1. Zwei gerade Linien derselben Ebene schneiden sich in einem Punkte, ebenso eine Ebene und eine Gerade, zwei Ebenen in einer geraden Linie, vorausgesetzt, dafs die Geraden, oder die Ebene und die Gerade, oder die Ebenen nicht zusammenfallen, und die Durchschnitte im Unendlichen mitgerechnet werden. Werden der Punkt, die Gerade, die Ebene, der Körperraum beziehlich als Gebiete erster, zweiter, dritter und vierter Stufe aufgefafst, so liegt darin der allgemeine Satz angedeutet, dafs ein Gebiet von a^{ter} und eins von b^{ter} Stufe, wenn sie in einem Gebiet von c^{ter} Stufe, aber auch in keinem Gebiet von niedrigerer Stufe vereinigt sind, ein Gebiet $(a + b - c)^{ter}$ Stufe gemeinschaftlich haben; aber die Raumlehre kann diesen Satz nur für c kleiner oder gleich 4 zur Anschauung bringen. 2. Der Flächenraum eines Dreiecks ist die Hälfte von dem eines Parallelogramms, dessen Seiten mit zwei Seiten des Dreiecks gleich lang und parallel sind, der Körperraum des Tetraeders $\frac{1}{6}$ von dem des Parallelepipedums, dessen Kanten mit drei in einem Punkte zusammentreffenden Kanten des Tetraeders gleich lang und parallel sind. Darin scheint der Satz angedeutet: Der Raum, welcher zwischen n Punkten liegt, die in einem Gebiete n^{ter} Stufe (und in keinem von niederer Stufe) vereinigt sind, ist $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}$ von dem Raume eines Gebildes, dessen Begrenzungslinien den von einem der n Punkte zu den übrigen gezogenen gleich und parallel sind.

Um sich von diesen Schranken zu befreien, ersetzt Grafsmann den Punkt durch irgend ein Element und die Bewegung durch stetige Änderung des Zustandes. Dann entspricht der Linie die Gesamtheit der Elemente, in die ein seinen Zustand änderndes Element übergeht. Er erläutert dies in folgenden Worten:

Die Linie kann als Gesamtheit der Punkte betrachtet werden, in die ein seinen Ort stetig ändernder Punkt übergeht. Substituieren wir hier dem Punkt irgend ein Ding, welches einer stetigen Änderung irgend eines Zustandes, den es hat, fähig ist, und abstrahieren nun von allem anderweitigen Inhalte des Dinges und aller Besonderheit dieses seines Zustandes und nennen das von allem anderweitigen Inhalte abstrahierte Ding das Element, so gelangen wir zu dem aufgestellten Begriffe.

Nun setzt er es als einen Grundbegriff voraus, was es heifse, dafs ein Element von irgend zwei verschiedenen Zuständen aus dieselbe Änderung erleide. Es hängt das damit zusammen, dafs er den Begriff der Richtung als einen absolut festen Begriff ansieht, in dem Sinne, welchen wir im dritten Paragraphen des ersten

Abschnitts (S. 5) behandelt haben. Demnach definiert er jetzt: Wenn ein Element seinen Zustand stets auf gleiche Weise ändert, so dafs, wenn aus einem Elemente a des Gebildes durch eine solche Änderung ein anderes Element b desselben hervorgeht, dann durch eine gleiche Änderung aus b ein neues Element c desselben Gebildes hervorgeht, so entsteht das der geraden Linie entsprechende Gebilde, das Gebiet zweiter Stufe.

Aus dem Gebiet zweiter Stufe läfst er in gleicher Weise das Gebiet dritter Stufe hervorgehen, und definiert ganz allgemein:

Wenn man alle Elemente eines Gebietes n^{ter} Stufe einer und derselben Änderungsweise unterwirft, welche zu neuen (in jenem Gebiete nicht enthaltenen) Elementen führt, so heifst die Gesamtheit der durch diese Änderungsweise und die entgegengesetzte erzeugbaren Elemente ein Gebiet $(n+1)^{ter}$ Stufe; das Gebiet dritter Stufe entspricht der Ebene, das vierter dem ganzen Raume.

Die Wissenschaft, welche sich mit allen in dieser Weise gewonnenen Gebilden beschäftigt, nennt Grafsmann die Ausdehnungslehre. Dieselbe umfafst die Raumlehre in sich, einmal insofern der Begriff der Änderung allgemeiner ist als der der Bewegung, dann aber auch, weil sie die Schranken überschreitet, welche der Geometrie durch die Beschränkung auf drei Dimensionen gezogen sind.

Ohne in eine Kritik einzutreten, müssen wir der Grofsartigkeit der Anlage volle Bewunderung zollen; wir wollen auch die Bemerkung beifügen, dafs der wirkliche Aufbau des Systems ganz derselben hohen Auffassung entspricht, die sich in den Grundlagen dokumentiert.

§ 6.

Analytische Probleme von der Geometrie gestellt.

Indem die Analysis auf die Geometrie angewandt wurde, wurden die geometrischen Probleme in analytische verwandelt. Den Vorteil davon hatten beide Zweige der Mathematik: die Geometrie, indem ein Problem, welches ihre eigenen Kräfte überstieg, gelöst und ihr selbst dadurch eine Erweiterung verschafft wurde; die Analysis, da ihr Probleme vorgelegt wurden, welche nicht eine Folge willkürlicher Fragestellung waren, sondern in der Wissenschaft selbst ihren Grund hatten. Dadurch bot das analytische Problem schon von selbst eine gewisse Gewähr, dafs sich die Lösung werde finden lassen, und wenn sie gefunden war, so hatte die Analysis einen Fortschritt zu verzeichnen. Nachdem aber einmal ein solches Problem gelöst ist, liegt für die Analysis nichts näher, als dasselbe von ihrem Standpunkte aus zu erweitern, ohne Rücksicht darauf, ob das neue Problem noch eine Beziehung zur Geometrie hat oder nicht.

Ich kann nicht die Absicht haben, einen genauen historischen Überblick über die einzelnen Probleme zu geben, bei denen die vorgezeichnete Entwicklung hervortritt. Auch sind die hierher gehörigen Untersuchungen mittlerweile meistens Teile derjenigen gröfseren Theorieen geworden, welche in den folgenden Paragraphen dargelegt werden müssen. Deshalb mufs ich mich damit begnügen, auf zwei Beispiele hinzuweisen.

Die mehrfachen Integrale verdanken ihre erste Aufstellung offenbar der Geometrie; führt doch die Ausmessung der Flächen und der Körper unmittelbar auf zweifache und dreifache Integrale. Andererseits finden diese Integrale wesentliche Unterstützung von der Geometrie. Will man sich das Wesen des Doppelintegrales

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy$$

vorstellen, so betrachtet man x und y als rechtwinklige Koordinaten einer Ebene; die Grenzen des Integrals werden dann durch eine geschlossene Linie angegeben. Für den Fall, dafs für alle Werte im Integrationsbezirk die Funktion $f(x, y)$ endlich und stetig ist, denkt man sich in jedem Punkte der Ebene auf ihr die Senkrechte nach derselben Seite errichtet und ihre Länge im Punkte (x, y) gleich dem entsprechenden Werte von $f(x, y)$ gemacht. Dann stellt das Integral den Rauminhalt eines gewissen Körpers dar: als Grundfläche kann das Innere der genannten Kurve betrachtet werden; die Seitenfläche besteht aus der Gesamtheit der senkrechten Strecken, welche in den Punkten der Kurve errichtet sind, also in einer zylindrischen Fläche (im weiteren Sinne), und die Endfläche wird von einer gewissen krummen Fläche gebildet. Die geometrische Darstellung läfst aber die wichtigsten allgemeinen Gesetze eines solchen Integrals unmittelbar hervortreten, nämlich den Satz über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge in der Integration, und den Satz über die Transformation eines solchen Integrals, d. h. die neue Form, welche erhalten wird, wenn an die Stelle von x und y andere Variabele eingeführt werden.

Eine gleiche Vorstellung ist nicht mehr möglich für das dreifache Integral

$$\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Da die Grenzen des Integrals durch eine analytische Beziehung zwischen x, y, z bestimmt sind, so deute man die Variabeln als rechtwinklige Koordinaten des Raumes und lasse die Grenze durch eine Fläche bestimmt sein, von der wir hier annehmen wollen, dafs sie geschlossen sei. Das Innere des von dieser Fläche begrenzten Körpers teile man in lauter Würfel, deren Grenzflächen den Koordinatenebenen parallel sind, und bestimme den Wert, welchen die Funktion $f(x, y, z)$ im Schwerpunkt eines jeden solchen Würfels hat. Mit diesem Werte multipliziere man den Rauminhalt des Würfels, addiere über alle Würfel und bestimme den Grenzwert, welchen diese Summe erhält, wenn man die Kante aller dieser Würfel immer kleiner werden läfst; den so erhaltenen Grenzwert bezeichnet man als den Wert des Integrals. Auch jetzt folgen die wichtigsten Sätze über das dreifache Integral mit grofser Leichtigkeit aus der geometrischen Darstellung; bringt man umgekehrt die angewandten geometrischen Vorstellungen in das analytische Gewand, so erhält man einen rein analytischen Beweis.

Die Analysis ist aber bei den dreifachen Integralen nicht stehen geblieben; sie darf sich auch nicht mit dieser Zahl drei begnügen, sondern mufs die entsprechenden Gesetze für jede beliebige Zahl aufstellen. Nun wird es aber schon schwer, genau anzugeben, was man unter dem n-fachen Integrale

$$\int\int\ldots\int f(x_1 \ldots x_n)\,dx_1\,dx_2\,dx_n$$

zu verstehen hat. Ebenso mufs man wünschen, für die Beweise diejenige Erleichterung erhalten zu können, welche die Geometrie bei den zwei- und dreifachen Integralen bietet.

Um an einem weiteren Beispiele die Beziehungen der Geometrie zur Analysis zu erkennen, wähle man das System der Differentialgleichungen:

$$(1)\quad \frac{dx_1}{dt} = X_1,\quad \frac{dx_2}{dt} = X_2,\quad \frac{dx_3}{dt} = X_3,$$

wo X_1, X_2, X_3 eindeutige analytische Funktionen von $x_1 x_2 x_3$ sind. Betrachten wir hier x_1, x_2, x_3 als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P des Raumes und t als die Zeit, so definieren diese Gleichungen die Geschwindigkeit eines Punktes als Funktionen seiner Koordinaten. Die allgemeine Lösung des Problems erscheint in der Form:

$$(2)\ x_1 = \varphi_1 (t, C_1, C_2, C_3),\ x_2 = \varphi_2 (t, C_1, C_2, C_3),$$
$$y_2 = \varphi_3 (t, C_1, C_2, C_3),$$

wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Konstanten sind. Eine besondere Lösung

$$x_1 = \varphi_1 (t),\ x_2 = \varphi_2 (t),\ x_3 = \varphi_3 (t)$$

liefert bei stetiger Veränderung der Zeit t eine gewisse Linie, welche der Punkt P beschreibt; dieselbe heifst eine Bahnkurve oder Trajektorie. Somit entspricht jeder besondern Lösung eine Bahnkurve und umgekehrt.

Da die Funktionen X_1, X_2, X_3 eindeutig sind, so geht durch jeden Punkt des Raumes eine und nur eine einzige Bahnkurve. Dieser Satz erleidet nur eine Ausnahme, wenn eine der drei Funktionen unendlich wird oder wenn alle drei zugleich den Wert null annehmen; solche Punkte heifsen singuläre Punkte.

Wir betrachten im Raume irgend eine Kurve, welche nicht selbst eine Trajektorie ist. Dann geht durch jeden Punkt dieser Kurve eine Trajektorie und ihre Gesamtheit bestimmt eine Fläche, die Trajektorienfläche. Eine solche Fläche kann, wofern sie nicht durch einen singulären Punkt hindurchgeht, durch keine Trajektorie geschnitten werden. Sobald eine geschlossene Trajektorienfläche existiert, teilt sie den Raum in zwei Teile, und keine Trajektorie kann aus dem einen in den andern Teil übertreten. Wenn also die Anfangslage des Punktes P innerhalb dieser Fläche sich befindet, so wird der Punkt auch während der ganzen Bewegung im Innern verbleiben; läfst man auch die Zeit t von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, so bleiben die drei Gröfsen x_1, x_2, x_3 unterhalb gewisser Grenzen. Diesen Fall bezeichnet man als Stabilität. Somit ist die wichtige analytische Frage nach der Stabilität auf die geometrische Untersuchung zurückgeführt, ob es geschlossene Flächen der bezeichneten Art gebe. [31])

Wir haben hier rein analytische Probleme, deren Aufstellung und deren Lösung dadurch besondere Klarheit erhält, dafs man sie mit geometrischen Anschauungen in Zusammenhang bringt. Man kann es beklagen, dafs das gleiche Hülfsmittel bei einer gröfsern Zahl von Dimensionen versagt; man wird aber wünschen, das Problem, die einzelnen Schritte zu seiner Lösung und das Resultat wenigstens in ähnlicher Weise aussprechen zu können, wie es für $n = 3$ möglich ist. Dann mufs man eine neue Nomenklatur schaffen, und es liegt nichts näher, als diese der Sprache der Geometrie nachzubilden.

§ 7.

Analytische Behandlung der Projektivität.

Wir wollen die Rechnungen, welche die projektive Geometrie für vier Variabele ausführt, auf eine beliebige Zahl von Variabeln übertragen. Dabei wird von jedem geometrischen Satze abgesehen und nur die Rechnung und deren Ergebnisse berücksichtigt. Dagegen werden wir einen Ausdruck einführen, welcher der geometrischen Anwendung für vier Variabele entspricht und welcher uns gestattet, die einzelnen Schritte der Rechnung begrifflich zu verfolgen und die Resultate in bequemer Form auszusprechen.[32])

Zu dem Zwecke gehen wir von $n+1$ Variabeln $x_1, x_2 \dots x_{n+1}$ aus und betrachten nur deren Verhältnisse. Wir schliefsen daher den Fall aus, dafs alle Variabele den Wert null erhalten, und betrachten die Wertsysteme $(a_1, a_2 \dots a_{n+1})$ und $(\omega a_1, \omega a_2 \dots \omega a_{n+1})$ für ein nicht-verschwindendes ω als identisch. Jedes derartige Wertsystem bezeichnen wir als einen Punkt, die Gesamtheit aller nennen wir den Raum, und irgend eine stetige Mannigfaltigkeit von Punkten ein Gebilde. Wenn nach willkürlicher Wahl von ν Verhältnissen sich nur eine endliche oder wenigstens eine diskrete Anzahl der $n-\nu$ weiteren Verhältnisse ergiebt, so bezeichnen wir das Gebilde als ν dimensional. Wir transformieren den Raum, indem wir an Stelle der Variabeln x neue Gröfsen y einführen durch die Gleichungen:

$$(1) \quad x_\alpha = \sum_{\varkappa} p_{\alpha\varkappa}\, y_\varkappa,$$

wo die $(n+1)^2$ Konstanten $p_{\alpha\varkappa}$ ganz willkürlich sind und nur der Beschränkung unterliegen, dafs die aus ihnen gebildete Determinante nicht verschwindet. Weil es nur auf die Verhältnisse ankommt, sind auch nur die Verhältnisse der Konstanten wesentlich, und somit hangen alle derartigen Transformationen von $n^2 + 2n$ willkürlichen Konstanten ab. Diese Transformationen haben die Eigenschaft, dafs irgend zwei Transformationen nach einander ausgeführt wieder eine Transformation des Systems ergeben; d. h. verwandelt man durch (1) die x in y und dann durch eine ähnliche Transformation $y_\varkappa = q_{\varkappa 1} z_1 + q_{\varkappa 2} z_2 + \ldots$ die y in z, so kann man auch durch eine lineare Transformation die x in die z umwandeln.

Soll eine Gleichung $\varphi(x_1 \ldots x_{n+1}) = 0$ ein $(n-1)$ dimensionales Gebilde darstellen, so mufs die linke Seite homogen in den Variabeln sein, da sie sich nicht ändern darf, wenn man die Variabeln mit einer beliebigen Zahl multipliziert. Wählen wir speziell die lineare Form $\Sigma a_\varkappa x_\varkappa$, so kann dieselbe durch die Transformation (1) in jede Form $\Sigma b_\varkappa y_\varkappa$ verwandelt werden, da man durch (1) zuerst $\Sigma a_\varkappa x_\varkappa$ in z_1 und dieses in $\Sigma b_\varkappa y_\varkappa$ umwandeln kann. Sucht man alle Wertsysteme, welche der Gleichung $\Sigma a_\varkappa x_\varkappa = 0$ genügen, so kann man $n-1$ Verhältnisse beliebig wählen und dann das letzte bestimmen. Wenn z. B. a_{n+1} von null verschieden ist, so berechnet man nach beliebiger Wahl von $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ das Verhältnis $x_{n+1} : x_n$. Wir nennen die Gesamtheit der Punkte, welche dieser Gleichung genügen, eine $(n-1)$ dimensionale Ebene und erhalten den Satz:

Alle $(n-1)$-dimensionalen Ebenen können in einander transformiert werden.

Wählen wir etwa die Ebene $x_{n+1} = 0$ und setzen wir dann $p_{n+1,1} = p_{n+1,2} = \ldots = p_{n+1,n} = 0, p_{n+1,n+1} = 1$, so wird bei dieser Transformation des Raumes die Ebene in sich verbleiben. Betrachten wir nur die Veränderungen, welche die Verhältnisse $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ für $x_{n+1} = 0$ erleiden, so können die n^2 Koeffizienten $p_{\alpha\varkappa}$ für $\alpha, \varkappa = 1 \ldots n$ beliebig gewählt werden; das giebt aber dieselben Transformationen, welche in einem $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raume möglich sind. Daraus folgt:

Soll bei einer Transformation des Raumes eine $(n-1)$-dimensionale Ebene in sich verbleiben, so lassen sich noch die Verhältnisse von $n^2 + n + 1$ Koeffizienten beliebig wählen; dagegen hängt die Transformation der Ebene in sich von dem Verhältnis von n^2 Gröfsen ab. Zugleich zeigt diese Ebene ganz die Eigenschaften eines $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes.

Zwei Ebenen

$$(2)\ \Sigma a_\varkappa x_\varkappa = 0,\ \Sigma b_\varkappa x_\varkappa = 0$$

sind nur dann als verschieden zu betrachten, wenn sich kein Faktor M bestimmen läfst, für welchen jedes $b_\varkappa = M a_\varkappa$ ist, oder wenn nicht alle Determinanten $a_\iota b_\varkappa - a_\varkappa b_\iota$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots n+1$ verschwinden. Dann kann man $n-2$ Verhältnisse der x beliebig wählen und daraus die übrigen eindeutig so bestimmen, dafs beiden Gleichungen genügt wird. Wenn z. B. $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ nicht verschwindet, so erhält man x_n durch $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ ausgedrückt, indem man die erste Gleichung mit b_{n+1}, die zweite mit a_{n+1} multipliziert und die erhaltenen Produkte von einander subtrahiert; eine ähnliche Operation ermöglicht es, x_{n+1} durch $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ darzustellen. Somit kann man die Verhältnisse $x_1 : x_2 : \ldots : x_{n-1}$ beliebig wählen und erhält dann die weiteren Verhältnisse. Wir sagen, die Gesamtheit der Verhältnisse, welche den Gleichungen (2) genügen, stelle eine $(n-2)$-dimensionale Ebene dar. Genau wie vorher ergiebt sich der Satz:

Irgend zwei Ebenen von $n-2$ Dimensionen lassen sich in einander transformieren; jede solche Ebene für sich hat die Eigenschaften eines $(n-2)$-fach ausgedehnten projektiven Raumes.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen für zwei Ebenen von $n-1$ Dimensionen, so wird jede Ebene, welche durch das Schnittgebilde geht, die Gleichung haben: $\varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2 = 0$. Soll dagegen eine dritte Ebene $U_3 = 0$ nicht durch das Schnittgebilde der beiden ersten gehen, so darf der Ausdruck $\varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2 + \varkappa_3 U_3$ nur dadurch zum identischen Verschwinden gebracht werden können, dafs $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ sämtlich gleich null gesetzt werden. Man bezeichnet dann wohl die Ebenen als von einander unabhängig. Die allen drei Ebenen gemeinsamen Punkte erfüllen eine $(n-3)$-dimensionale Ebene.

Sind also ν Ebenen

$$(3)\ U_1 = 0,\ U_2 = 0 \ldots U_\nu = 0$$

von einander unabhängig (d. h. kann die Form $\varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2 + \ldots + \varkappa_\nu U_\nu$ nur für $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \ldots = \varkappa_\nu = 0$ zum identischen Verschwinden gebracht werden), so bestimmen die ihnen gemeinsamen Punkte eine $(n-\nu)$-dimensionale Ebene, und alle (n—1)-dimensionalen Ebenen, welche durch diese Schnittebene gehen, lassen sich in der Form darstellen:

$$k_1 U_1 + k_2 U_2 + \ldots + k_\nu U_\nu = 0.$$

In dieser Weise führen n — 1 Ebenen zur Geraden, n zum Punkte.

Alle diese Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Theorie der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Wir können aber die Geraden und die Ebenen noch in anderer Weise erhalten. Wir gehen von zwei Punkten x' und x'' aus und betrachten alle Punkte:

(4) $x_1 = px_1' + qx_1'',\ x_2 = px_2' + qx_2'' \ldots x_{n+1} = px'_{n+1} + qx''_{n+1},$

wo die p und q jeden beliebigen Wert annehmen sollen. Die Gleichung einer Ebene $U = \Sigma a_\varkappa x_\varkappa = 0$ möge sowohl für x' wie für x'' erfüllt sein; es mögen also die Gleichungen bestehen: $\Sigma a_\varkappa x'_\varkappa = 0$ und $\Sigma a_\varkappa x_\varkappa'' = 0$; dann folgt daraus: $\Sigma a_\varkappa (px_\varkappa' + qx_\varkappa'') = 0$, woraus man ersieht, dafs alle Punkte, deren Koordinaten den Gleichungen (4) genügen, der Ebene $U = 0$ angehören. Wählt man n — 1 von einander unabhängige Ebenen $U_1 = 0 \ldots U_{n-1} = 0$ so, dafs sie durch die beiden Punkte x' und x'' gehen, so gehen sie auch durch die Punkte (4); diese gehören also dem Schnitt der n — 1 Ebenen, also einer Geraden an. Dann folgt:

Eine Gerade ist durch irgend zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt; wenn sie mit einer beliebigen Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, so fällt sie ganz hinein.

Wenn drei Punkte x', x'', x''' nicht in gerader Linie liegen, so wird durch die Gesamtheit der Punkte:

$$x_1 = px_1' + qx_1'' + rx_1''',\ x_2 = px_2' + qx_2'' + rx_2''' \ldots x_{n+1} = px'_{n+1} + qx''_{n+1} + rx'''_{n+1}$$

für beliebige Werte von p, q, r eine zweidimensionale Ebene dargestellt. In gleicher Weise kann man mit irgend einer gröfsern Anzahl von Punkten fortfahren. Daraus ergiebt sich:

Durch eine μ-dimensionale Ebene und einen Punkt aufserhalb derselben läfst sich eine einzige Ebene von $\mu + 1$ Dimensionen legen. Hat eine μ-dimensionale Ebene mit einer andern Ebene $\mu + 1$ Punkte gemeinschaftlich, welche nicht einer Ebene von $\mu - 1$ Dimensionen angehören, so fällt sie ganz hinein.

Drei Ebenen $U = 0$, $V = 0$, $U + kV = 0$ bezeichnen wir als einem Büschel angehörig. Der Koeffizient k ändert sich bei beliebigen Transformationen, drückt also keine invariante Beziehung zwischen den Ebenen aus. Nimmt man aber eine vierte Ebene $U + lV = 0$ des Büschels hinzu, so gehen die vier Gleichungen in die folgenden über:

$$U' = 0,\ V' = 0,\ \alpha\left(U' + k\frac{\beta}{\alpha}V'\right) = 0,\ \alpha\left(U' + l\frac{\beta}{\alpha}V'\right) = 0.$$

Also bleibt das Verhältnis $k : l$ bei jeder Transformation (1) ungeändert; demnach bezeichnet man es als das Doppelverhältnis der vier Ebenen.

Durchschneidet man die vier Ebenen des Büschels durch irgend eine Anzahl von Ebenen $T_1 = 0 \dots T_\nu = 0$, welche von jenen unabhängig sind, so wird jede $(n-1)$-dimensionale Ebene, welche durch den Schnitt von $U = 0$, $T_1 = 0 \dots T_\nu = 0$ geht, durch die Gleichung dargestellt:

$$U_1 = U + \alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_\nu T_\nu = 0,$$

und ebenso geht durch den Schnitt von $V = 0$, $T_1 = 0 \dots T_\nu = 0$ die Ebene

$$V_1 = V + \beta_1 T_1 + \dots + \beta_\nu T_\nu = 0.$$

Jede Ebene des durch U_1 und V_1 bestimmten Büschels hat die Gleichung $U_1 + rV_1 = 0$. Soll diese durch den Schnitt von $U + kV = 0$, $T_1 = 0 \dots T_\nu = 0$ gehen, so mufs $r = k$ sein. Soll ebenso die Ebene $U_1 + sV_1 = 0$ durch den Schnitt von $U + lV = 0$, $T_1 = 0 \dots T_\nu = 0$ gehen, so mufs $s = l$ sein. Demnach ist das Doppelverhältnis der vier Ebenen U_1, V_1, $U_1 + rV_1$, $U_1 + sV_1$ gleich dem der vier Ebenen U, V, $U + kV$, $U + lV$. Die vier Schnittebenen haben je $n - \nu - 1$ Dimensionen und liegen in einer $(n - \nu)$-dimensionalen Ebene. Ersetzen wir also die Zahl $n - \nu - 1$ durch μ, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn vier μ-dimensionale Ebenen (Punkte oder Gerade) einer $(\mu + 1)$-dimensionalen Ebene und in ihr einem Büschel angehören, so ist das Doppelverhältnis der vier $(n-1)$-dimensionalen Ebenen konstant, welche einem Büschel angehören und durch die vier gegebenen Ebenen gehen.

Demnach wird dieses Doppelverhältnis auch als das der vier gegebenen Ebenen bezeichnet.

Wenn speziell vier Punkte einer geraden Linie gegeben sind: x', x'', $x' + kx''$, $x' + lx''$, so wird das Doppelverhältnis der vier Punkte durch $k : l$ bestimmt.

Es genügt also, das Doppelverhältnis von vier $(n-1)$-dimensionalen Ebenen zu studieren.

Betrachten wir jetzt die Gleichungen der vier Ebenen in der Form:

(5) $U + \lambda V = 0,\ U + \mu V = 0,\ U + \lambda' V = 0,\ U + \mu' V = 0.$

Um das Doppelverhältnis der beiden letzten Ebenen zu den beiden ersten zu finden, setze man $U + \lambda V = W$, $U + \mu V = T$. Indem man U und V durch W und T ausdrückt, erhält man die beiden letzten Gleichungen (5) bis auf einen konstanten Faktor in der Form:

$$W + \frac{\lambda' - \lambda}{\mu - \lambda'}\, T = 0 \text{ und } W + \frac{\mu' - \lambda}{\mu - \mu'}\, T = 0.$$

Demnach ist das Doppelverhältnis ω der beiden letzten Ebenen zu den beiden ersten

$$\omega = \frac{\lambda - \lambda'}{\mu - \lambda'} : \frac{\lambda - \mu'}{\mu - \mu'}.$$

Dieser Wert ändert sich nicht, wenn man λ mit λ' und zugleich μ mit μ' vertauscht. Somit bleibt auch das Doppelverhältnis ungeändert, wenn man das erste Ebenenpaar mit dem zweiten vertauscht. Wenn man aber die dritte Ebene mit der vierten, also λ' mit μ' vertauscht, so geht ω in $\frac{1}{\omega}$ über. Als besonders wichtiges Doppelverhältnis mufs also dasjenige bezeichnet werden, welches diese Vertauschung gestattet, für welches also

$$\omega = \frac{1}{\omega} \text{ oder } \omega^2 = 1 \text{ ist.}$$

Für $\omega = 1$ ergiebt sich: $(\lambda - \mu)(\lambda' - \mu') = 0$, oder die Ebenen eines Paares fallen zusammen. Dagegen sind die vier Ebenen für $\omega = -1$ von einander verschieden; wir sagen, die vierte Ebene läge zu den drei ersten harmonisch, wenn das Doppelverhältnis gleich -1 ist. Bei dieser Bezeichnung führt die vorangehende Entwicklung zu dem Satze:

Liegt von vier Ebenen eines Büschels die vierte harmonisch zur dritten in Bezug auf die beiden ersten, so liegt auch die dritte harmonisch zur vierten; ebenso liegt das erste Ebenenpaar harmonisch zum zweiten.

Derselbe Satz gilt auch für vier Geraden eines Büschels und für vier Punkte einer geraden Linie.

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit aller Punkte, welche der Gleichung genügen:

$$(6) \qquad \sum_{\iota, \varkappa = 1 \ldots n+1} a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0.$$

Wenn irgend zwei Punkte x' und x'' gegeben sind, so ergeben sich diejenigen Punkte ihrer Verbindungsgeraden, welche dem Gebilde angehören, durch Auflösung der Gleichung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}(x_\iota' + \lambda x_\iota'')(x_\varkappa' + \lambda x_\varkappa'') = 0,$$

welche die Form annimmt:

$$(7) \quad \lambda^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' + 2\lambda \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' + \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0.$$

Da diese Gleichung zwei Wurzeln hat und demnach jede Gerade zwei (reelle, imaginäre oder zusammenfallende) Punkte mit dem Gebilde (6) gemeinschaftlich hat, so heifst es ein Gebilde zweiter Ordnung.

Sind die Wurzeln der vorliegenden Gleichung λ_1 und λ_2, so ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte zu den gegebenen Punkten $\lambda_1 : \lambda_2$. Damit dasselbe ein harmonisches werde, mufs $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$ oder $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ sein. Soll aber in einer quadratischen Gleichung die Summe der Wurzeln verschwinden, so mufs der Koeffizient der ersten Potenz der Unbekannten gleich null sein. Dies giebt die Bedingung:

$$(8) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Betrachten wir hierin x' als gegeben, aber x'' als beliebig, so stellt die Gleichung:

$$(9) \quad \sum_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa = 0$$

eine Ebene dar, welche die Eigenschaft hat, dafs die Verbindungsgerade eines jeden ihrer Punkte mit dem Punkte x' durch die Schnittpunkte harmonisch geteilt wird. Diese Ebene heifst die Polarebene in Bezug auf das quadratische Gebilde (6) für den Punkt x' als Pol.

Dadurch ist es möglich, die Polareigenschaften der Flächen zweiten Grades auf die hier betrachteten analytischen Beziehungen zu übertragen. Ich erinnere nur an folgenden Satz:

Ist eine ν-dimensionale Ebene E_ν und ein Gebilde zweiter Ordnung gegeben, so gehen die $(n-1)$-dimensionalen Polarebenen der Punkte von E_ν durch eine Ebene $E'_{n-\nu-1}$ von $n-\nu-1$ Dimensionen; konstruiert man die Polarebenen zu den Punkten von $E_{n-\nu-1}$, so gehen sie sämtlich durch die Ebene E_ν.

Ein Punkt kann nur dann in seiner Polarebene liegen, wenn er dem quadratischen Gebilde angehört, wie die Vergleichung der Gleichungen (6) und (9) zeigt. In diesem Falle enthält jede durch den Punkt in der Polarebene gezogene Gerade zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit dem Gebilde, oder die Polarebene wird mit der Tangentialebene identisch.

Gehen wir jetzt von einem Punkte 1 innerhalb oder aufserhalb des Gebildes (6) aus und suchen seine Polarebene I. Indem wir in der Ebene I einen Punkt 2 wählen, der ebenfalls dem Gebilde nicht angehört, und seine Polarebene II suchen, mufs dieselbe durch 1 gehen. In der Schnittebene von I und II wählen wir wiederum einen Punkt 3, welche ebenfalls nicht auf dem Gebilde liegt, und bestimmen seine Polarebene III, welche die Punkte 1 und 2 enthält. Indem wir so fortfahren, erhalten wir $n+1$ Punkte, von denen jeder der Pol zu der durch die n übrigen Punkte gehenden Ebene ist. Die durch irgend ν von diesen Punkten gehende $(\nu-1)$-dimensionale Ebene ist die reziproke Polarebene zu derjenigen $(n-\nu)$-fach ausgedehnten Ebene, welche durch die übrigen $n+1-\nu$ Punkte bestimmt ist. Wählen wir diese Ebenen zu Koordinatenebenen, so stellt sich die Gleichung des Gebildes in der Form von $n+1$ Quadraten dar. Soll nämlich für $x_1' = \ldots = x_{\iota-1}' = x_{\iota-1}' = \ldots = x_{n+1}'$ die Gleichung (9) übergehen in $x_1 = 0$, so mufs $a_{\iota\varkappa} = 0$ für $\varkappa \gtrless \iota$, und somit wird die Gleichung (6) jetzt $\Sigma a_{\iota\iota} x_\iota^2 = 0$.

Diese Betrachtung liefert den Beweis, dafs jede quadratische Form durch lauter Quadrate dargestellt werden kann, ein Satz, welcher auch leicht ohne diese geometrische Einkleidung gezeigt werden kann (man vergleiche in Baltzers Determinanten den Abschnitt über quadratische Formen).

Wenn eine quadratische Form nur Quadrate enthält, so können auch einige Quadrate den Koeffizienten null haben. So möge das quadratische Gebilde in der Form erscheinen:

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_e x_e^2 = 0,$$

während die Koeffizienten A_{e+1}, $A_{e+2} \ldots A_{n+1}$ sämtlich verschwinden. Dann mufs die Polarebene eines beliebigen Punktes x' sein: $A_1 x_1 x_1' + A_2 x_2 x_2' + \ldots + A_e x_e x_e' = 0$; dieselbe geht also durch die $(n-e)$-dimensionale Ebene $x_1 = x_2 = \ldots = x_e = 0$

hindurch. Sucht man aber die Polarebene zu einem Punkte dieser Ebene: $x_1' = x_2' = \ldots x_e' = 0$, x_{e+1}', $x_{e+2}' \ldots x_{n+1}$, so wird dieselbe unbestimmt. Sollen umgekehrt diese beiden Eigenschaften für die Punkte einer $(n - e)$-dimensionalen Ebene gelten, so mufs die angegebene Darstellung möglich sein. Daraus folgt dann, dafs die Zahl der verschwindenden Quadrate ganz unabhängig ist von der Wahl der hierzu geeigneten Variabeln.

Demnach unterscheiden wir zwei Gattungen von quadratischen Gebilden, die Kegelgebilde und die eigentlichen Gebilde zweiter Ordnung. Jedes Kegelgebilde hat eine singuläre Ebene, für deren Punkte die Polarebene unbestimmt wird, während die Polarebenen aller andern Punkte durch die singuläre Ebene hindurchgehen. Die Kegelgebilde zweiter Ordnung werden nach der Zahl der Dimensionen der singulären Ebene eingeteilt, und man unterscheidet Kegelgebilde mit einer Spitze, einer Doppelgeraden, einer Doppelebene von zwei, drei u. s. w. Dimensionen.

Wenn die Gleichung eines eigentlichen quadratischen Gebildes lauter Quadrate enthält, also die Form hat

$$(10) \quad \Sigma a_\iota x_\iota^2 = 0,$$

so können wir jedem einzelnen Koeffizienten den Wert $+1$ oder -1 beilegen. Stellt man die Gleichung durch irgend andere $n+1$ Quadrate dar, so bleibt die Zahl der positiven und der negativen Zeichen ungeändert (Baltzer, Determinanten, § 13, 15). Man kann also die eigentlichen Gebilde zweiten Grades einteilen nach der Zahl der positiven und negativen Quadrate, durch welche sie sich darstellen lassen; und da man die linke Seite von (10) mit -1 multiplizieren kann, erhält man $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Arten von verschiedenen Gebilden.

Wir schreiben die Gleichung (10) in der Form:

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + \ldots + x_{2\varrho-1}^2 - x_{2\varrho}^2 + x_{2\varrho+1}^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 0,$$

wo die Vorzeichen aller Quadrate bis auf die von x_2, $x_4 \ldots x_{2\varrho}$ positiv sind. Aus dieser Gleichungsform ersieht man, dafs die Ebene

$$x_1 = x_2,\ x_3 = x_4 \ldots x_{2\varrho-1} = x_{2\varrho},\ x_{2\varrho+1} = \ldots = x_{n+1} = 0,$$

welche $(\varrho - 1)$-dimensional ist, dem Gebilde angehört. Mindestens eine solche Ebene geht aber durch jeden Punkt des Gebildes. Wir können daher sagen:

Die eigentlichen Gebilde zweiten Grades werden unterschieden nach der Dimension der Ebenen, welche denselben angehören, und zwar mufs die Zahl der Dimensionen für diese Ebenen kleiner sein als $\frac{n}{2}$. Sobald auf dem Gebilde eine r-dimensionale Ebene liegt und durch diese sich keine dem Gebilde angehörige Ebene von mehr Dimensionen hindurchlegen läfst, giebt es auf dem Gebilde nur Ebenen von r Dimensionen, und zwar geht durch jeden Punkt des Gebildes mindestens eine solche Ebene hindurch. Die Darstellung der Gleichung durch $n+1$ Quadrate läfst diese Zahl r sofort erkennen. Haben alle Quadrate dasselbe Zeichen, so ist das Gebilde imaginär; haben n Quadrate dasselbe Zeichen, eins das entgegengesetzte, so ist das Gebilde reell, aber auf demselben liegt keine gerade Linie; weichen zwei Quadrate in ihrem Zeichen von den übrigen ab, so enthält das Gebilde gerade Linien, aber keine Ebenen. Wenn für $n > 4$ drei Zeichen von den übrigen verschieden sind, so enthält das Gebilde zweifach ausgedehnte Ebenen. Sind allgemein ϱ Zeichen positiv und σ Zeichen negativ, wo $\varrho + \sigma = n + 1$ ist, so ist die Zahl der Dimensionen für die auf dem Gebilde liegenden Ebenen, wofern $\varrho = \sigma$ ist, gleich $\varrho - 1$, und wofern ϱ und σ ungleich sind, gleich der kleineren vermindert um eins.

§ 8.

Erweiterung der analytischen Behandlung der euklidischen Geometrie.

Diejenigen analytischen Entwicklungen, welche geeignet sind, für drei und für vier homogene Variabele die Sätze über Projektivität in der Ebene und im Raume zu erweisen, können, wie der vorige Paragraph gezeigt hat, auf eine beliebige Zahl von Variabeln übertragen werden, und die Sätze der Analysis, zu denen man hierbei gelangt, können am bequemsten in Worte gekleidet werden, wenn man die Sprache der Geometrie benutzt. In entsprechender Weise lassen sich die Sätze der euklidischen Geometrie, sobald man von gewissen Voraussetzungen ausgeht, unter Benutzung von drei Koordinaten, also von drei unbeschränkt variabeln Gröfsen, auf analytischem Wege gewinnen. Die Rechnungen, die zu dem Zwecke ausgeführt werden müssen, nötigen aber an sich nicht, sich auf drei Veränderliche zu beschränken, man wird ebenfalls ein in sich abgeschlossenes analytisches System erhalten, wenn man der Untersuchung irgend eine Zahl von Variabeln zu Grunde legt. Die Ergebnisse der Rechnung aber können wieder am einfachsten ausgesprochen werden, wenn man geometrische Ausdrücke gebraucht für Begriffe, welche ganz der Analysis angehören. Das zu erweisen, soll unsere nächste Aufgabe sein.[33])

Wir gehen von n Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ aus und bezeichnen jedes Wertsystem $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ als einen Punkt, und die Gesamtheit aller Wertsysteme, welche erhalten werden, indem man allen n Variabeln sämtliche reellen Werte beilegt, nennen wir einen n-dimensionalen Raum. Zwar gestatten wir, dafs mit den Punkten mancherlei Veränderungen vorgenommen werden; aber für irgend zwei Punkte x und x', die zugleich geändert werden, soll die quadratische Form:

$$(1)\quad (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2 = \Sigma(x_\iota - x_\iota')^2$$

ungeändert bleiben. Die Quadratwurzel aus dieser Form nennen wir die Entfernung der beiden Punkte, und die Mannigfaltigkeit, deren Wertsysteme nur der gestellten Forderung gemäfs geändert werden dürfen, einen euklidischen Raum.

Statt einzelne Punkte einer Transformation zu unterwerfen, bei der für je zwei der ausgewählten Punkte der Ausdruck (1) ungeändert bleibt, dürfen wir sämtliche Punkte des Raumes so transformieren, dafs die Entfernung je zweier Punkte sich nicht ändert. Wenn also gesetzt wird:

$$(2)\quad x_\iota = \varphi_\iota(y_1 \ldots y_n),\ y_\iota = \psi_\iota(x_1 \ldots x_n),$$

und wenn zugleich ist:

$$x_\iota' = \varphi_\iota(y_1' \ldots y_n'),\ y_\iota' = \psi_\iota(x_1' \ldots x_n'),$$

so soll allgemein sein:

$$(3)\quad \Sigma(x_\iota - x_\iota')^2 = \Sigma(y_\iota - y_\iota')^2.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von x und x' gilt, ist es gestattet, sie nach jedem x_α zu differentieren. Das giebt die n Gleichungen:

$$x_\alpha - x_\alpha' = \sum_\iota [\psi_\iota(x) - \psi_\iota(x')] \frac{d\varphi_\iota(x)}{dx_\alpha} \text{ für } \alpha = 1 \ldots n.$$

Indem man die vorstehende Gleichung nach x_β' differentiert und das bekannte Zeichen $\delta_{\alpha\beta}$ einführt, welches für gleiche Werte von α und β gleich eins, für ungleiche Werte von α und β gleich null ist, ergeben sich die Beziehungen:

$$\delta_{\alpha\beta} = \sum_{\iota} \frac{d\psi_\iota(x')}{dx_\beta} \frac{d\psi_\iota(x)}{dx_\alpha}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dafs man die sämtlichen Differentialquotienten $\frac{d\psi_\varrho(x')}{dx_\sigma'}$ durch die $\frac{d\psi_\varrho(x)}{dx_\sigma}$ darstellen kann, dafs sie somit sämtlich einen konstanten Wert haben müssen. Setzt man also:

$$(4)\quad x_\alpha = \sum_\iota a_{\alpha\iota} y_\iota + m_\alpha, \quad y_\alpha = \sum_\iota b_{\alpha\iota} x_\iota + n_\alpha,$$

wo die Gröfsen $a_{\alpha\iota}$, $b_{\alpha\iota}$, m_α, n_α konstante Werte besitzen, so folgen aus den vorstehenden Entwicklungen die Formeln:

$$(5)\quad \delta_{\alpha\beta} = \sum_\iota a_{\alpha\iota} b_{\beta\iota}, \quad b_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad b_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha};$$

somit ist z. B.

$$\sum_\varkappa a_{1\varkappa} a_{\varkappa 1} = 1, \quad \sum_\varkappa a_{1\varkappa} a_{\varkappa 2} = 0.$$

Um den Wert der aus den Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ gebildeten Determinante zu bestimmen, stelle man ihr Quadrat wieder als Determinante dar; dadurch erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + \dots + a_{1n}{}^2 & a_{11} a_{12} + a_{12} a_{22} + \dots + a_{1n} a_{n2} & \dots \\ a_{21} a_{11} + \dots + a_{2n} a_{n1} & a_{21}{}^2 + a_{22}{}^2 + \dots + a_{2n}{}^2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} a_{11} + \dots + a_{nn} a_{n1} & a_{n1} a_{12} + \dots + a_{nn} a_{n2} & \dots \end{vmatrix}$$

Setzt man hierin die Werte aus (5) ein, so erhält jedes Glied der Diagonale den Wert eins, und jedes andere Glied den Wert null. Somit hat das Quadrat der ursprünglichen Determinante den Wert eins, sie selbst den Wert $+1$ oder -1. Hiernach zerfallen die Transformationen des euklidischen Raumes, für die die Entfernung je zweier Punkte ungeändert bleibt, in zwei Klassen, je nachdem ihre Determinante positiv oder negativ ist; sollen Transformationen stetig in einander übergehen, so müssen sie zu derselben Klasse gehören. Umgekehrt seien $a_{\iota\varkappa}$ und $a_{\iota\varkappa}'$ die Koeffizienten von zwei Transformationen, die zu derselben Klasse gehören; dann zeigt man, dafs die Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ stetig in die $a_{\iota\varkappa}'$ übergeführt werden können. Nun hat die zu der identischen Transformation

$$y_1 = x_1, \; y_2 = x_2 \dots y_n = x_n$$

gehörige Determinante den Wert $+1$; man kann daher ein Gebilde stetig in ein zweites umwandeln, wenn die Determinante aus den Transformations-Koeffizienten den Wert $+1$ hat. Dementsprechend nennen wir eine derartige Transformation eine Bewegung und bezeichnen zwei Gebilde als kongruent, wenn sie sich durch eine Transformation mit positiver Determinante in einander überführen lassen.

Wir suchen die Gesamtheit aller Punkte x, welche von zwei festen Punkten x′ und x″ gleichen Abstand haben. Die Koordinaten dieser Punkte müssen der Bedingung genügen:

$$\Sigma(x_\iota - x_\iota')^2 = \Sigma(x_\iota - x_\iota'')^2,$$

welche man auch in der Form schreiben kann:

$$(6)\quad \Sigma a_\iota x_\iota = p,$$

wofern gesetzt wird:

$$\varrho a_\iota = 2(x_\iota' - x_\iota''),\ \varrho p = \Sigma(x_\iota'^2 - x_\iota''^2).$$

Wenn umgekehrt die Koeffizienten $a_1 \ldots a_n$ und p, sowie die Werte $x_1' \ldots x_n'$ beliebig gegeben sind, so kann man den Faktor ϱ und die Gröfsen $x_1'' \ldots x_n''$ so bestimmen, dafs die letzten Gleichungen befriedigt werden. Denn die ersten n Gleichungen drücken die $x_1'' \ldots x_n''$ durch ϱ und die $a_1 \ldots a_n$ aus; setzt man die erhaltenen Werte in die letzte Gleichung ein, so folgt:

$$\varrho = \frac{\Sigma a_\iota x_\iota' - p}{\frac{1}{4}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

Hiernach wird ϱ und jede Differenz $x_\iota' - x_\iota''$ nur dann gleich null, wenn der Punkt x′ dem durch die Gleichung (6) dargestellten Gebilde angehört.

Jedes Gebilde, dessen Gleichung linear in den Koordinaten ist, nennen wir eine $(n-1)$-dimensionale Ebene und bezeichnen es kurz mit E_{n-1}. Die vorstehenden Entwicklungen haben uns zu dem Satze geführt:

Alle Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernung haben, gehören einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene an; und wenn umgekehrt eine $(n-1)$-fach ausgedehnte Ebene und ein Punkt gegeben ist, der nicht in ihr liegt, so kann man einen zweiten Punkt derartig bestimmen, dafs alle Punkte der Ebenen von den beiden ihr nicht angehörenden Punkten gleichen Abstand haben.

Die durch die Gleichungen (4) und (5) definierten Transformationen haben die Eigenschaft, dafs die Verbindung zweier beliebiger unter ihnen wieder eine Transformation liefert, deren Koeffizienten denselben Bedingungen genügen. Da man aber durch eine solche Transformation die Form $\Sigma a_\iota x_\iota - p$ bis auf einen konstanten Faktor in die Form y, und diese in die neue Form $\Sigma b_\iota z_\iota - q$ umwandeln kann, so läfst sich jede Ebene durch eine den Gleichungen (4), (5) genügende Transformation in jede andere überführen. Hierbei kann man offenbar die Determinante noch positiv wählen; man erhält also den Satz:

Zwei beliebige Ebenen sind kongruent.

Will man wissen, bei welchen Transformationen eine Ebene noch in sich verbleibt, so ist es gleichgültig, welche Ebene der Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Indem man aber speziell die Ebene $x_n = 0$ wählt und nach den Transformationen fragt, bei denen $y_n = x_n$ ist, hat man $a_{nn} = 1$, $a_{1,n} = \ldots = a_{n-1,n} = a_{n,1} = \ldots = a_{n,n-1} = 0$ zu setzen. Hiernach werden die zwischen den übrigen Koeffizienten bestehenden Relationen erhalten, indem man in (5) die Summation auf die Marken $1, \ldots n - 1$ beschränkt. Das sind aber dieselben Beziehungen, welche für einen $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Raum gelten. Wie die Gleichungen (4), (5) aus der Forderung (3) erhalten sind, so ziehen sie auch wieder die allgemeine Gültigkeit der Gleichung (3) nach sich. Wir werden somit zu dem Lehrsatze geführt:

Jede $(n-1)$-dimensionale Ebene eines n-dimensionalen euklidischen Raumes hat, für sich betrachtet, die Eigenschaften eines euklidischen Raumes von $n-1$ Dimensionen.

Wenn zwischen den Koeffizienten in den beiden Gleichungen:

$$(7) \quad \Sigma a_\iota x_\iota = p, \quad \Sigma b_\iota x_\iota = q$$

die $n+1$ Beziehungen bestehen: $b_1 = \varrho a_1 \ldots b_n = \varrho a_n$, $q = \varrho p$, so stellen die Gleichungen offenbar dieselbe Ebene dar. Sind aber nur die n ersten Relationen erfüllt, sind mit andern Worten die n Quotienten $b_\iota : a_\iota$ einander gleich, ohne dafs der Quotient $q : p$ denselben Wert hat, so stellen die Gleichungen zwei verschiedene Ebenen dar, welche keinen Punkt gemeinschaftlich haben und deshalb parallel heifsen. Sobald aber die ersten n Beziehungen nicht sämtlich bestehen, kann man $n-2$ Koordinaten noch willkürlich wählen und die beiden übrigen so bestimmen, dafs die Gleichungen (7) befriedigt werden. Das $(n-2)$-dimensionale Schnittgebilde entspricht in seinen Eigenschaften ganz der $(n-1)$-dimensionalen Ebene; es soll deshalb als eine Ebene von $n-2$ Dimensionen bezeichnet werden.

Wenn $U=0$, $U'=0$ die Gleichungen zweier (verschiedener) Ebenen sind, so gehört jede Ebene mit der Gleichung $U+kU'=0$ dem durch die beiden ersten Ebenen bestimmten Büschel an. Wird eine dritte Ebene $U'' \equiv \Sigma c_\iota x_\iota - r = 0$ hinzugenommen, welche dem durch die beiden ersten Ebenen bestimmten Büschel nicht angehört, so hat man zu untersuchen, ob alle Determinanten dritten Grades der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{Vmatrix}$$

verschwinden oder nicht. Wenn das letztere der Fall ist, so haben die Ebenen eine $(n-3)$-dimensionale Schnittebene. Verschwinden aber alle jene Determinanten, so haben die drei Ebenen keinen Punkt gemeinschaftlich. Dabei mufs der Fall ausgeschlossen werden, dafs bereits alle Determinanten zweiten Grades in der obigen Matrix verschwinden, weil sonst die drei Ebenen einem Büschel angehören. Die Ebenen $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ können daher nicht sämtlich unter einander parallel sein; von den drei gegebenen Ebenen müssen also mindestens zwei einander schneiden. Nun lassen sich aber immer zwei Faktoren μ und ν so bestimmen, dafs für jede Marke ι die Relation besteht: $\mu a_\iota + \nu b_\iota = c_\iota$; schneiden sich also die beiden ersten Ebenen, so kann man durch das Schnittgebilde eine Ebene legen, die zur dritten Ebene parallel ist. Hiernach heifst eine $(n-2)$-dimensionale Ebene E_{n-2} parallel zu einer Ebene E_{n-1} von $n-1$ Dimensionen, wenn sie mit ihr keinen Punkt gemeinschaftlich hat; wir haben gesehen, dafs alsdann durch die E_{n-2} eine $(n-1)$-dimensionale Ebene gelegt werden kann, welche zu der E_{n-1} parallel ist.

Diese Betrachtung läfst sich auf eine gröfsere Zahl von Dimensionen übertragen und gestattet, für jede Zahl $m < n$ die m-dimensionale Ebene als den Schnitt von $n-m$ Ebenen (von $n-1$ Dimensionen) zu definieren, wobei nur vorausgesetzt werden mufs, dafs die Koeffizienten in den Gleichungen der $n-m$ Ebenen nicht besondern Bedingungen genügen. Für $m=1$

erhält man auf diese Weise die gerade Linie, während n Ebenen E_{n-1} im allgemeinen nur einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Man kann aber noch in anderer Weise zur m-dimensionalen Ebene und für $m = 1$ zur Geraden gelangen: die Koordinaten von $m + 1$ Punkten seien $x', x'' \ldots x^{(m+1)}$; man führe $m + 1$ willkürliche Gröfsen $u_1, u_2 \ldots u_{m+1}$ ein und betrachte die Gesamtheit aller Punkte, deren Koordinaten sich in der Form darstellen lassen:

$$x_\varkappa = \frac{u_1 x_\varkappa' + u_2 x_\varkappa'' + \ldots + u_{m+1} x_\varkappa^{(m+1)}}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{m+1}} \text{ für } \varkappa = 1, 2 \ldots n.$$

Der Nachweis, dafs diese Punkte im allgemeinen einer m-dimensionalen Ebene angehören, kommt auf Entwicklungen hinaus, die bereits im vorigen Paragraphen durchgeführt sind.

Die Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots a_n$, p in der Gleichung (6) der Ebene können wir mit einem beliebigen Faktor multiplizieren. Indem wir $a_1\varrho = c_1$, $a_2\varrho = c_2 \ldots a_n\varrho = c_n$, $p\varrho = r$ setzen, läfst sich ϱ so bestimmen, dafs die Beziehung besteht:

$$(8) \quad c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 = 1.$$

Dann läfst sich aber noch das Vorzeichen eines Koeffizienten willkürlich wählen; wir setzen daher mit Herrn von Lilienthal fest, dafs der erste nicht verschwindende Koeffizient $c_n, c_{n-1}, \ldots c_2, c_1$ positiv ist, und wollen sagen, die Gleichung der Ebene

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - r = 0$$

hätte die Normalform, wenn die Koeffizienten $c_1 \ldots c_n$ den aufgestellten Bedingungen genügen.

Durch die Transformation (4) geht $c_\varkappa$ über in $\sum\limits_\nu c_\nu a_{\nu\varkappa}$, also $\sum c_\varkappa^2$ in $\sum\limits_{\mu,\nu} c_\mu c_\nu \sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\mu\varkappa} a_{\nu\varkappa} = \sum c_\mu c_\nu \delta_{\mu\nu} = \sum c_\mu^2 = 1$. Die Beziehung (8) bleibt also bei jeder derartigen Transformation ungeändert.

Jetzt seien die Gleichungen zweier Ebenen in der Normalform gegeben:

$$\sum c_\varkappa x_\varkappa - r = 0, \quad \sum e_\varkappa x_\varkappa - s = 0.$$

Durch jede Transformation (4), (5) geht $c_\varkappa$ über in $\sum\limits_\nu c_\nu a_{\nu\varkappa}$, $e_\varkappa$ in $\sum\limits_\mu c_\mu a_{\mu\varkappa}$; also bleibt der Ausdruck

$$\sum c_\varkappa e_\varkappa$$

ungeändert, und da er höchstens den Wert eins erhält, und zwar nur dann, wenn die Ebenen zusammenfallen, so kann man

$$(9)\quad \Sigma c_\varkappa e_\varkappa = \cos\varphi$$

setzen und φ als den Winkel der beiden Ebenen definieren. Diese Definition stimmt nicht nur für $n = 2$ und $n = 3$ mit der gebräuchlichen überein; sie ist auch geeignet, eine charakteristische Eigenschaft des Winkels auf die mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Läfst man nämlich drei Ebenen I, II, III durch dieselbe $(n - 2)$-dimensionale Ebene hindurchgehen, so ist der Winkel, den die beiden letzten Ebenen einschliefsen, gleich der Differenz der Winkel, die je eine von ihnen mit der Ebene I bildet. Um dies möglichst einfach zu beweisen, lasse man die Ebene I mit der Ebene $x_1 = 0$ zusammenfallen und lege die beiden andern Ebenen durch den Schnitt von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ hindurch.

Speziell werden wir zwei Ebenen als auf einander senkrecht stehend bezeichnen, wenn sie einen rechten Winkel mit einander bilden, wenn also zwischen ihren Koeffizienten $c_\varkappa$ und $e_\varkappa$ die Beziehung besteht:

$$(9)\quad \Sigma c_\varkappa e_\varkappa = 0.$$

Aus dieser Form der Bedingungsgleichung folgt unmittelbar der Satz:

Wenn m Ebenen auf derselben $(m + 1)^{\underline{ten}}$ Ebene senkrecht stehen, so stehen auch alle Ebenen, welche durch das Schnittgebilde der ersten m Ebenen hindurchgehen, auf der letzten Ebene senkrecht.

Demnach läfst sich durch jeden Punkt des Raumes eine $(n - 2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von $(n - 1)$-dimensionalen Ebenen legen, welche auf einer gegebenen Ebene von $n - 1$ Dimensionen senkrecht stehen. Alle diese Ebenen müssen eine gerade Linie gemeinschaftlich haben, da sie durch denselben Punkt hindurchgehen. Umgekehrt wird jede durch die Gerade gelegte $(n - 1)$-dimensionale Ebene auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen. In diesem Falle sagen wir, die Gerade selbst stehe auf der gegebenen Ebene senkrecht. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine einzige Gerade, die auf einer festen Ebene senkrecht steht. Im allgemeinen kann man aber durch eine gerade Linie g nur eine $(n - 3)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Ebenen E_{n-1} hindurchlegen, welche mit einer gegebenen $(n-1)$-dimensionalen Ebene I einen rechten Winkel bilden; denn zu der Bedingung (9), welche bei gegebenen Werten $c_1 \ldots c_n$ für die Koeffizienten $e_1 \ldots e_n$, r bestehen mufs, treten noch zwei Bedingungen durch die Forderung hinzu, dafs die Ebenen durch die Gerade g hindurchgehen sollen. Jetzt läfst sich aber durch die Gerade g eine einzige Ebene E_{n-1}' legen, die auf allen Ebenen E_{n-1} senkrecht steht. Der Winkel, den die Ebene E_{n-1}' mit der Ebene I bildet, wird als Neigungswinkel der Geraden g und der Ebene I definiert. Wenn der Neigungswinkel einer Geraden g zu einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene I gleich ist dem Winkel, unter dem eine zweite Gerade h zu einer Ebene II geneigt ist, so läfst sich durch eine Transformation (4), (5) erreichen, dafs die Ebene I mit II und zugleich die Gerade g mit h zusammenfällt.

Eine ganz ähnliche Betrachtung läfst sich für zwei Ebenen anstellen, von denen die eine $n-1$, die andere $m < n-1$ Dimensionen hat.

Wiederum sei die Gleichung einer Ebene I in der Normalform gegeben; man suche den Fufspunkt x' der Senkrechten, die von einem nicht in der Ebene gelegenen Punkte ξ auf dieselbe gefällt wird. In den Gleichungen von $n-1$ Ebenen mögen die Konstanten mit (e_ι, s), $(e_\iota', s') \ldots (e_\iota^{(n-2)}, s^{(n-2)})$ bezeichnet werden. Da jede dieser Ebenen durch den Punkt ξ geht, müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\Sigma e_\iota \xi_\iota = s,\ \Sigma e_\iota' \xi_\iota = s' \ldots \Sigma e_\iota^{(n-2)} \xi_\iota = s^{(n-2)}.$$

Dieselben Ebenen sollen aber auch den Punkt x' enthalten; daraus folgt:

$$\Sigma e_\iota x_\iota' = s,\ \Sigma e_\iota' x_\iota' = s' \ldots \Sigma e_\iota^{(n-2)} x_\iota' = s^{(n-2)},$$

oder:

$$\Sigma e_\iota(\xi_\iota - x_\iota') = 0,\ \Sigma e_\iota'(\xi_\iota - x_\iota') = 0 \ldots \Sigma e_\iota^{(n-2)}(\xi_\iota - x_\iota') = 0.$$

Da aber die gesuchten Ebenen auf der gegebenen senkrecht stehen, müssen ihre Koeffizienten den Gleichungen genügen:

$$\Sigma e_\iota c_\iota = 0,\ \Sigma e_\iota' c_\iota = 0 \ldots \Sigma e_\iota^{(n-2)} c_\iota = 0.$$

Die letzten Gleichungen müssen aber mit den vorangehenden identisch sein. Das ist nur möglich, wenn für jede Marke $\varkappa$ die Gleichung erfüllt ist:

$$\xi_\varkappa - x_\varkappa' = Mc_\varkappa \text{ oder } x_\varkappa' = \xi_\varkappa - Mc_\varkappa.$$

Nun liegt der Punkt x' in der Ebene I; daher ist:

$$\Sigma c_\varkappa x_\varkappa' = r \text{ oder } M = \Sigma c_\varkappa \xi_\varkappa - r.$$

Hiernach hat der Fufspunkt der Senkrechten die Koordinaten:

$$(11)\quad x_\iota' = \xi_\iota + c_\iota r - c_\iota \sum_\varkappa c_\varkappa \xi_\varkappa = \xi_\iota - Mc_\iota.$$

Das Quadrat der Entfernung der Punkte ξ und x' beträgt:

$$\Sigma(\xi_\varkappa - x_\varkappa')^2 = \sum_\iota c_\iota^2 (\sum_\varkappa c_\varkappa \xi_\varkappa - r)^2 = (\sum_\varkappa c_\varkappa \xi_\varkappa - r)^2.$$

Die Entfernung selbst ist also gleich der Gröfse M:

$$(12)\quad M = \Sigma c_\varkappa \xi_\varkappa - r$$

und wird erhalten, wenn man die Gleichung der Ebene I in der Normalform

$$\Sigma c_\varkappa x_\varkappa - r = 0$$

voraussetzt. Wir unterscheiden demnach eine positive und negative Seite der Ebene, je nachdem die Gröfse M bei den getroffenen Festsetzungen einen positiven oder negativen Wert erhält. Hiernach läfst sich mit Herrn von Lilienthal auch angeben, was man unter dem positiven und negativen Teile einer durch einen Punkt geteilten Geraden zu verstehen habe.

Ein beliebiger Punkt der Ebene I möge die Koordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ haben. Wir führen neue Gröfsen $y_1 \ldots y_n$ ein durch die Bestimmung:

$$x_\iota = x_\iota' - y_\iota = \xi_\iota - Mc_\iota + y_\iota,$$

wo die Bedingung bestehen mufs:

$$\Sigma c_\iota y_\iota = 0.$$

Haben die Punkte x und ξ die Entfernung D, so ist:

$$D^2 = \Sigma(\xi_\iota - x_\iota)^2 = \Sigma(c_\iota M - y_\iota)^2 = M^2 + \Sigma y_\iota^2.$$

Hier ist $D^2 > M^2$, wenn nicht alle Gröfsen y_ι verschwinden. Somit ist M der kleinste Wert, den D für die Punkte der Ebene erreichen kann. Indem wir diesen kleinsten Wert als Abstand des Punktes ξ von der Ebene I definieren, führt die vorstehende Gleichung zu folgenden Ergebnissen:

»Die kürzeste Entfernung, die ein fester Punkt von den Punkten einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene hat, ist die Länge der auf die Ebene gefällten Senkrechten; alle Punkte der Ebene, welche vom Fufspunkt der Senkrechten gleichen Abstand haben, sind auch von dem gegebenen Punkte selbst gleich weit entfernt. Für diese Entfernungen gilt der Pythagoreische Lehrsatz.«

»Alle Punkte, die von einer gegebenen (n — 1)-dimensionalen Ebene gleichen Abstand haben, liegen in zwei zu ihr parallelen Ebenen.«

Die (n — 1)-dimensionale Kugel definieren wir als den Ort aller Punkte, die von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben. Allgemein setzen wir fest, dafs die Punkte einer m-dimensionalen Kugel in einer (m + 1)-dimensionalen Ebene liegen und von einem Punkte dieser Ebene gleichweit entfernt sein sollen. Dann lesen wir aus der obigen Gleichung noch folgende Sätze ab:

»Eine Ebene schneidet eine Kugel oder berührt sie oder liegt ganz aufserhalb derselben, jenachdem der Abstand der Ebene vom Mittelpunkte kleiner, ebenso grofs oder gröfser ist als der Radius.«

»Zwei (n — 1)-dimensionale Kugeln, für welche die Entfernung der Mittelpunkte kleiner ist als die Summe, aber gröfser als die Differenz der Radien, haben eine (n — 2)-dimensionale Kugel gemeinschaftlich.«

Die Gesamtheit der Wertsysteme, die der Gleichung genügen:

$$(13)\quad \sum_{\iota\varkappa} A_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa + 2 \sum B_\varkappa x_\varkappa + C = 0,$$

bezeichnen wir als ein (n — 1)-dimensionales Gebilde zweiter Ordnung oder auch als ein quadratisches Gebilde von n — 1 Dimensionen.

Die linke Seite der Gleichung (13) ändern wir durch eine Transformation (4), (5), bei der der Anfangspunkt [also der Punkt (0, 0 . . . 0)] ungeändert bleibt. Wenn die neue Form der Gleichung ist:

$$\sum A_{\iota\varkappa}' y_\iota y_\varkappa + 2 \sum B_\varkappa' y_\varkappa + C' = 0,$$

so können wir erreichen, dafs alle Koeffizienten verschwinden, für welche die Marken ι und $\varkappa$ ungleich sind. Denn die Koeffizienten $A_{\iota\varkappa}'$ hangen nur von den Transformations-Koeffizienten und den $A_{\iota\varkappa}$, nicht aber von den $B_\varkappa$ und C ab; bei der angegebenen Transformation geht aber die Form $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2$ über in $y_1{}^2 + y_2{}^2 + \ldots + y_n{}^2$. Nun läfst die Aufgabe, die beiden quadratischen Formen:

$$\sum A_{\iota\varkappa} x_\iota x_n \text{ und } \sum x_\iota{}^2$$

als Summe derselben n Quadrate darzustellen, nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrafs (Berliner Berichte 1858) eine reelle Lösung zu. Dadurch nimmt die Gleichung des Gebildes die Gestalt an:

$$(14)\quad \Sigma A_\varkappa' y_\varkappa^2 + 2\,\Sigma B_\varkappa' y_\varkappa + C = 0.$$

Wenn keiner der Koeffizienten $A_\varkappa'$ verschwindet, so ersetze man $y_\varkappa + \frac{B_\varkappa'}{A_\varkappa'}$ durch $z_\varkappa$ für jede Marke $\varkappa$; dadurch wird die Form erhalten:

$$(15)\quad \Sigma A_\varkappa' z_\varkappa^2 + C' = 0.$$

Wenn aber in (14) einer der Koeffizienten $A_\varkappa'$, etwa A_n' verschwindet, die übrigen aber von null verschieden sind, so ersetze man $y_\varkappa + \frac{B_\varkappa'}{A_\varkappa'}$ durch $z_\varkappa$ für $\varkappa = 1 \ldots n - 1$, und für einen von null verschiedenen Wert von B_n' schreibe man z_n für $y_n + \frac{C'}{B_n'}$; jetzt stellt sich die Gleichung in der Form dar:

$$(16)\quad A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + \ldots + A_n z_{n-1}^2 + 2 B_n z_n = 0.$$

Sollten A_n' und B_n' beide verschwinden, so würden wir ein Cylindergebilde erhalten, das etwa in folgender Weise definiert werden kann: In einer $(n - 1)$-dimensionalen Ebene konstruiere man ein quadratisches Gebilde und errichte in jedem seiner Punkte die Senkrechte auf der Ebene; die Gesamtheit aller so erhaltenen Senkrechten liefert ein Cylindergebilde. Alle Cylinder- und Kegelgebilde sollen hier ausgeschieden sein. Dann müssen wir auch den Fall ausschliefsen, dafs in der Gleichung (14) mehr als ein Koeffizient $A_\varkappa'$ verschwindet, weil wir sonst mit weniger Variabeln auskommen.

Indem wir also von den Kegel- und Cylindergebilden absehen, können wir der Einteilung der quadratischen Gebilde die Formen (15) und (16) zu Grunde legen und bezeichnen die ersteren aus einem naheliegenden Grunde als Mittelpunkts-Gebilde, die letzteren als parabolische. Beide werden nach der Zahl der positiven und negativen Quadrate eingeteilt. Die Mittelpunktsgebilde zerfallen in folgende $n + 1$ Arten:

1. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} + 1 = 0$, das imaginäre Gebilde,

2. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} - 1 = 0$, das Ellipsoid,

3. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \frac{x_n^2}{a_n^2} - 1 = 0$, geradliniges Gebilde mit einér einzigen, nicht schneidenden, axialen Geraden,

4. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_{n-2}^2}{a_{n-2}^2} - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} + \frac{x_n^2}{a_n^2} - 1 = 0$, Gebilde mit zweidimensionalen Ebenen und einer einzigen, nicht schneidenden axialen Ebene von zwei Dimensionen,

5. . . . .

n. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2} - 1 = 0$, geradliniges Gebilde mit einer nicht schneidenden axialen $(n-2)$-dimensionalen Ebene.

n + 1. $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2} - 1 = 0$, ungeradliniges Gebilde mit zwei Schalen.

Ebenso zerfallen die parabolischen Gebilde in $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Arten; hier läfst sich durch Multiplikation mit -1 immer erreichen, dafs die Zahl der positiven Quadrate nicht kleiner als die der negativen ist; demnach erhalten wir folgende parabolische Gebilde:

1. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} + 2\alpha x_n = 0$, ungeradliniges Paraboloidgebilde;

2. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_{n-2}^2}{a_{n-2}^2} - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} + 2\alpha x_n = 0$, geradliniges Paraboloidgebilde;

3. $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_{n-3}^2}{a_{n-3}^2} - \frac{x_{n-2}^2}{a_{n-2}^2} - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} + 2\alpha x_n = 0$, Paraboloid mit zweidimensionalen Ebenen u. s. w.

Die Gleichung:

$$(17) \quad \frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n + \lambda} = 1$$

stellt für jeden reellen Wert von λ ein quadratisches Mittelpunkts-Gebilde dar. Alle Gebilde, die man für die verschiedenen Werte von λ vermittelst dieser Gleichung erhält, sollen als konfokale Gebilde bezeichnet werden. Die Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots a_n$ seien der Gröfse nach geordnet, so dafs

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n$$

ist. Wir betrachten zunächst die Änderungen, welche die linke Seite von (17), die kurz mit L bezeichnet werden möge, für feste Werte von $a_1 \ldots a_n$, $x_1 \ldots x_n$ erleidet, wenn man λ alle reellen Werte durchlaufen läfst. Für $\lambda = +\infty$ wird $L = 0$; läfst man λ abnehmen, so wird L zunächst positiv, da die Zähler stets und die Nenner für einen hinlänglich grofsen Wert von λ positiv sind. Der gröfste Wert, für welchen ein Nenner null ist, ist $\lambda = -a_1$, so dafs hierfür L unendlich grofs wird. Somit liegt eine Wurzel der Gleichung (17) zwischen $+\infty$ und $-a_1$. Bleibt λ in der Nähe von $-a_1$, ist es aber kleiner, so überwiegt der negative Wert von $\dfrac{x_1^2}{a_1+\lambda}$, also erhält L sehr grofse negative Werte, während es für die Annäherung an $-a_2$, wofern es nur gröfser bleibt als $-a_2$, beliebig grofse positive Werte erhält; demnach liegt eine zweite Wurzel λ_2 zwischen $-a_1$ und $-a_2$. Eine dritte Wurzel λ_3 liegt ebenso zwischen $-a_2$ und $-a_3$ u. s. w., eine n^{te} zwischen $-a_{n-1}$ und $-a_n$. Mehr als n Wurzeln kann aber die Gleichung (17) nicht besitzen, da sie vom n^{ten} Grade ist. Demnach erhalten wir die identischen Gleichungen:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1+\lambda_1} + \dfrac{x_2^2}{a_2+\lambda_1} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n+\lambda_1} = 1 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1+\lambda_2} + \dfrac{x_2^2}{a_2+\lambda_2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n+\lambda_2} = 1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{x_1^2}{a_1+\lambda_n} + \dfrac{x_2^2}{a_2+\lambda_n} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n+\lambda_n} = 1, \text{ wo für} \end{cases}$$

$$(19)\quad a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n \text{ und } \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \ldots > \lambda_n$$

zugleich ist:

$$(20)\quad \lambda_1 > -a_1 > \lambda_2 > -a_2 > \lambda_3 > -a_3 \ldots > -a_{n-1} > \lambda_n > -a_n.$$

Subtrahiert man noch irgend zwei verschiedene der Gleichungen (18) von einander, so erhält man für ungleiche Marken i und k:

$$(21)\quad \frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_i)(a_1+\lambda_k)} + \frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_i)(a_2+\lambda_k)} + \ldots + \frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_i)(a_n+\lambda_k)} = 0.$$

Jede der Gleichungen (18) stellt bei fester Wahl der Gröfsen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, die nur den Gleichungen (20) genügen müssen, und bei veränderlichen Werten von $x_1 \ldots x_n$ ein Mittelpunkts-Gebilde dar. Da die n so erhaltenen Gebilde verschiedenen Arten angehören, so ergiebt sich der Satz:

Durch jeden Punkt des Raumes gehen n konfokale Gebilde zweiter Ordnung, und diese sind sämtlich von verschiedener Art. Umgekehrt schneiden sich n konfokale Gebilde, wenn sie n verschiedenen Arten angehören, in 2^n gegen die Axen symmetrisch gelegenen Punkten.

Indem man noch die Gleichung für die Tangentialebene eines Gebildes zweiter Ordnung entwickelt und als Winkel, den zwei krumme Gebilde in einem ihrer Schnittpunkte mit einander bilden, den von den Tangentialebenen eingeschlossenen Winkel festsetzt, folgt aus den Gleichungen (18)—(21) der Satz:

Zwei konfokale Gebilde derselben Art haben keinen Punkt gemeinschaftlich; dagegen schneiden sich zwei Gebilde verschiedener Art in einem $(n-2)$-fach ausgedehnten Gebilde und stehen in jedem Punkte des Schnittes auf einander senkrecht.

§ 9.

Analytische Erweiterung der nicht-euklidischen Geometrieen.

Wir wollen jetzt für eine beliebige Zahl n von Dimensionen eine analytische Theorie aufbauen, deren Resultate für $n = 2$ und $n = 3$ mit den Entwicklungen der §§ 9—21 des ersten Abschnittes übereinstimmen. [34])

Zu dem Ende wählen wir $n + 1$ Variabele $x_0, x_1 \ldots x_n$ und setzen zwischen ihnen die Beziehung fest:

$$(1)\quad k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = k^2.$$

Dabei wollen wir für ein negatives k^2 von dem Werte $x_0 = 1$, $x_1 = \ldots = x_n = 0$ ausgehen und alle andern daraus stetig unter fortwährender Gültigkeit der Gleichung (1) herleiten.

Indem wir wieder jedes Wertsystem $(x_0 x_1 \ldots x_n)$ einen Punkt nennen, definieren wir den Abstand e zweier Punkte x und x' durch die Gleichung:

$$(2)\quad k^2 \cos\frac{e}{k} = k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n',$$

wobei leicht zu übersehen ist, dafs für reelle Werte von $x_0, x_1 \ldots x_n$ und $x_0', x_1' \ldots x_n'$ auch e reell ist und nur verschwindet, wenn die Punkte identisch werden.

Wir bestimmen die $y_\varkappa$ als Funktionen von $x_0, x_1 \ldots x_n$ und die $y_\varkappa'$ als dieselben Funktionen von $x_0', x_1' \ldots x_n'$, so dafs die Gleichungen bestehen:

$$k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = k^2 y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2,$$
$$k^2 x_0'^2 + x_1'^2 + \ldots + x_n'^2 = k^2 y_0'^2 + y_1'^2 + \ldots + y_n'^2,$$
$$k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n' = k^2 y_0 y_0' + y_1 y_1' + \ldots + y_n y_n'.$$

Dann ergeben sich auf dem im vorigen Paragraphen durchgeführten Wege, dafs die $y_\varkappa$ homogene lineare Funktionen der $x_0, x_1 \ldots x_n$ sind, so dafs wir setzen können:

$$(3)\quad y_\varkappa = \sum_{\varrho=0}^{n} \mu_{\varkappa\varrho} x_\varrho \quad \text{für } \varkappa = 0, 1 \ldots n,$$

wo zwischen den Koeffizienten $\mu_{\varkappa\varrho}$ gewisse leicht zu übersehende Relationen bestehen.

Bei den weiteren Untersuchungen wollen wir der Einfachheit wegen zuerst annehmen, k^2 sei positiv. Wir suchen den geometrischen Ort aller Punkte $(x_0 \ldots x_n)$, welche von zwei Punkten x' und x'' gleichen Abstand haben. Dann müssen die Werte x_0, $x_1 \ldots x_n$ der Gleichung genügen:

$$(4)\quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0,$$

wo ist

$$(5)\quad \varrho a_0 = k^2(x_0' - x_0''),\ \varrho a_1 = x_1' - x_1'' \ldots \varrho a_n = x_n' - x_n''.$$

Wenn umgekehrt die $a_0, a_1 \ldots a_n$ und $x_0' \ldots x_n'$ gegeben sind, so lassen sich die $x_0'' \ldots x_n''$ nach (5) stets eindeutig bestimmen, und die Gröfse ϱ kann weder unendlich noch imaginär werden. Sie kann auch nicht verschwinden, wenn nicht das Wertsystem x' der Gleichung (4) genügt. Aus (5) folgt nämlich zunächst

$$x_0'' = x_0' - \frac{\varrho a_0}{k^2},\ x_1'' = x_1' - \varrho a_1 \ldots x_n'' = x_n' - \varrho a_n,$$

und wenn wir auf x'' die Gleichung (1) anwenden, so ergiebt sich:

$$2\varrho(a_0 x_0' + a_1 x_1' + \ldots + a_n x_n') = \varrho^2\left(\frac{a_0^2}{k^2} + a_1^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Die Transformation (3) kann jedes Gebilde (4) in jedes Gebilde $\Sigma b_\iota x_\iota = 0$ umwandeln; jedes derartige Gebilde heifst eine $(n-1)$-dimensionale Ebene. Indem man die Transformationen einer Ebene in sich untersucht, findet man dieselben identisch mit denjenigen Transformationen, welche nach den

Gleichungen (3) für einen $(n-1)$-dimensionalen Raum für dasselbe k^2 gelten.

Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, können wir zwischen den Konstanten in der Gleichung einer Ebene (ihren Koordinaten) die Beziehung festsetzen:

$$(6)\quad \frac{a_0^{\,2}}{k^2} + a_1^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2} = 1.$$

Transformieren wir die Gleichung (4) unter dieser Voraussetzung durch die Transformation (3) und beachten die zwischen den Koeffizienten $\mu_{i\varkappa}$ bestehenden Relationen, so erkennen wir, dafs auch die neuen Koeffizienten der Gleichung (6) genügen. Zugleich können wir mit der Ebene $(a_0, a_1 \ldots a_n)$ den Punkt $(\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_n)$ in enge Beziehung bringen, dessen Koordinaten durch die Gleichungen erhalten werden:

$$(7)\quad \xi_0 = \frac{a_0}{k},\; \xi_1 = a_1 k \ldots \xi_n = a_n k.$$

Wenn dann e den Abstand der Punkte ξ und x bezeichnet, so ist

$$k^2 \cos\frac{e}{k} = k^2 \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = \frac{1}{k}(a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots a_n x_n);$$

also ist $\cos\frac{e}{k} = 0$, wenn der Punkt x auf der Ebene $(a_0, a_1 \ldots a_n)$ gewählt wird. Wir bezeichnen den Punkt $(\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_n)$ als den Pol der Ebene $(a_0, a_1 \ldots a_n)$, wenn die Beziehung (7) besteht, und letztere als die Polarebene des Punktes (ξ), und finden den Satz:

Der Abstand eines Punktes von jedem Punkte seiner Polarebene beträgt $\frac{1}{2}k\pi$.

Sind $a_0', a_1' \ldots a_n'$ die Koordinaten einer zweiten Ebene, so bleibt bei jeder Transformation von der hier vorausgesetzten Eigenschaft auch die Gröfse des Ausdrucks

$$\frac{a_0 a_0'}{k^2} + a_1 a_1' + \ldots + a_n a_n'$$

ungeändert. Der Wert desselben liegt zudem (für ein positives k^2) zwischen $+1$ und -1, und erreicht den ersten Wert nur, wenn $a_0' = a_0$, $a_1' = a_1 \ldots a_n' = a_n$ ist; wir können daher setzen:

$$(8)\quad \cos\varphi = \frac{a_0 a_0'}{k^2} + a_1 a_1' + \ldots + a_n a_n'.$$

Dann stellt φ eine invariante Beziehung zwischen den beiden Ebenen dar und wird als ihr Winkel bezeichnet.

Wenn mehrere Ebenen

$$(9)\quad \Sigma a_\nu' x_\nu = 0,\ \Sigma a_\nu'' x_\nu = 0 \ldots \Sigma a_\nu^{(p)} x_\nu = 0$$

gegeben sind, so können wir nach ihrem Schnittgebilde fragen. Wir gelangen dadurch, gerade wie im vorigen Paragraphen, zu der $(n-p)$-dimensionalen Ebene und für $p = n-1$ zur Geraden. Ebenso erhalten wir die Definitionen für den Büschel, den Bündel u. s. w. von $(n-1)$-dimensionalen Ebenen.

Bei dieser Darstellung setzen wir natürlich voraus, dafs keine der Ebenen (9) durch das Schnittgebilde der übrigen hindurchgeht, dafs also die Gleichungen von einander unabhängig sind. Unter dieser Voraussetzung dürfen wir der Gleichung jeder Ebene, welche durch das Schnittgebilde geht, die Form geben:

$$(10)\quad \sum_{\alpha,\nu} \lambda_\alpha a_\nu^{(\alpha)} x_\nu = 0 \text{ für } \alpha = 1 \ldots p,\ \nu = 0,\ 1 \ldots n,$$

wo die Bedingung (6) eine quadratische Relation zwischen $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ erfordert, und wo die Koeffizienten sämtlicher x gleichzeitig nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_p = 0$ verschwinden.

Soll die Ebene (10) auf der Ebene

$$(11)\quad \Sigma b_\nu x_\nu = 0$$

senkrecht stehen, so mufs nach (8) die Bedingung erfüllt sein:

$$(12)\quad \sum_{\alpha,\nu} \lambda_\alpha a_\nu^{(\alpha)} b_\nu = 0.$$

Diese Gleichung kann für alle Werte der λ erfüllt sein. Dann stehen alle Ebenen (10) auf der Ebene (11) senkrecht und wir legen dem Schnittgebilde dieselbe Eigenschaft bei. Dieser Fall tritt ein, wenn jede der Ebenen (9) oder allgemeiner, wenn irgend p unter den Ebenen (10), deren Gleichungen von einander unabhängig sind, auf der Ebene (11) senkrecht stehen.

Wenn aber die Gleichung (12) nicht identisch erfüllt ist, so wird, weil nur eine Bedingung zwischen den λ besteht, eine $(p-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Ebenen die verlangte Eigenschaft haben. Dann läfst sich durch das Schnittgebilde eine $(n-1)$-dimensionale Ebene legen, welche auf allen Ebenen dieser Mannigfaltigkeit senkrecht steht. Die Lage dieser Ebene zur Ebene (11) ist charakteristisch für die Lage des Schnittgebildes zur Ebene (11).

Sind p Punkte (x'), $(x'') \ldots (x^{(p)})$ gegeben, so mögen alle Punkte betrachtet werden, deren Koordinaten durch die Gleichungen gegeben sind:

(13) $x_\nu = u_1 x_\nu' + u_2 x_\nu'' + \ldots + u_p x_\nu^{(p)}$ für $\nu = 0, 1 \ldots n$.

Hierbei mufs vorausgesetzt werden, dafs $x_0, x_1 \ldots x_n$ nur dadurch sämtlich gleich null gemacht werden können, dafs alle Gröfsen $u_1 \ldots u_p$ verschwinden; im andern Falle könnte man die Koordinaten durch weniger von einander unabhängige Gröfsen darstellen. Die Relation (1) verlangt, dafs zwischen den p Gröfsen $u_1 \ldots u_p$ eine quadratische Beziehung besteht; die Gesamtheit der durch (13) dargestellten Punkte stellt also eine $(p-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und zwar, wie man sofort sieht, eine Ebene von $p-1$ Dimensionen dar.

Die $(n-1)$-dimensionalen Gebilde zweiter Ordnung werden durch eine homogene quadratische Gleichung

$$(14) \quad \sum_{\iota, \varkappa = 0}^{n} a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

definiert. Die projektiven Eigenschaften sind offenbar dieselben, welche wir in § 7 entwickelt haben. Viele metrischen Eigenschaften hangen mit der Aufgabe zusammen, die beiden Formen $k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ und $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa$ durch dieselben Quadrate darzustellen. Diese Aufgabe läfst sich für ein positives k^2 immer lösen, da alsdann die erste Form stets positiv ist. Wir finden also eine neue Darstellung

$$(15) \quad b_0 y_0^2 + b_1 y_1^2 + \ldots + b_n y_n^2 = 0$$

durch die Gröfsen $y_0, y_1 \ldots y_n$, welche homogene lineare Funktionen von $x_0, x_1 \ldots x_n$ sind und zwischen denen die Beziehung besteht:

$$k^2 y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = k^2.$$

Die Einteilung der quadratischen Gebilde beruht einmal auf projektiven Eigenschaften. Wenn bei irgend einer Darstellung ihrer Gleichung durch lauter Quadrate verschwindende Koeffizienten vorkommen, so nennen wir das Gebilde ein Kegelgebilde und unterscheiden davon die eigentlichen quadratischen Gebilde. Die letzteren zerfallen dann wieder in $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Arten je nach der Zahl der positiven und negativen Werte unter den Koeffizienten $b_0, b_1 \ldots b_n$ in (15). Demnach ist das Gebilde entweder a) imaginär, oder b) reell ohne gerade Linien, oder c) reell mit geraden Linien, aber ohne zweidimensionale Ebenen u. s. w.

Damit sind aber alle allgemeinen Arten erschöpft. Man kann nur noch die speziellen Gebilde hervorheben, in deren Gleichungen (15) sich unter den Koeffizienten $\frac{b_0}{k^2}$, $b_1, \ldots b_n$ gleiche (oder auch Gruppen von gleichen) befinden.

Für ein negatives k^2 werden einige der hier skizzierten Untersuchungen etwas schwieriger. Die Ebene hat wieder die Gleichung (4), aber wenn nicht zwischen den Koeffizienten die Beziehung besteht:

$$\frac{a_0{}^2}{k^2} + a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2 > 0,$$

so wird ihre Gleichung durch kein Wertsystem befriedigt, welches der Gleichung (1) genügt. Sollen zwei Ebenen einander schneiden, so mufs sein

$$-1 < \frac{a_0 a_0'}{k^2} + a_1 a_1' + \ldots + a_n a_n' < +1;$$

aber wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so erhalten wir weitere Beziehungen zwischen den beiden Ebenen. Hierauf können wir jedoch an dieser Stelle nur kurz verweisen; ebensowenig kann es unsere Aufgabe sein, die Theorie der quadratischen Gebilde für ein negatives k^2 zu entwickeln und die sämtlichen Arten derselben aufzuzählen.

§ 10.

Der allgemeine Ausdruck für das Linienelement.

Nach den beiden letzten Paragraphen erscheint die analytische Behandlung des Raumes als Spezialfall einer Untersuchung über die aus n Variabeln zu bildenden Wertsysteme. Nun soll aber das einzelne Wertsystem nicht für sich allein betrachtet, sondern zu den übrigen Wertsystemen in Beziehung gesetzt werden. Nach welchen Gesetzen dies zu geschehen hat, kann an dieser Stelle nicht ermittelt werden, mufs vielmehr einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. In § 8 gelang dies in folgender Weise: In der Ebene und im Raume ist der Abstand je zweier Punkte von einander unveränderlich; ein Punktepaar 0, 1 kann man daher nur mit einem andern Punktepaare 2, 3 zur Deckung bringen, wenn der Abstand (0, 1) gleich dem Abstand (2, 3) ist. Legen wir also rechtwinklige Cartesische Koordinaten zu Grunde, so bleibt der Ausdruck $(x_1 - x_1')^2 + \ldots (x_n - x_n')^2$ für $n = 2$ und $n = 3$ ungeändert. Deshalb bezogen wir in § 8 die Wertsysteme $x_1 \ldots x_n$ für jedes beliebige n so auf einander, dafs die vorstehende quadratische Form sich nicht ändert. Ein solcher Ausgangspunkt ist vom analytischen Standpunkt aus natürlich willkürlich, ja ohne prinzipielle Berechtigung. Ersetzen wir z. B. die Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ durch n von einander unabhängige Gröfsen $z_1 \ldots z_n$, welche Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind, so mufs es doch möglich sein, die gewonnenen Resultate auch vermittelst der Gröfsen $z_1 \ldots z_n$ zu erlangen. Indessen ist es nicht einmal möglich, den Ausdruck für das Quadrat des Abstandes in den neuen Variabeln genügend zu charakterisieren.

Um diesem Ziele wenigstens näher zu kommen, nehmen wir an, die beiden Punkte lägen einander unendlich nahe; die Koordinaten des einen mögen $x_1 \ldots x_n$, die des andern $x_1 + dx_1 \ldots x_n + dx_n$ sein. Durch die beiden Punkte legen wir eine gerade Linie; dann ist die Länge des zwischen den beiden Punkten enthaltenen Stückes gleich $\sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}$. Denkt man sich aber eine beliebige Linie durch die beiden Punkte gelegt, so wird man annehmen dürfen, der durch sie begrenzte Bogen, das Linienelement, fiele mit der geradlinigen Strecke zusammen, wofern die Kurve nur in dem Punkte x eine Tangente hat. Die letzte Voraussetzung kommt darauf hinaus, anzunehmen, dafs, wenn der Punkt $x + dx$ auf der Kurve eine andere Lage annimmt, die Gleichungen befriedigt werden: $dx_1 = p_1(x)dt \ldots dx_n = p_n(x)dt$, wo die $p_1(x) \ldots p_n(x)$ blofse Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ und dt eine unendlich kleine Gröfse bedeutet. Hiernach tritt der Ausdruck $\sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}$ in enge Beziehung zu allen krummen Linien, für welche die Unterschiede der Koordinaten in der Umgebung des Punktes x durch Multiplikation fester Gröfsen, die nur Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind, mit einer unendlich kleinen Gröfse dt erhalten werden. Ersetzen wir aber in diesem Ausdruck die $x_1 \ldots x_n$ durch beliebige lineare Funktionen derselben:

$$y_\iota = \sum_\alpha c_{\iota\alpha} x_\alpha + m_\iota,$$

wo die $c_{\iota\alpha}$ und m_ι Konstante sind, so ändert sich der Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes um in $\Sigma a_{\iota\varkappa} dy_\iota dy_\varkappa$, wo sämtliche Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ konstante Werte besitzen. Wenn umgekehrt das Quadrat des Linienelements durch eine beständig positive quadratische Form mit konstanten Koeffizienten dargestellt wird, so läſst sich diese wieder durch lineare Verwandlung der Koordinaten als Summe von n Quadraten darstellen. Nun übersieht man aber sehr leicht, daſs es auf dasselbe hinauskommt, ob man das Quadrat des Linienelementes durch $dx_1{}^2 + \ldots + dx_n{}^2$ oder das Quadrat des Abstandes durch $(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2$ dargestellt werden läſst. Wir können demnach die euklidische Geometrie auch durch die Voraussetzung charakterisieren, daſs das Quadrat des Linienelementes durch eine beständig positive quadratische Form mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden soll.

Man kann aber auch noch einen Schritt weiter gehen und die $x_1 \ldots x_n$ durch n ganz beliebige, von einander unabhängige Funktionen $z_1 \ldots z_n$ ersetzen. Wählt man beliebig

$$x_\iota = \varphi_\iota(z_1 \ldots z_n) \text{ für } \iota = 1 \ldots n,$$

so folgt $dx_\iota = \sum\limits_\varkappa \frac{d\varphi_\iota}{dz_\varkappa} dz_\varkappa$, und demnach erhält man für das Linienelement ds die Gleichung:

$$ds^2 = \Sigma A_{\iota\varkappa} dz_\iota dz_\varkappa,$$

wo jetzt die Koeffizienten $A_{\iota\varkappa}$ im allgemeinen nicht mehr Konstante, sondern Funktionen von $z_1 \ldots z_n$ sind. Aber dieser Ausdruck ist allgemeiner als der Ausdruck $dx_1{}^2 + \ldots + dx_n{}^2$, da es im allgemeinen nicht möglich ist, den Ausdruck auf der rechten Seite von (1) durch n Quadrate mit den Koeffizienten eins zu ersetzen. Das erkennt man in folgender Weise. Man denke sich in einer r-dimensionalen Raumform (für $r > n$) ein n-dimensionales Gebilde durch die Gleichungen bestimmt:

$$x_\iota = f_\iota(z_1 \ldots z_n) \text{ für } \iota = 1 \ldots r.$$

Sucht man in diesem Gebilde den Ausdruck für das Linienelement $\sqrt{dx_1{}^2 + \ldots + dx_r{}^2}$, so erscheint er wieder als Quadratwurzel aus einer stets positiven quadratischen Form in den Differentialen $dz_1 \ldots dz_n$; aber ein solches Gebilde hat im allgemeinen nicht diejenigen Eigenschaften, welche einem n-dimensionalen euklidischen Raume zukommen.

Wir sind hier, ausgehend von einer ganz speziellen Voraussetzung, zu der obigen allgemeinen Form des Linienelementes gelangt. Wir müssen uns fragen, ob wir die Berechtigung dieser Form durch allgemeine Betrachtungen beweisen können. Diese Frage hat Riemann zu beantworten gesucht in einem Vortrage, welchen er im Jahre 1854 behufs seiner Habilitation vor der philosophischen Fakultät in Göttingen gehalten hat, der aber erst nach seinem Tode gedruckt worden ist. In dieser Arbeit entwickelt er zuerst den allgemeinen Begriff einer n-fach ausgegehnten Mannigfaltigkeit auf eine Weise, welche sehr viele Berührungspunkte bietet mit den um zehn Jahre älteren Darlegungen Grafsmanns, aber davon vollständig unabhängig und viel allgemeiner ist. Eine klare Übersicht über diesen Teil seiner Arbeit würde in einem engen Rahmen kaum möglich sein; Riemanns Darlegung ist bereits ganz kurz gehalten und wird von ihm selbst als Vorarbeit für Beiträge zur Analysis situs bezeichnet. Als wesentliches Kennzeichen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit glaubt er zu finden, dafs sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Gröfsenbestimmungen zurückführen läfst. Demnach wird jedes Wertsystem $x_1 \ldots x_n$, für welches allen Variabeln ein konstanter Wert beigelegt wird, als Punkt bezeichnet; die Gesamtheit derjenigen, für welche die Variabeln von einer einzigen Veränderlichen abhängig sind, heifst eine Linie, und wenn gesetzt wird:

$$x_1 = \varphi_1 (u_1 \ldots u_p) \ldots x_n = \varphi_n (u_1 \ldots u_p) \text{ für } p < n,$$

wo $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ reelle Funktionen der unbeschränkt veränderlichen reellen Gröfsen $u_1 \ldots u_p$ sind, so möge deren Gesamtheit als ein p-dimensionales Gebilde bezeichnet werden. Um auf diese Mannigfaltigkeit überhaupt Mafs-Verhältnisse anwenden zu können, macht Riemann die Annahme, dafs die Länge jeder Linie von ihrer Lage unabhängig sei, dafs also jede Linie durch jede andere Linie gemessen werden könne. Diese (an sich unzulässige) Annahme wird aber keineswegs in voller Allgemeinheit vorausgesetzt, vielmehr beschränkt sich Riemann sofort wieder auf solche Linien, wie wir sie bereits oben (S. 211) charakterisiert haben. Dann wird das Linienelement eine homogene Funktion ersten Grades der Gröfsen dx, welche ungeändert bleibt, wenn sämtliche Gröfsen dx ihr Zeichen ändern, und worin die willkürlichen Konstanten stetige Funktionen der Gröfsen x sind. Ist m irgend eine Paarzahl, so setzt er das Linienelement als m^{te} Wurzel aus einer stets positiven Form m^{ten} Grades in den Differentialen dx voraus. Der einfachste Fall ist also der, wo das Quadrat des Linienelementes als Form zweiten Grades vorausgesetzt wird, so dafs die Gleichung besteht:

$$(1)\quad ds^2 = \Sigma a_{\iota\varkappa}\, dx_\iota\, dx_\varkappa.$$

Wir haben jetzt zu untersuchen, ob wir wohl auf rein analytischem Wege zu den speziellen Fällen gelangen können, welche wir in den beiden vorangehenden Paragraphen zu Grunde gelegt haben. Darüber hat Riemann selbst in einer andern Arbeit wichtige Andeutungen gemacht. Ehe aber diese Abhandlung bekannt geworden war, haben sich die Herren Christoffel und Lipschitz mit derselben Aufgabe beschäftigt. Im Anschlufs daran sind noch zahlreiche andere Arbeiten erschienen, welche wir hier nicht sämtlich erwähnen können. Wir begnügen uns damit, einige Resultate anzugeben, welche Herr Schur im Anschlufs an frühere Arbeiten entwickelt hat. Für die Beweise müssen wir auf seine Arbeit selbst verweisen.[35])

Der Ausdruck für das Linienelement gestattet, die kürzesten Linien zu bestimmen. Führt man nämlich die Abkürzung ein:

$$(2)\quad \begin{bmatrix} \iota\varkappa \\ \varrho \end{bmatrix} = \frac{da_{\iota\varrho}}{dx_\varkappa} + \frac{da_{\varkappa\varrho}}{dx_\iota} - \frac{da_{\iota\varkappa}}{dx_\varrho},$$

und bezeichnet man mit r die Länge der geodätischen Linie, so ergeben sich die zweiten Differentialquotienten aus den Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho\varkappa} \frac{d^2x_\varrho}{dr^2} = -\tfrac{1}{2} \sum_{\varrho\sigma} \begin{bmatrix} \varkappa \\ \varrho\sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\varrho}{dr}\frac{dx_\sigma}{dr}.$$

Diese Gleichung gestattet, wenn der Anfangspunkt $(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0)$ und die Richtung $(dx_1{}^0 \ldots dx_n{}^0)$ der geodätischen Linie gegeben ist, die zweiten und dann die dritten und die ferneren Ableitungen $\frac{d^2x_\alpha{}^0}{dr^2}, \frac{d^3x_\alpha{}^0}{dr^3} \ldots$ zu berechnen.

Indem man $\frac{dx_\alpha{}^0}{dr} = \eta_\alpha$ setzt, wo die n Gröfsen $\eta_1 \ldots \eta_n$ durch die Relation verbunden sind:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}{}^0\, \eta_\iota\, \eta_\varkappa = 1,$$

kann man jeden Punkt des Raumes, welcher in der Umgebung des festen Punktes $(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0)$ liegt, dadurch bestimmen, dafs man von dem festen Punkte aus nach demselben die kürzeste

Linie zieht; sind $\eta_1 \ldots \eta_n$ die Bestimmungsgröfsen dieser geodätischen Linie und ist r ihre Länge vom festen bis zu dem zu bestimmenden Punkte, so möge gesetzt werden:

$y_\alpha = r\eta_\alpha$; alsdann wird durch $y_1 \ldots y_n$ der Punkt bestimmt. Diese neuen Variabeln bezeichnet Herr Lipschitz als die Normalvariabeln. In diesen neuen Variabeln möge das Linienelement ds durch die Gleichung bestimmt sein:

$$\Sigma b_{\iota\varkappa}\, dy_\iota\, dy_\varkappa = ds^2,$$

und diejenigen Werte, welche die $b_{\iota\varkappa}$ beim Verschwinden der y annehmen, mögen entsprechend der für $a_{\iota\varkappa}{}^0$ festgesetzten Bedeutung mit $b_{\iota\varkappa}{}^0$ bezeichnet werden.

Wir legen zwei feste Richtungen η_α' und η_α'' zu Grunde, setzen zwischen zwei Gröfsen α und β die Beziehung fest

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\, \Sigma b_{\iota\varkappa}{}^0 \eta_\iota' \eta_\varkappa'' + \beta^2 = 1,$$

definieren die Gröfse φ durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = \alpha + \beta\, \Sigma b_{\iota\varkappa}{}^0 \eta_\iota' \eta_\varkappa''$$

und suchen diejenige Fläche, welche alle durch die Richtungen $\eta_\iota = \alpha\eta_\iota' + \beta\eta_\iota''$ bestimmten geodätischen Linien enthält. Auf dieser Fläche erscheint das Linienelement ds in der Form:

$$(3)\quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2\mu^2 d\varphi^2},$$

wo μ^2 eine Funktion von $y_1 \ldots y_n$ ist. Dann ist das Gaufssche Krümmungsmafs $\frac{1}{k^2}$ dieser Fläche im Anfangspunkte

$$(4)\quad \frac{1}{k^2} = -\frac{\dfrac{d^2(r\mu)}{dr^2}}{r\mu},$$

Um diesen Ausdruck in den ursprünglichen Koordinaten darzustellen, führen wir zuerst die Gröfsen $A_{\iota\varkappa}$ durch die Gleichungen ein:

$$(5)\quad \sum_\varrho a_{\iota\varrho} A_{\varkappa\varrho} = 0 \text{ oder } = 1, \text{ jenachdem } \iota \gtrless \varkappa \text{ oder } \iota = \varkappa \text{ ist,}$$

und setzen ferner zur Abkürzung:

$$(6)\quad (\iota\varkappa\lambda\mu) = \frac{d^2 a_{\iota\varkappa}}{dx_\lambda\, dx_\mu} + \frac{d^2 a_{\mu\nu}}{dx_\iota\, dx_\varkappa} - \frac{d^2 a_{\iota\lambda}}{dx_\varkappa\, dx_\mu} - \frac{d^2 a_{\varkappa\mu}}{dx_\iota\, dx_\lambda}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} A_{\varrho\sigma} \left\{ \begin{bmatrix} \varrho \\ \iota\varkappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varrho \\ \iota\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \varkappa\mu \end{bmatrix} \right\}.$$

Dann folgt als Ausdruck für das Krümmungsmafs:

$$(7)\quad \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Sigma(\iota\varkappa\lambda\mu)(dx_\iota\,\delta x_\mu - \delta x_\iota\,dx_\mu)(dx_\varkappa\,\delta x_\lambda - \delta x_\varkappa\,dx_\lambda)}{\Sigma(a_{\iota\varkappa}a_{\lambda\mu} - a_{\iota\lambda}a_{\varkappa\mu})(dx_\iota\,\delta x_\mu - \delta x_\iota\,dx_\mu)(dx_\varkappa\,\delta x_\lambda - \delta x_\varkappa\,dx_\lambda)}.$$

Dieser Ausdruck heifst das Riemannsche Krümmungsmafs des Raumes in dem Punkte $(x_1 \ldots x_n)$ für das durch die Richtungen ι_ι', ι_ι'' bestimmte Flächenelement.

Die betrachtete Fläche enthält unendlich viele gerade Linien, welche sämtlich von einem Punkte ausgehen und deren Richtungskonstanten einer linearen Gleichung genügen; sie wird von Herrn Schur als geodätische Fläche bezeichnet. Ihre Analogie zu den zweidimensionalen Ebenen ist aber dann erst vollständig, wenn die Fläche eine zweifach unendliche Schar von geodätischen Linien enthält. Statt aber die Aufgabe zu lösen, unter welchen Bedingungen diese Forderung für eine einzige Fläche erfüllt ist, stellt sich Herr Schur sogleich die Aufgabe, zu erforschen, unter welchen Bedingungen alle durch einen festen Punkt gehenden geodätischen Flächen doppelt unendlich viele geodätischen Linien enthalten. Hierfür findet er als notwendige und hinreichende Bedingung, dafs alle durch den Punkt gehenden geodätischen Flächen für jeden Punkt des Raumes gleiches Riemannsches Krümmungsmafs besitzen. Soll also die gleiche Eigenschaft für jeden Punkt des Raumes und somit für alle geodätischen Flächen gelten, so mufs das Riemannsche Krümmungsmafs für alle Punkte des Raumes und für alle Flächenrichtungen dasselbe sein. Speziell ergiebt sich der Satz:

Wenn in einem Raume das Riemannsche Krümmungsmafs in jedem Punkte nach allen Flächenrichtungen konstant ist, so ändert es sich auch von Punkt zu Punkt nicht.

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt für einen konstanten Wert von k^2:

$$ds^2 = dr^2 + k^2 \sin^2\frac{r}{k}\,(d\iota_1{}^2 + \ldots + d\iota_n{}^2),$$

und wenn man hier setzt:

$$x_\iota = k \sin\frac{r}{k}\cdot\iota_\iota,\quad x_0 = \cos\frac{r}{k},$$

wo ist:

$$k^2 x_0{}^2 + x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 = k^2,$$

so erhält man

$$(8)\quad ds^2 = k^2 dx_0{}^2 + \ldots + dx_n{}^2.$$

Hiervon ausgehend führen aber leichte Integrationen zu derjenigen Gleichung für den Abstand, von welcher wir im vorigen Paragraphen ausgegangen sind. Wir sehen also, dafs die in den vorangehenden Paragraphen gelöste Aufgabe in enger Beziehung zu den Untersuchungen über das Linienelement steht. Eine genauere Prüfung müssen wir uns jedoch für eine spätere Stelle vorbehalten.

§ 11.

Beweise in geometrischem Gewande.

Wir kehren zu den Untersuchungen des achten Paragraphen zurück. Dort gingen wir von der Gesamtheit der Wertsysteme $x_1 \ldots x_n$ aus; die gegenseitige Beziehung der einzelnen Wertsysteme und gewisser Mannigfaltigkeiten untersuchten wir dadurch, dafs wir das Quadrat des Abstandes durch die Formel $\Sigma(x_\iota - x_\iota')^2$ definierten und Mannigfaltigkeiten als kongruent bezeichneten wenn sie durch eine Transformation in einander umgewandelt werden können, bei welcher der Ausdruck $\Sigma(x_\iota - x_\iota')$ für irgend zwei Wertsysteme derselben Mannigfaltigkeit ungeändert bleibt. Daraus leiteten wir Sätze her, welche ganz denen der Geometrie entsprechen und welche für $n = 3$ in rein geometrische Sätze übergehen.

Nachdem wir aber auf analytischem Wege eine Anzahl von Sätzen hergeleitet haben, können wir diese Sätze allein benutzen, um weitere Folgerungen daraus zu ziehen; dann nimmt auch die Beweisführung ganz ein geometrisches Gewand an. Wir erhalten dadurch einen Wissenszweig, welcher seinem Objekte nach der Analysis angehört, in seinen Ergebnissen aber und in seinen Beweisen mit der Geometrie die gröfste Ähnlichkeit zeigt. Um diesen Zweig recht systematisch aufzubauen, verstehen wir für $m < n$ unter einer m-dimensionalen Ebene, welche wir der Kürze wegen mit E_m bezeichnen wollen, diejenige Gesamtheit von Wertsystemen, welche in § 8 definiert ist; ebenso soll unter einer m-dimensionalen Kugel K_m die Gesamtheit aller Wertsysteme $(x_1 \ldots x_n)$ verstanden werden, welche in einer E_{m+1} liegen und zu einem festen Punkte $(a_1 \ldots a_n)$ dieser Ebene in der Beziehung stehen, dafs $\Sigma(x_\iota - a_\iota)^2$ konstant ist. Von diesen Wertsystemen setzen wir folgende Sätze voraus:

1. Wenn eine Gerade zwei Punkte mit einer beliebigen Ebene E_m gemeinschaftlich hat, so fällt sie ganz in sie hinein.

2. Durch eine m-dimensionale Ebene und einen ihr nicht angehörigen Punkt läfst sich eine, und zwar nur eine Ebene von $m + 1$ Dimensionen legen. Durch fortgesetztes Ziehen von geraden Linien kann man von der E_m und dem gegebenen Punkte aus zu jedem Punkte gelangen, dessen Zugehörigkeit zu E_{m+1} auf irgend einem Wege erkannt ist.

3. Jede in einer E_m gelegene E_{m-1} teilt dieselbe in zwei Teile, so dafs jede gerade Linie, welche zwei auf verschiedenen Teilen von E_m gelegene Punkte verbindet, die E_{m-1} schneidet, und dafs jede in E_m gelegene Gerade, welche einen Punkt mit der E_{m-1} gemeinschaftlich hat, in diesem Punkte von der einen auf die andere Seite tritt.

4. Jede dreidimensionale Ebene hat die Eigenschaften des euklidischen Raumes, und demnach jede zweidimensionale Ebene die einer euklidischen Ebene.

Aus diesen Voraussetzungen lassen sich weitere Sätze herleiten.

a) »Wenn für $\mu > \nu$ eine E_ν mit einer E_μ eine $E_{\nu-1}$ und einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt E_0 gemeinschaftlich hat, so fällt sie ganz in dieselbe hinein.«

Verbinden wir einen beliebigen Punkt der $E_{\nu-1}$ mit E_0 durch eine gerade Linie E_1, so liegen alle ihre Punkte sowohl in der E_ν wie in E_μ. Verbinden wir einen andern Punkt der E_1 mit einem beliebigen Punkte der $E_{\nu-1}$, so gehört auch diese Gerade der E_μ und E_ν an. Indem man so fortfährt, kann man zu allen Punkten der E_ν gelangen.

b) »Wenn $\varkappa$ ($< n$) gerade Linien gegeben sind, welche sich in einem Punkte schneiden, so läfst sich jedenfalls eine Ebene von $\varkappa$ Dimensionen durch sie hindurchlegen, und zwar wenn die $\varkappa$ Geraden nicht in einer Ebene von $\varkappa - 1$ Dimensionen liegen, so giebt es eine einzige $E_\varkappa$, in welcher alle diese Geraden liegen.«

Durch zwei Geraden g_1 und g_2 geht im vorliegenden Falle eine einzige E_2; wenn diese die g_3 nicht enthält, so lege man durch E_2 und einen vom gemeinschaftlichen Schnittpunkt verschiedenen Punkt eine E_3; diese enthält die g_3; wenn g_4 nicht in ihr liegt, so lege man durch E_3 und einen Punkt von g_4 eine E_4 u. s. w.

c) »Durch eine E_λ und E_μ, welche keinen Punkt gemeinschaftlich haben, läfst sich eine Ebene legen, für welche die Zahl ν der Dimensionen höchstens gleich $\lambda + \mu + 1$ ist.«

Wenn $\lambda + \mu + 1 > n$ ist, so tritt an Stelle der E_ν der n-dimensionale Raum. Im andern Falle nehme man auf E_μ einen Punkt p und lege durch E_λ und p eine $(\lambda + 1)$-dimensionale Ebene $E_{\lambda+1}$. Hat diese mit E_μ keinen weiteren Punkt gemeinschaftlich, so wähle man in E_μ einen zweiten Punkt p', und lege durch $E_{\lambda+1}$ und p' eine $E_{\lambda+2}$. Dann hat $E_{\lambda+2}$ mit E_μ eine Gerade gemeinschaftlich. Wenn $\mu > 1$ ist und zugleich $E_{\lambda+2}$ mit E_μ nur die Punkte von g gemeinschaftlich hat, so wähle man in E_μ einen der Geraden g nicht angehörenden Punkt p'' und lege durch $E_{\lambda+2}$ und p'' eine $E_{\lambda+3}$. Fährt man so fort, so folgt, dafs man nach Auswahl von $\mu + 1$ Punkten der E_μ auf eine $E_{\lambda+\mu+1}$ kommt, in welche E_μ ganz hineinfällt. Wenn endlich einer der ausgeschlossenen Fälle eintritt, so verkleinert sich die Zahl ν.

d) »Wenn eine E_{n-1} und eine E_2 sich in einem Punkte treffen, so haben sie stets eine gerade Linie gemeinschaftlich.«

Man ziehe durch den Punkt zwei Gerade g und g', welche ganz der E_2 angehören. Jede von ihnen wird, wofern sie nicht in die E_{n-1} hineinfällt, in dem Punkte so geteilt, dafs die beiden Teile gegen die E_{n-1} auf verschiedenen Seiten liegen. Verbindet man einen Punkt von g mit einem auf der andern Seite gelegenen Punkte von g' durch eine gerade Strecke, so mufs diese mit der E_{n-1} einen Punkt gemeinschaftlich haben. Man erhält dadurch einen zweiten Punkt, der beiden Ebenen angehört, und somit eine beiden Ebenen gemeinschaftliche Gerade.

e) »Wenn eine E_{n-1} und eine E_λ sich in einem Punkte treffen, so haben sie, wofern E_λ nicht ganz in die E_{n-1} hineinfällt, eine $E_{\lambda-1}$ gemeinschaftlich.«

Man ziehe in der E_λ durch den Schnittpunkt λ gerade Linien, welche keiner Ebene von weniger als λ Dimensionen angehören, und lege durch eine festgewählte unter diesen Geraden und je eine der andern jedesmal eine zweidimensionale Ebene. Jede dieser $\lambda - 1$ Ebenen hat mit E_{n-1} eine Gerade gemeinschaftlich; die $\lambda - 1$ auf diese Weise erhaltenen geraden Linien können aber keiner Ebene von $\lambda - 2$ Dimensionen angehören, bestimmen also eine $E_{\lambda-1}$, welche den Ebenen E_λ und E_{n-1} angehört.

f) »Wenn eine E_λ und eine E_μ in einer $E_{\mu+1}$ liegen und einen Punkt gemeinschaftlich haben, so schneiden sie sich in einer $E_{\lambda-1}$.«

Beweis wie vorher.

g) »Wenn zwei Ebenen E_λ und E_μ einen Punkt gemeinschaftlich haben und $\lambda + \mu > n$ ist, so haben sie eine Ebene von mindestens $\lambda + \mu - n$ Dimensionen gemeinschaftlich.«

Man wähle in E_λ der Reihe nach $n - 1 - \mu$ Punkte so, dafs durch diese Punkte und die E_μ eine E_{n-1} gelegt werden kann. Diese hat mit E_λ eine $E_{\lambda-1}$ gemeinschaftlich. Jetzt bestimme man den Schnitt der $E_{\lambda-1}$ mit E_μ in der E_{n-1}. Zu dem Ende wähle ich in $E_{\lambda-1}$ $n - 2 - \mu$ Punkte so, dafs sich durch diese Punkte und E_μ eine E_{n-2} legen läfst; diese hat mit $E_{\lambda-1}$ eine $E_{\lambda-2}$ gemeinschaftlich. Somit mufs jetzt der Schnitt der $E_{\lambda-2}$ mit E_μ in der E_{n-2} bestimmt werden. Allgemein erhalte ich den Schnitt einer $E_{\lambda-\varrho}$ mit E_μ in einer $E_{n-\varrho}$. Wählt man hier für $\mu > \lambda$ die Zahl ϱ so, dafs $n - \varrho = \mu + 1$ ist, so erhält man eine Schnittebene von $\lambda - \varrho - 1 = \lambda + \mu - n$ Dimensionen.

h) »Wenn eine E_μ und eine E_ν in einer E_ϱ liegen und einen Punkt gemeinschaftlich haben, und wenn dann $\mu + \nu > \varrho$ ist, so haben sie mindestens eine $E_{\varrho-\mu-\nu}$ gemeinschaftlich.«

Beweis wie bei g.

i) »Wenn eine Gerade h in demselben Punkte auf ν Geraden senkrecht steht, durch welche sich keine $(\nu - 1)$-dimensionale Ebene legen läfst, so steht sie auf jeder Geraden senkrecht, welche in der durch die ν Geraden bestimmten E_ν durch den Fufspunkt gezogen sind; man sagt, die Gerade stehe auf der E_ν senkrecht.«

Für $\nu = 2$ ist der Beweis bekannt. Angenommen, der Satz sei für λ Gerade $g_1 \ldots g_\lambda$ und die hierdurch bestimmte E_λ bewiesen. Dann lege man durch E_λ und einen beliebigen Punkt von $g_{\lambda+1}$ die Ebene $E_{\lambda+1}$. Nun sei g' irgend eine in $E_{\lambda+1}$ gelegene und durch den Schnittpunkt von $g_1 \ldots g_\lambda$ gehende Gerade; durch g' und $g_{\lambda+1}$ lege man eine zweifach ausgedehnte Ebene, welche die E_λ in einer Geraden g'' treffen mufs. Da nun die gegebene Gerade h auf g und $g_{\lambda+1}$ senkrecht steht, so steht sie auch auf der mit ihnen in derselben E_2 gelegenen Geraden g senkrecht.

k) »Stehen $\varkappa$ Geraden $g_1 \ldots g_\varkappa$ in demselben Punkte A auf λ Geraden $h_1 \ldots h_\lambda$ senkrecht und bestimmen die $g_1 \ldots g_\varkappa$ eine einzige Ebene $E_\varkappa$ von $\varkappa$ Dimensionen und die $h_1 \ldots h_\lambda$ eine einzige E_λ, so steht jede durch A gelegte Gerade g der ersten Ebene auf jeder durch denselben Punkt gehenden Geraden h der zweiten Ebene senkrecht.«

Da nach der Voraussetzung jede Linie g_α für $\alpha = 1 \ldots \varkappa$ auf den λ Geraden $h_1 \ldots h_\lambda$ senkrecht steht, so steht g_α auch senkrecht auf jeder Geraden h, welche durch A in der durch die Linien $h_1 \ldots h_\lambda$ bestimmten Ebene E_λ gezogen werden kann. Umgekehrt steht hiernach h auf den Linien $g_1 \ldots g_\varkappa$ senkrecht, also auch auf jeder Geraden g, die in $E_\varkappa$ liegt und durch den Punkt A geht.

l) »Durch jeden Punkt einer Geraden geht eine einzige (n—1)-dimensionale Ebene, welche auf ihr senkrecht steht.«

Durch die Gerade g lege man $n-1$ Ebenen E_2 und errichte in jeder durch den gewählten Punkt die Senkrechte.

m) »Durch jeden Punkt einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene E_{n-1} geht eine und zwar eine einzige Gerade, welche auf ihr senkrecht steht.«

Man wähle in E_{n-1} durch den Punkt $n-1$ gerade Linien und errichte die dazu senkrechten $E_{n-1}^{(1)} \ldots E_{n-1}^{(n-1)}$, diese haben eine Gerade gemeinschaftlich. Gäbe es aber zwei solche Gerade, welche in A auf E_{n-1} senkrecht stehen, so müfsten die sämtlichen durch A gehenden Geraden einer E_2 auf E_{n-1} senkrecht stehen, was nicht möglich ist, da eine solche Gerade der E_2 in die E_{n-1} fällt.

n) »Alle Geraden, welche in einem gegebenen Punkte einer E_λ auf ihr senkrecht stehen, füllen eine $(n-\lambda)$-dimensionale Ebene an.«

Beweis wie bei m).

o) »Alle Geraden, welche in einem gegebenen Punkte einer E_λ auf ihr senkrecht stehen und zugleich in einer E_μ enthalten sind, der auch E_λ angehört, füllen eine Ebene von $\mu-\lambda$ Dimensionen an.«

Beweis wie bei m).

p) »Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie derselben E_2 angehören und sich nicht schneiden. Wenn von zwei Parallelen die eine in einer E_λ liegt, die andere einen Punkt mit E_λ gemeinschaftlich hat, so gehört auch die zweite ganz der E_λ an.«

»Wenn zwei Ebenen E_μ und E_ν für $\mu > \nu$ in einer $E_{\mu+1}$ liegen und keinen Punkt gemeinschaftlich haben, so heifsen sie selbst parallel, weil sie von jeder sie schneidenden E_2 in parallelen Geraden geschnitten werden.«

Man nehme auf E_μ zwei Punkte und auf E_ν einen Punkt ganz beliebig an und lege durch dieselben eine E_2; diese schneidet jede der gegebenen Ebenen in einer Geraden; die beiden Schnittgeraden können keinen Punkt gemeinschaftlich haben, da der Schnittpunkt beiden Ebenen angehören müfste.

q) »Steht von zwei Parallelen die eine auf einer E_{n-1} senkrecht, so thut es auch die andere; und umgekehrt sind zwei Gerade parallel, welche auf derselben E_{n-1} senkrecht stehen.«

Sind g und h parallel, so lege man eine E_2 hindurch; diese schneidet die E_{n-1} in einer Geraden (nach d), welche von h getroffen werden mufs. Steht $g \perp E_{n-1}$ und ist A der Fufspunkt von g in E_{n-1}, so möge der Schnitt von h mit E_{n-1} durch B bezeichnet werden. Durch B lege man in E_{n-1} $n-1$ Gerade $k_1 \ldots k_{n-1}$, welche keiner E_{n-2} angehören. Zieht man für $\alpha = 1 \ldots n-1$ die k_α' durch A parallel zu k_α, so liegen auch die $k_1' \ldots k_{n-1}'$ in E_{n-1}. Da aber $\sphericalangle\,(gk_\alpha') = (hk_\alpha)$ und der erstere ein Rechter ist, so steht h auf $k_1 \ldots k_{n-1}$, also auf E_{n-1} senkrecht.

Dafs umgekehrt zwei auf derselben E_{n-1} senkrecht stehende Gerade parallel sind, folgt aus m), kann aber auch direkt auf folgendem Wege bewiesen werden: Sind g und h zwei gemeinschaftliche Senkrechte von E_{n-1}, so kann man sicherlich durch g und h eine (oder auch mehrere) E_3 legen. Eine solche hat mit E_{n-1} eine E_2 gemeinschaftlich, auf welcher g und h senkrecht stehen. Dafs diese Linien parallel sind, wird in den Lehrbüchern der Stereometrie bewiesen.

r) Zwei parallele μ-dimensionale Ebenen haben überall denselben Abstand.

Sind E_μ und E_μ' parallel und fällt man von zwei Punkten der ersten die Senkrechten auf die zweite, so sind dieselben parallel (da der Satz q) auch für jede in einer $E_{\mu+1}$ liegende E_μ gilt). Somit sind dieselben Gegenseiten in einem Parallelogramm und deshalb gleich.

s) »Steht PA auf einer E_{n-1} und PB auf einer in E_{n-1} gelegenen E_{n-2} senkrecht, so steht auch AB auf der E_{n-2} senkrecht.«

Zieht man durch B die Gerade BC $\parallel$ PA, so liegt BC in der Ebene PAB; zudem steht BC auf E_{n-1} senkrecht, also sicherlich auch auf der in E_{n-1} gelegenen E_{n-2}. Auf der letzteren Ebene stehen also die Geraden BC und BP senkrecht, also auch jede durch B gehende Gerade der Ebene PBC, somit auch die Gerade AB.

t) »Wenn zwei Ebenen E_{n-1} und E_{n-1}' sich schneiden und wenn man in einem Punkte A der Schnittebene E_{n-2} zwei Senkrechte g und h auf ihr errichtet, von denen die eine in E_{n-1}, die andere in E_{n-1}' liegt, so ändert der von g und g' eingeschlossene Winkel seine Gröfse nicht, wenn man an Stelle des Punktes A irgend einen andern Punkt der Schnittebene wählt.«

Für einen zweiten Punkt B der Schnittebene sei h in E_{n-1} und h' in E_{n-1}' senkrecht auf E_{n-2} errichtet; es soll bewiesen werden, dafs $\sphericalangle (hh') = \sphericalangle (gg')$ ist. Da g und h in einer zweidimensionalen Ebene liegen und ebenso g' und h' und da diese die Gerade AB gemeinschaftlich haben, so liegen die Geraden g, g', h, h' in einer E_3. Somit gilt der Satz, da er für den dreidimensionalen Raum bewiesen ist.

§ 12.

Die ersten Sätze des vierdimensionalen Raumes.

Um die Entwicklungen des vorigen Paragraphen, welche für den ersten Anfänger wegen ihrer Abstraktheit vielleicht einige Schwierigkeiten bieten, dem Verständnis näher zu bringen, wollen wir die darin enthaltenen Sätze für den vierdimensionalen Raum nochmals auf einem andern Wege herleiten und daran verwandte Untersuchungen anknüpfen.

Wir gehen wieder von denselben Voraussetzungen aus, die wir im vorigen Paragraphen der Untersuchung zu Grunde gelegt haben; nur nehmen wir die Zahl der Dimensionen gleich vier an. Dann haben die Ebenen entweder zwei oder drei Dimensionen.

Da die ersteren euklidische Ebenen sind, jede der letzteren aber die Eigenschaften des dreidimensionalen euklidischen Raumes besitzt, so ist es nicht nötig, eine Ebene für sich zu untersuchen oder Gebilde zu betrachten, die in einer Ebene enthalten sind.

a) »Eine Gerade schneidet entweder eine E_3 oder sie hat mit ihr keinen Punkt gemeinschaftlich. Im zweiten Falle heifst sie zu ihr parallel, und dann ist sie zu jeder Geraden der E_3 parallel, welche mit ihr in einer zweidimensionalen Ebene liegt; auch wird eine Gerade jedesmal einer E_3 parallel sein, wenn sie zu einer in ihr gelegenen Geraden parallel ist.«

»Wofern eine Gerade eine E_3 schneidet, steht sie entweder auf allen in E_3 gelegenen und durch den Schnittpunkt gehenden Geraden senkrecht (und dann sagt man, sie stehe auf der E_3 senkrecht), oder sie steht nur auf allen derartigen Geraden einer in E_3 gelegenen zweidimensionalen Ebene E_2 senkrecht, während sie mit einer einzigen in E_3 gelegenen Geraden den kleinsten spitzen Winkel bildet; diese Gerade steht auf der bezeichneten E_2 senkrecht und enthält den Fufspunkt einer jeden Senkrechten, welche man von Punkten der Geraden auf die E_3 fällen kann.«

»Alle Geraden, welche in einem gegebenen Punkte einer Geraden auf ihr senkrecht stehen, gehören einer E_3 an, und in jedem Punkte einer E_3 steht auf ihr nur eine einzige Gerade senkrecht.«

»Wenn von zwei parallelen Geraden die eine zu einer E_3 parallel ist, so mufs es auch die andere sein; ebenso sind die Winkel gleich, die zwei parallele Gerade mit derselben E_3 bilden.«

»Zwei Gerade, die auf derselben E_3 senkrecht stehen, sind parallel.«

Wenn die Gerade g die E_3 nicht trifft, so kann sie auch keine in E_3 gelegene Gerade schneiden; wenn also eine Gerade der E_3 mit g in einer E_2 liegt, so mufs sie zu g parallel sein. Ist umgekehrt $g \parallel h$ und liegt h in E_3, so kann g die E_3 nicht treffen; legt man nämlich durch g und h eine E_2, so kann ein Schnitt von g mit E_3 nur auf dieser E_2 liegen; E_2 kann aber mit E_3 nur die Gerade h gemeinschaftlich haben, (weil sie sonst ganz in E_3 fiele), und ein Schnitt von g mit h ist ausgeschlossen.

Um die anderen Teile des Satzes beweisen zu können, mufs man zunächst zeigen, dafs, wenn g auf drei durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden l, m, n von E_3 senkrecht steht und diese nicht in einer E_2 liegen, sie mit allen durch den Schnittpunkt gehenden Geraden der E_3 rechte Winkel bildet. Wenn g auf l und m senkrecht steht, so mufs sie auf der durch l und m hindurchgehenden E_2 senkrecht stehen; nun lege man durch irgend eine Gerade von E_2 und die n wieder eine E_2', so steht g auch auf dieser senkrecht; somit steht g auf jeder in E_3 gelegenen und durch den Schnittpunkt gehenden Geraden senkrecht.

Wenn umgekehrt g und ein Punkt P auf g gegeben ist, so kann man durch g beliebig viele Ebenen E_2 legen und in jeder eine Gerade konstruieren, die in P auf g senkrecht steht; alle diese Geraden gehören einer E_3 an; denn sonst müfsten alle durch P gehenden Geraden auf g senkrecht stehen, was unmöglich ist.

Wenn die Geraden AP und AQ beide in A auf E_3 senkrecht ständen, so könnte man in der zweidimensionalen Ebene APQ in A auf AP eine Senkrechte errichten. Dann müfste diese auch der E_3 angehören, also auch auf AQ senkrecht stehen, was nicht möglich ist.

Wenn von drei Geraden zwei der dritten parallel sind, so liegen sie in einer dreidimensionalen Ebene; daher müssen jetzt die Geraden einander parallel sein. Daraus folgt unmittelbar, dafs, wenn von zwei Parallelen die eine einer E_3 parallel ist, auch die andere zu E_3 parallel sein mufs. Somit werden zwei Parallelen entweder beide eine E_3 schneiden oder beide zu ihr parallel sein.

Wenn von zwei Parallelen die eine auf E_3 senkrecht steht, so kann zunächst die andere nicht zu E_3 parallel sein; also wird E_3 von beiden Geraden geschnitten. Durch die Schnittpunkte ziehe man in E_3 drei Paare paralleler Geraden; dann lassen sich, weil Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln gleich sind, drei Gerade in E_3 bestimmen, die keiner E_2 angehören und auf denen die zweite Gerade senkrecht steht; die zweite Parallele steht also auf E_3 senkrecht.

Dafs umgekehrt zwei gerade Linien, die auf einer E_3 senkrecht stehen, parallel sind, läfst sich leicht indirekt beweisen.

Wenn die Gerade AP die E_3 in A trifft, ohne auf ihr senkrecht zu stehen, so fälle man von einem beliebigen Punkte Q von AP auf E_3 die Senkrechte QB. Dann liegt in der zweidimensionalen Ebene ABP jede Senkrechte, welche von einem Punkte der Geraden auf E_3 gefällt wird. Zieht man nämlich durch irgend einen Punkt der Geraden die Parallele zu QB, so liegt sie in dieser E_2 und steht auf E_3 senkrecht. Die Fufspunkte liegen also sämtlich in der Geraden AC. Legen wir nun in E_3 zu AC durch A die senkrechte E_2, und ziehen durch A zu QC die Parallele, so mufs letztere auch auf E_3 und somit auch auf E_2 senkrecht stehen; da sie aber in der Ebene APC liegt, so enthält diese zwei durch A gehende, auf E_2 senkrechte Gerade; somit mufs auch jede durch A gehende Gerade dieser Ebene, speziell AP auf E_2 senkrecht stehen.

Dafs endlich $\sphericalangle$ QAC $<$ QAD ist, wo D beliebig in E_3 liegt, zeigt man auf die bekannte Weise, indem man AD $=$ AC macht und nun berücksichtigt, dafs QA $=$ QA, AC $=$ AD, aber QD $>$ QC ist, somit auch $\sphericalangle$ QAD $>$ QAC ist.

b) »Wenn in einem vierdimensionalen Raume eine E_2 und eine E_3 liegen, so sind zwei Fälle möglich: entweder haben sie keinen Punkt gemeinschaftlich oder sie schneiden sich in einer geraden Linie. Im ersten Falle werden sie durch jede zweidimensionale Ebene, welche beide schneidet, in zwei parallelen Geraden geschnitten, und sie heifsen deshalb selbst parallel; dann ist jede in E_2 gelegene Gerade zu E_3 parallel; alle Punkte der einen Ebene haben von der andern gleichen Abstand.«

»Wenn die Ebenen sich schneiden, so wähle man in der Schnittlinie g einen Punkt A, und errichte in ihm eine Senkrechte h auf g, welche in E_2 liegt, und eine senkrechte zweidimensionale Ebene F_2, welche in E_3 liegt; dann ist der Neigungswinkel von h zu F_2 konstant, welchen Punkt man auch auf g gewählt hat. Wenn speziell h auf F_2 senkrecht steht, so liegt jede von einem Punkte der E_2 auf E_3 gefällte Senkrechte ganz in E_2.«

Wir beweisen zunächst, dafs die beiden Ebenen E_2 und E_3 eine gerade Linie gemeinschaftlich haben, sobald sie in einem Punkte zusammentreffen. Zu dem Ende ziehen wir in E_2 durch A zwei Gerade AP und AQ; die Halbgeraden AP und AQ mögen auf derselben Seite von E_3 liegen (also in einem der beiden Raumteile liegen, in welche der Raum durch E_3 zerlegt wird); dann müssen die Verlängerungen AP′ und AQ′ beide auf der andern Seite von E_3 liegen. Zieht man die Gerade PQ′, so macht man auf derselben einen Übergang von der einen zur andern Seite, trifft also die E_3. Die Gerade PQ' liegt aber ganz in E_2; folglich haben E_2 und E_3 noch einen Punkt und damit eine Gerade gemeinschaftlich.

Wenn $E_2 \parallel E_3$ ist, so kann keine in E_2 gelegene Gerade die E_3 schneiden; jede Gerade, die in E_2 liegt, ist also zu E_3 parallel. Sind A und B zwei Punkte von E_2, C und D die Fufspunkte der von ihnen auf E_3 gefällten Senkrechten, so sind die Geraden AC und BD nach a) parallel; ebenso sind die Geraden AB und CD parallel, da sie erstens wegen des Parallelismus von E_2 und E_3 keinen Punkt gemeinschaftlich haben, zweitens in der zweidimensionalen Ebene ABCD liegen; folglich ist $AC = BD$.

Wenn aber E_2 und E_3 die Schnittlinie g haben, so möge A ein Punkt von g sein; h stehe in A auf g senkrecht und liege in E_2; F_2 stehe in A auf g senkrecht und liege in E_3. Ein zweiter Punkt von g sei A'; indem man die entsprechende Konstruktion macht, erhält man die Gerade h' und die Ebene F_2'. Dann ist h' zu h und F_2' zu F_2 parallel. Auf h und h' schneide man die gleichen Strecken AB und $A'B'$ ab; dann ist BB' zu g und somit zu E_3 parallel. Fällt man von B und B' die Senkrechten BC und $B'C'$ auf E_3, so sind dieselben gleich grofs. Da aber BA auf g und F_2 auf g in demselben Punkte senkrecht stehen, so fällt C in F_2 und ebenso C' in F_2' hinein. Somit giebt $\sphericalangle\, CAB = C'A'B'$ die Neigung von h zu F_2, resp. von h' zu F_2' an. Diese Betrachtung ändert sich nicht, wenn C mit A und zugleich (wegen des Parallelismus) C' mit A' zusammenfällt.

Die gegenseitige Lage einer E_2 und einer E_3 in einem vierdimensionalen Raume wird im allgemeinen durch einen Winkel und im Falle des Parallelismus durch eine gerade Strecke bestimmt.

c) »Zwei dreidimensionale Ebenen haben entweder keinen Punkt oder eine zweidimensionale Ebene gemeinschaftlich. Im ersten Falle heifsen die Ebenen parallel; sie werden dann von jeder zweidimensionalen Ebene, welche nicht zu beiden parallel ist, in parallelen Geraden geschnitten; jede E_2 und jede Gerade, welche in der einen der gegebenen Ebenen liegt, ist zu der andern parallel; die Ebenen haben überall gleichen Abstand und jede Gerade, welche auf der einen von ihnen senkrecht steht, schneidet auch die andere unter einem rechten Winkel.«

»Im zweiten Falle errichte man in demselben Punkte des Schnittgebildes auf ihm in jeder der beiden Ebenen die Senkrechte; dann ist die Gröfse des von den Senkrechten eingeschlossenen Winkels unabhängig von dem gewählten Punkte. Ist dieser Winkel ein Rechter, so fällt jede von einem Punkte der einen Ebene auf die andere gefällte Senkrechte ganz in die erste hinein.«

Wenn die Ebenen E_3 und E_3' einen Punkt A gemeinschaftlich haben, so nehme man in E_3 eine durch A gehende E_2; diese schneide die E_3' in einer Geraden g. Nun kann man aber durch A in E_3 eine zweite E_2' legen, in welcher die Gerade g nicht enthalten ist; folglich ist die Schnittgerade g' der Ebenen E_2' und E_3' von g verschieden. Wenn aber die Ebenen E_3 und E_3' die beiden Geraden g und g' gemeinschaftlich haben, so müssen sie sich in einer zweidimensionalen Ebene schneiden.

Haben E_3 und E_3' keinen Punkt gemeinschaftlich, so mufs jede E_2, welche die eine nicht schneidet, auch zu der andern parallel sein. Umgekehrt mufs jede E_2, welche die eine schneidet, auch mit der andern eine Gerade gemeinschaftlich haben; zugleich müssen die beiden Schnittlinien parallel sein, da sie in einer E_2 liegen und sich nicht schneiden. Dafs jetzt die Ebenen E_3 und E_3' überall gleichen Abstand haben, wird genau so bewiesen, wie der entsprechende Satz in b). Steht endlich g auf E_3 senkrecht, so schneidet g auch die parallele E_3'; dafs g aber auch auf E_3' senkrecht steht, beweist man wieder dadurch, dafs man durch die Fufspunkte in den Ebenen Paare von parallelen Geraden zieht.

Jetzt mögen sich E_3 und E_3' in E_2 schneiden; in E_2 wähle man den Punkt A und errichte AB in E_3 senkrecht auf E_2 und AC in E_3' senkrecht auf E_2. Liegt A' gleichfalls in E_2 und gehört A'B' der E_3, A'C' der E_3' an und stehen beide auf E_2 senkrecht, so soll bewiesen werden, dafs $\sphericalangle$ B'A'C' = BAC ist. Wählt man AB = A'B', AC = A'C', so ist, da AB ∥ A'B' ist, auch BB' ∥ AA', und ebenso CC' ∥ AA', folglich auch CC' ∥ BB'; und da ebenfalls BB' = AA' und CC' = AA' ist, so ist auch BB' = CC', folglich BC = B'C' und $\sphericalangle$ BAC = B'A'C'. Man kann auch AB = A'B' machen und von B und B' die Senkrechten auf E_3' fällen; dann liegen ihre Fufspunkte in AC resp. A'C'. Da zudem BB' parallel zu E_2 und somit auch zu E_3' ist, so sind die Senkrechten gleich und somit auch die Winkel BAC und B'A'C'.

d) »Eine dreidimensionale Kugel K_3, der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem Punkte gleichen Abstand haben, wird von einer E_3 in einer K_2 geschnitten, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius; sie wird von der E_3 berührt, wenn der Abstand gleich dem Radius ist; dagegen liegt die Ebene ganz aufserhalb des Kugelgebildes, wenn der Abstand gröfser ist als der Radius. Im ersten Falle fällt der Mittelpunkt der Schnittkugel, im zweiten der Berührungspunkt mit dem Fufspunkt der Senkrechten zusammen.«

»Ein solches Kugelgebilde hat, für sich betrachtet, die Eigenschaften eines dreidimensionalen Riemannschen Raumes. Zu jedem Punkt existiert ein Gegenpunkt, der zweite Endpunkt des von dem ersten ausgehenden Durchmessers. Vier Punkte des Gebildes, welche nicht mit dem Mittelpunkt in derselben E_3 liegen, bestimmen ein sphärisches Tetraeder. Legt man nämlich durch je drei von ihnen und den Mittelpunkt eine E_3, so begrenzen diese 16 Teile gegen einander ab; nur einem dieser Teile gehören die vier gegebenen Punkte als Eckpunkte an. Ein zweites Tetraeder wird durch die Gegenpunkte bestimmt; die beiden sphärischen Gegen-Tetraeder sind kongruent.«

Der Beweis für alle diese Behauptungen ist so einfach, dafs er nicht durchgeführt zu werden braucht.

e) »Wenn sich drei dreidimensionale Ebenen zu je zweien schneiden, so sind die Schnittgebilde entweder parallel oder sie haben eine Gerade gemeinschaftlich. Im zweiten Falle entstehen acht verschiedene Gebilde, welche aus Stücken dreidimensionaler Ebenen zusammengesetzt sind und von denen jedes einen (unendlichen) Teil des Raumes gegen den übrigen Raum abgrenzt. Jedes solche Gebilde möge als gewöhnlicher vierdimensionaler Winkel mit Doppelkante bezeichnet werden; dasselbe besteht aus drei Teilen von dreidimensionalen Ebenen, von denen jeder Teil durch zwei zweidimensionale Halbebenen begrenzt ist. Die Beziehung zwischen den hierdurch bestimmten Flächenwinkeln und den Neigungen je zweier Ebenen wird durch Formeln angegeben, welche mit denen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie identisch sind.«

Gegeben seien die dreidimensionalen Ebenen A_3, B_3, C_3; je zwei mögen einander schneiden und zwar B_3 und C_3 in a_2,

C_3 und A_3 in b_2, A_3 und B_3 in c_2. Dann liegen a_2 und b_2 in C_3; sie haben deshalb entweder eine Gerade g gemeinschaftlich oder sind parallel. Im ersten Falle gehört g auch A_3 und B_3, also auch ihrem Schnittgebilde c_2 an. Im zweiten Falle können auch a_2 und c_2 keinen Punkt gemeinschaftlich haben; sobald sie das hätten, müfsten sie sich in einer Geraden schneiden, und diese müfste, wie schon bewiesen, auch b_2 angehören, was ausgeschlossen ist; demnach sind a_2 und c_2, und ebenso b_2 und c_2 einander parallel.

Im ersten Falle, wo a_2, b_2, c_2 eine Gerade g gemeinschaftlich haben, wird jede dieser zweidimensionalen Ebenen durch g in zwei Halbebenen a_2' und a_2'', b_2' und b_2'', c_2' und c_2'' zerlegt. Nehmen wir etwa a_2', b_2', c_2' heraus und betrachten denjenigen Teil $\overline{A}_3$ von A_3, welcher durch b_2' und c_2' begrenzt wird, und begrenzen in entsprechender Weise Teile $\overline{B}_3$ und $\overline{C}_3$ von B_3 und C_3, so bilden $\overline{A}_3$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_3$ eine dreifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit, durch welche ein gewisser, sich ins Unendliche erstreckender Teil des Raumes gegen den übrigen Raum abgegrenzt wird. Solcher Gebilde giebt es offenbar acht. Messen wir die Gröfse von $\overline{A}_3$ in Winkelmafs und setzen sie gleich a, und führen wir entsprechend die Gröfsen b und c ein, bezeichnen wir ferner die Neigung von $\overline{B}_3$ und $\overline{C}_3$ zu einander durch α u. s. w., so folgen die Gleichungen:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{cin} c}{\sin \gamma},$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

die man etwa dadurch beweisen kann, dafs man die Figur durch eine auf g senkrecht stehende dreidimensionale Ebene schneidet. Auch ist

$$\sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta = \sin a \sin b \sin \gamma$$

und jedes dieser Produkte kann als der Sinus des aus den drei Ebenen gebildeten Winkels bezeichnet werden.

f) «Wenn vier dreidimensionale Ebenen je zu dreien sich in einer Geraden treffen, so sind diese vier geraden Linien entweder zu je zweien parallel oder sie gehen durch denselben Punkt. Im zweiten Falle möge die Figur ein vierdimensionaler Winkel mit Spitze genannt werden. Bezeichnet man alsdann die vier Kanten mit 1, 2, 3, 4 und wählt man irgend eine Permutation ι, $\varkappa$, λ, μ dieser vier Zahlen, so möge der Winkel zweier Kanten mit $(\iota, \varkappa)$, der Winkel, den zwei in einer Kante zusammenstofsende zweidimensionale Ebenen mit einander bilden, durch $(\iota\varkappa, \iota\lambda)$ und endlich der Winkel, welchen zwei unter den gegebenen dreidimensionalen Ebenen einschliefsen, mit $(\iota\varkappa\lambda, \iota\varkappa\mu)$ bezeichnet werden. Dann ist das Produkt:

$$\sin(\iota, \varkappa) \sin(\iota, \lambda) \sin(\iota, \mu) \sin(\iota\varkappa, \iota\lambda) \sin(\iota\varkappa, \iota\mu) \sin(\iota\varkappa\lambda, \iota\varkappa\mu)$$

von der gewählten Permutation unabhängig und möge als der Sinus des vierdimensionalen Winkels bezeichnet werden.«

Wenn zwei Kanten einander treffen, so gehört der Schnittpunkt allen vier Ebenen, also auch der Schnittlinie von je drei Ebenen, d. h. den vier Kanten an. Hieraus folgt, dafs entweder alle vier Kanten durch denselben Punkt gehen oder keine zwei einander treffen. Da zudem im letzteren Falle je zwei Kanten in derselben zweidimensionalen Ebene liegen, so sind sie parallel.

Um jetzt die Unabhängigkeit der obigen Formel von den vier gewählten Marken nachzuweisen, beachten wir, dafs nach dem Schlufsergebnis von e) das Produkt

$$\sin(\iota\varkappa, \iota\lambda) \sin(\iota\varkappa, \iota\mu) \sin(\iota\varkappa\lambda, \iota\varkappa\mu)$$

sich nicht ändert, wenn man für $\varkappa$, λ, μ irgend eine andere Permutation der drei von ι verschiedenen Zahlen setzt. Demnach genügt es nachzuweisen, dafs

$$\sin(\iota, \varkappa) \sin(\iota, \lambda) \sin(\iota, \mu) \sin(\iota\varkappa, \iota\lambda) \sin(\iota\varkappa, \iota\mu) \sin(\iota\varkappa\lambda, \iota\varkappa\mu)$$
$$= \sin(\varkappa, \iota) \sin(\varkappa, \lambda) \sin(\varkappa, \mu) \sin(\varkappa\iota, \varkappa\lambda) \sin(\varkappa\iota, \varkappa\mu) \sin(\varkappa\iota\lambda, \varkappa\iota\mu)$$

ist. Da aber die Kanten ι, $\varkappa$, λ in derselben dreidimensionalen Ebene liegen, so ist:

$$\sin(\iota, \lambda) \sin(\iota\varkappa, \iota\lambda) = \sin(\varkappa, \lambda) \sin(\varkappa\iota, \varkappa\lambda).$$

Aus demselben Grunde ist:

$$\sin(\iota, \mu) \sin(\iota\varkappa, \iota\mu) = \sin(\varkappa, \mu) \sin(\varkappa\iota, \varkappa\mu).$$

Hierdurch ist die Richtigkeit der vorgelegten Formel erwiesen.

g) »Zwei zweidimensionale Ebenen, welche nicht derselben E_3 angehören, haben höchstens einen Punkt A gemeinschaftlich. Dann können einmal die sämtlichen durch A gelegten Geraden der einen Ebene auf denen der andern senkrecht stehen; dieser Fall tritt ein, wenn zwei solche Gerade der einen auf zwei durch A gehenden Geraden der andern senkrecht stehen; in diesem Falle mögen die Ebenen als zu einander normal bezeichnet werden.«

»Zweitens kann, wofern die Ebenen einen Punkt gemeinschaftlich haben, die zweite Ebene eine einzige Gerade enthalten, welche auf der ersten senkrecht steht; dann enthält auch die zweite Ebene eine einzige Gerade, welche auf der ersten senkrecht steht; errichtet man nun zu jeder dieser Geraden in der eigenen Ebene die Senkrechte, so bildet jede von ihnen die Projektion der andern auf die eigene Ebene, und der von ihnen eingeschlossene spitze Winkel ist der kleinste Winkel, welcher von zwei durch A je in einer Ebene gelegten Geraden gebildet wird.«

»Im allgemeinen gehen in der einen Ebene durch A zwei Gerade g und g′ und in der andern zwei Gerade h und h′ von folgenden Eigenschaften: g und h bilden mit einander den kleinsten, g′ und h′ den gröfsten spitzen Winkel, welcher von Geraden der beiden Ebenen eingeschlossen werden kann; dann steht g auf g′ und h′, h auf g′ und h′ senkrecht.»

»Endlich ist noch die Möglichkeit vorhanden, dafs der Winkel, welchen irgend eine durch den gemeinschaftlichen Punkt in der einen Ebene gezogene Gerade mit ihrer Projektion auf die andere Ebene bildet, konstant ist. Dann wird jede durch den gemeinschaftlichen Punkt gelegte zweidimensionale Ebene, welche beide Ebenen schneidet, auch gegen beide gleich geneigt sein.«

»Wenn aber zwei E_2, ohne in einer E_3 zu liegen, keinen Punkt gemeinschaftlich haben, so geht durch jeden Punkt der einen eine (und zwar eine einzige) Gerade, welche zu der andern Ebene parallel sind. Längs einer jeden Parallelen ist der senkrechte Abstand von der andern Ebene konstant; dagegen ändert er sich von einer Parallelen zur andern. Es giebt eine Parallele, welche die kleinste Entfernung hat, und von ihr aus wächst der Abstand über alle Grenzen. Konstruiert man in jeder Ebene diejenige zur andern Ebene parallele Gerade, welche ihr am nächsten liegt, so sind auch diese beiden Geraden parallel, und die hindurchgelegte zweidimensionale Ebene trifft jede der beiden gegebenen senkrecht.«

Die gegebenen Ebenen seien E_2 und E_2'; man lege durch E_2 und einen Punkt von E_2' eine E_3; diese trifft E_2' in einer Geraden g; eine zweite durch E_2 und einen Punkt von E_2' gelegte E_3 möge in g′ treffen. Dann sind g und g′ entweder parallel oder sie schneiden einander. Im ersten Falle können E_2 und E_2'

keinen Punkt gemeinschaftlich haben; also mufs auch jede weitere, durch E_2 und einen Punkt von E_2' gelegte E_3 in einer Geraden schneiden, welche zu g und g' parallel ist. Jede dieser Linien ist auch zu E_2 parallel und demnach haben alle auf g liegenden Punkte von E_2 denselben Abstand. Macht man die Konstruktion unter Vertauschung der Ebenen, so findet man auf E_2 eine Schar paralleler Linien h, h' ..., von denen jede zu E_2' parallel ist. Ferner ist g zu h parallel; denn da g $\|$ E_2 ist, so kann man durch g und einen Punkt von h eine $\overline{E}_2$ legen, welche E_2 in einer Geraden k trifft. Dann müfste k zu E_2' parallel sein; es gingen also durch jeden Punkt von E_2 zwei Parallele zu E_2' oder E_2 und E_2' lägen in einer E_3, was ausgeschlossen ist.

Jetzt konstruiere man eine $\overline{E}_3$, welche auf g (und damit auf allen Parallelen g', ... h, h' ...) senkrecht steht. Diese schneidet E_2 und E_2' je in einer Geraden k und k'. Diese beiden Geraden haben, wie bekannt, einen kürzesten Abstand in einer Geraden l, welche auf beiden senkrecht steht. Durch den Fufspunkt von l in E_2 möge die zu E_2' parallele Gerade g_1 und in E_2' die zu E_2 parallele h_1 gehen. Die zweidimensionale Ebene durch l und g_1 geht auch durch h_1 und trifft beide Ebenen senkrecht.

Wenn aber bei der oben angegebenen Konstruktion die Geraden g und g' sich in einem Punkte A schneiden, so ist dieser Punkt auch den Ebenen E_2 und E_2' gemeinschaftlich. Um die Beziehungen dieser Ebenen weiter zu untersuchen, beschreibe man um A als Mittelpunkt eine dreidimensionale Kugel. Diese schneidet die beiden Ebenen in zwei Hauptkreisen k und k'. Hierfür gelten aber die Beziehungen, welche in I § 19 entwickelt sind. Entweder sind die Geraden absolute Polaren von einander; dann werden E_2 und E_2' auf einander senkrecht stehen. Oder der senkrechte Abstand der einen Geraden von der andern hat ein Maximum und ein Minimum. Ist das Maximum $\frac{1}{2}\pi$, so enthält die eine Ebene eine Gerade, welche auf der andern senkrecht steht. Ebenso ergeben sich die weiteren Behauptungen unmittelbar aus den Sätzen über zwei Gerade des Riemannschen Raumes.

Im allgemeinen ist also die gegenseitige Lage zweier zweidimensionalen Ebenen durch zwei Winkel α und β bestimmt. Um eine Ebene E_2' zu konstruieren, welche zu einer gegebenen E_2 die durch α und β bestimmte Lage hat, nehme man in E_2

einen Punkt A, sowie die Geraden AQ und AR an, welche von A ausgehen und senkrecht auf einander stehen. Man konstruiere diejenige E_3, auf welcher AQ in A senkrecht steht, und ebenso E_3' senkrecht zu AR. In der zweiten nehme man AS, so dafs $\sphericalangle$ SAQ $= \alpha$ ist; dann bestimme man AT, so dafs es auf AQ und AS senkrecht steht und $\sphericalangle$ RAT $= \beta$ ist, so bestimmen AS und AT die verlangte Ebene.

Ist eine Ebene E_2 und in ihr ein Punkt A gegeben, so lege man durch E_2 und einen beliebigen Punkt eine E_3 und in ihr die zu E_2 senkrechte Gerade l; nun lege man durch E_2 eine andere E_3 und in ihr die zu E_2 senkrechte Gerade l'; dann bestimmen l und l' eine E_2', deren sämtliche durch A gelegte Gerade auf den durch A gehenden Geraden von E_2 senkrecht stehen; und umgekehrt wird jede in A auf E_2 senkrecht stehende Gerade der E_2' angehören.

h) »Wenn eine Gerade g und eine E_2 keiner dreidimensionalen Ebene angehören, so kann auf E_2 keine Gerade liegen, welche die g schneidet oder zu ihr parallel ist. Dagegen kann man durch E_2 eine einzige E_3 legen, zu welcher g parallel ist; auch giebt es eine einzige gemeinschaftliche Senkrechte zu den beiden Gebilden; auf ihr liegt die kleinste Entfernung der Geraden von der E_2.«

Man wähle einen beliebigen Punkt in E_2 und lege durch ihn die Parallele zu g. Diese kann nicht in E_2 hineinfallen, weil sonst g und E_2 in einer dreidimensionalen Ebene lägen. Sie bestimmt also mit E_2 eine E_3, zu der g parallel ist. Legt man jetzt durch irgend einen andern Punkt von E_2 die Parallele zu g, so gehört diese auch der E_2 an. Man kann durch E_2 eine zweite E_3 legen, welche mit E_3 einen rechten Winkel bildet. Die neue Ebene mufs von g geschnitten werden und auf ihr senkrecht stehen.

i) »Ist im Raume eine E_3 und in ihr ein beliebiges Polyeder π gegeben und nimmt man einen Punkt P hinzu, welcher nicht in E_3 liegt, so kann man von P nach jedem Punkte Q von π eine gerade Strecke ziehen, welche wir von P und Q begrenzt sein lassen. Die Gesamtheit dieser Strecken bestimmt ein allseitig begrenztes endliches Gebiet der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit und soll als eine vierdimensionale Pyramide bezeichnet werden.«

»Ist wieder in einer E_3 ein Polyeder π gegeben und lassen wir von einem Punkte Q desselben eine Strecke QR ausgehen, welche nicht in E_3 liegt, so bestimmt die Gesamtheit aller, von den Punkten Q des Polyeders ausgehenden mit QR gleichen und gleichgerichteten Strecken ein allseitig begrenztes Gebiet, das vierdimensionale Prisma.«

»Prismen von gleichem Grundgebilde und von gleicher Höhe sind gleich.«

»Pyramiden von gleichem Grundgebilde und von gleicher Höhe sind gleich.«

»Jede Pyramide ist der vierte Teil eines Prismas, welches mit ihr gleiches Grundgebilde und gleiche Höhe hat.«

»Der 24-fache Rauminhalt einer vierseitigen Pyramide ist gleich dem Produkt von vier zusammenstofsenden Kanten in den Sinus des durch diese Kanten bestimmten vierdimensionalen Winkels (mit Spitze).«

Die Richtigkeit der ersten Behauptungen leuchtet sofort ein. Auf solche vierdimensionale Körper kann aber der Begriff der Kongruenz, der Gleichheit und endlich auch der der Ähnlichkeit übertragen werden. (Von dem letzteren Begriff können wir aber absehen.) Dafs vierdimensionale Prismen von gleichem Grundgebilde und gleicher Höhe gleichen Rauminhalt besitzen, folgt dadurch, dafs man die Grundgebilde entweder in kongruente Stücke zerlegt oder unbegrenzt zwischen Paaren kongruenter Stücke einschliefst; dann überträgt sich der bekannte Beweis der Stereometrie unmittelbar (vergl. Baltzers Elemente II, fünftes Buch § 8, 1—3). Daran schliefsen wir den Nachweis für den Satz: Wird eine Pyramide durch eine zum Grundgebilde parallele E_3 durchschnitten, so verhält sich das Schnittgebilde zum Grundgebilde, wie die dritten Potenzen ihrer senkrechten Abstände vom Scheitel; beim Beweise hat man nur den Satz zu benutzen, dafs ähnliche dreidimensionale Körper sich wie die Kuben homologer Strecken verhalten.

Um jetzt zu zeigen, dafs Pyramiden von gleichem Grundgebilde und gleicher Höhe gleich sind, teile man jede der gleichen Höhen in n gleiche Teile und lege durch jeden Teilpunkt die zum Grundgebilde parallele E_3; dadurch wird der Rauminhalt zwischen den Summen verschiedener Prismen eingeschlossen und daraus in bekannter Weise die Gleichheit gefolgert.

Nun seien $A_1 A_2 A_3 A_4$ die Eckpunkte eines in einer E_3 gelegenen Tetraeders; ferner sei $A_1 B_1 = A_2 B_2 = \ldots$; $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel \ldots$; dann bestimmen $\begin{pmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{pmatrix}$ ein vierdimensionales Prisma. Durch B_1 und $A_2 A_3 A_4$ legen wir eine dreidimensionale Ebene; diese zerteilt das Prisma in die vierseitige Pyramide $\begin{pmatrix} B_1 & \\ A_1 A_2 A_3 A_4 \end{pmatrix}$ und einen zweiten Körper, dessen Eckpunkte $B_1, B_2, B_3, B_4, A_2, A_3, A_4$ sind. Es ist dies eine Pyramide mit der Spitze B_1 und dem Grundgebilde $\begin{pmatrix} A_2 A_3 A_4 \\ B_2 B_3 B_4 \end{pmatrix}$. Das letztere kann aber bekanntich in vier inhaltsgleiche Tetraeder zerlegt werden: $(B_2 A_2 A_3 A_4)$, $(B_2 B_3 A_3 A_4)$ und $(B_2 B_3 B_4 A_4)$. Demnach zerfällt das vierdimensionale Prisma in die Pyramiden:

$$\begin{pmatrix} B_1 & \\ A_1 A_2 A_3 A_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & \\ B_2 A_2 A_3 A_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & \\ B_2 B_3 A_3 A_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & \\ B_2 B_3 B_4 A_4 \end{pmatrix}.$$

Die drei letzten haben gleiche Höhe und gleiche Grundgebilde, da jedes Grundgebilde den dritten Teil des dreidimensionalen Prismas $\begin{pmatrix} A_2 A_3 A_4 \\ B_2 B_3 B_4 \end{pmatrix}$ enthält; somit sind die drei letzten Pyramiden an Rauminhalt gleich. Das letzte kann man auch schreiben: $\begin{pmatrix} A_4 & \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{pmatrix}$, und hat dann zum Grundgebilde das Tetraeder $(B_1 B_2 B_3 B_4)$ und zur Höhe den Abstand der Ebene $(A_1 \ldots A_4)$ von der Ebene $(B_1 \ldots B_4)$. Die Pyramide $\begin{pmatrix} B_1 & \\ A_1 A_2 A_3 A_4 \end{pmatrix}$ hat zum Grundgebilde das Tetraeder $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ und zur Höhe den Abstand derselben Ebenen. Da aber die Tetraeder $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ und $(B_1 B_2 B_3 B_4)$ kongruent sind, so sind auch die beiden vierdimensionalen Pyramiden gleich, und das vierdimensionale Prisma ist in vier inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt. Somit ist zunächst die vierseitige, und demnach jede Pyramide der vierte Teil eines Prismas, welches mit ihr gleiches Grundgebilde und gleiche Höhe hat.

Der Messung legt man ein Prisma zu Grunde, welches von lauter (nämlich acht) Würfeln begrenzt ist. Dann wird der

Rauminhalt eines jeden Prismas erhalten, indem man den Inhalt des Grundgebildes mit der Höhe multipliziert.

Die einfachste vierdimensionale Pyramide, die vierseitige, wird vielfach als Pentatop bezeichnet. Die fünf Eckpunkte mögen mit 1, 2, 3, 4, 5, die Kanten durch $(\iota\varkappa)$ bezeichnet werden, wenn ι, $\varkappa$ zwei Marken der Reihe 1 ... 5 sind; entsprechend bezeichne $(\iota\varkappa\lambda)$ eine Grenzfläche, $(\iota\varkappa\lambda\mu)$ ein Grenztetraeder; die Winkel zweier Kanten mögen mit $(\iota\varkappa, \iota\lambda)$, zweier Flächen mit $(\iota\varkappa\lambda, \iota\varkappa\mu)$ u. s. w. bezeichnet werden. Dann ist der Inhalt der Pyramide gleich $\frac{1}{4} h_5 R_5$, wenn mit h_5 der Abstand des Punktes 5 von der Ebene (1, 2, 3, 4) und mit R_5 der Inhalt des Tetraeders (1, 2, 3, 4) bezeichnet wird; letzterer ist

$$R_5 = \tfrac{1}{6}\,(12)\,.\,(13)\,.\,(1,4)\sin(12,\,13)\sin(12,14)\sin(123,124).$$

Der Fufspunkt von h_5 möge mit H_5 bezeichnet werden; von A_5 fälle man die Senkrechten auf (12) und (123), deren Fufspunkte K und J sein mögen. Dann steht JH_5 auf (123) und KJ auf (12) senkrecht. Folglich ist

$A_5H_5 = A_5J\,.\sin(1235, 1234)$, $A_5J = A_5K\sin(125, 123)$, $A_5K = (15)\sin(12, 15)$, so dafs wir als Ausdruck für den Rauminhalt finden:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{24}\,(12)\,(13)\,(14)\,(15)\,.\,\sin(12,\,13)\sin(12,\,14)\sin(12,\,15)\\ \sin(123,\,124)\sin(124,\,125)\sin(1234,\,1235)\\ = \tfrac{1}{24}\,(12)\,(13)\,(14)\,(15)\sin[1],\end{aligned}$$

wo mit [1] der vierdimensionale durch die vier vom Punkte A_1 ausgehenden Kanten bestimmte Winkel bezeichnet wird.

Der vierundzwanzigfache Rauminhalt eines Fünfzells ist also gleich dem Produkt der vier von einer Ecke ausgehenden Kanten in den Sinus des von diesen Kanten bestimmten Winkels.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich weitere Relationen zwischen den Grenzgebilden des Fünfzells, auf welche wir nicht näher eingehen wollen. Überhaupt mögen die vorstehenden Sätze genügen, um zu zeigen, wie leicht es ist, die für den dreidimensionalen Raum geltenden Sätze auf einen vierfach ausgedehnten Raum zu übertragen. Einige weitere Lehrsätze werden wir im folgenden Paragraphen herleiten.

§ 13.

Die n-dimensionalen Polyeder.

Wenn zwei Gebilde so auf einander bezogen werden können, daſs jedem Punkte des einen ein Punkt des andern entspricht und umgekehrt, und wenn zwei Punkte des einen dieselbe Entfernung haben, wie die entsprechenden Punkte des andern, so sind auch die Winkel der einen Figur gleich denen der andern; jedes allseitig begrenzte zwei- oder dreidimensionale Gebilde der einen Figur ist an Inhalt dem entsprechenden Gebilde der andern gleich; wir sagen dann kurz, die Gebilde stimmten in allen Gröſsenbeziehungen überein. Damit wir aber die Gebilde als kongruent bezeichnen können, müssen wir ein drittes, veränderliches Gebilde hinzunehmen; die Veränderung desselben soll stetig sein, alle Gröſsenbeziehungen ungeändert lassen und in der Weise erfolgen, daſs das neue Gebilde einmal mit dem ersten und dann mit dem zweiten Gebilde identisch wird. Nur wenn alle diese Bedingungen erfüllt sind, dürfen wir die beiden Gebilde als kongruent bezeichnen.

Die auf die angegebene Weise bestimmte stetige Zuordnung soll als starre Bewegung bezeichnet werden.

Ein (zusammenhangender) endlicher Teil des Raumes sei durch eine Anzahl von $(n-1)$-dimensionalen Ebenen begrenzt; dieser Teil möge als ein n-dimensionales Polyeder bezeichnet werden. Die Grenze besteht aus $(n-1)$-dimensionalen Polyedern, d. h. aus endlichen Teilen je einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene, welche von lauter $(n-2)$-dimensionalen ebenen Gebilden begrenzt werden. Demgemäſs gehören der Grenze noch $(n-2)$-dimensionale, . . . 3-dimensionale Polyeder, sowie Polygone, Kanten und Ecken an. Wir betrachten nur solche Polyeder, welche durch jede schneidende $(n-1)$-dimensionale Ebene in zwei Teile (und nicht in mehr) zerlegt werden, und für welche jedes durch die Teilung erhaltene Polyeder dieselbe Eigenschaft hat; dann wird auch jede hindurchgehende gerade Linie nur eine einzige Strecke im Innern enthalten; infolge der Stetigkeit muſs dasselbe für eine in der Oberfläche gezogene gerade Linie gelten.

Die Anzahl der Ecken soll mit a_0, die der Kanten mit a_1, die der ebenen Grenzpolygone mit a_2, sowie die der m-dimensionalen Grenzpolyeder mit a_m bezeichnet werden für m = 3, 4 ... n — 1. Ebenso wollen wir die Ecken selbst mit E_0, die Kanten mit E_1, die Polygone mit E_2, ... und endlich die (n — 1)-dimensionalen Grenzpolyeder mit E_{n-1} bezeichnen, indem wir obere Marken anbringen, wenn mehrere solche Gebilde unterschieden werden müssen. Dann ist die Anzahl der in einer E_{n-2} zusammenstofsenden E_{n-1} gleich zwei, die Anzahl der in einer E_{n-3} zusammenstofsenden E_{n-2} und E_{n-1} mindestens gleich drei; ebenso ist die Anzahl der in einer E_{n-p} zusammenstofsenden $E_{n-p+1} \ldots E_{n-1}$ mindestens gleich p; also müssen speziell an jeder Ecke mindestens n Kanten und n mehrdimensionale Grenzebenen zusammenstofsen. Umgekehrt gehören jeder E_1 zwei E_0, jeder E_2 mindestens drei E_0 und drei E_1, jeder E_3 mindestens vier E_0, vier E_1, vier E_2 u. s. w. an. Alle diese Wahrheiten ergeben sich aus dem Beweise des folgenden Satzes.

a) »Im n-dimensionalen Raume sind mindestens n + 1 Ebenen von n — 1 Dimensionen erforderlich, um einen n-dimensionalen Körper zu begrenzen; umgekehrt wird aber auch durch n + 1 solche Ebenen jedesmal ein endlicher Teil des Raumes begrenzt, wofern nicht mehrere unter diesen Ebenen eine besondere Lage zu einander haben.«

Wir wählen zwei Ebenen E_{n-1}^1 und E_{n-1}^2 so, dafs sie nicht parallel sind; dann schneiden sie sich in einer E_{n-2}. Eine dritte Ebene E_{n-1}^3 wird so gewählt, dafs sie weder durch das Schnittgebilde hindurchgeht noch zu ihm parallel ist; dann haben die drei Ebenen eine E_{n-3} gemeinschaftlich. Hierzu fügen wir eine E_{n-1}^4, welche wiederum weder durch das Schnittgebilde der ersten hindurchgeht noch ihm parallel ist. In entsprechender Weise fährt man fort. Solange man auf diesem Wege nur n Ebenen oder noch weniger gewählt hat, erhält man mindestens einen Schnittpunkt, der allen gemeinschaftlich ist; legt man durch einen solchen Punkt eine gerade Linie, welche in keine der Ebenen hineinfällt, so wird sie auch keine von ihnen zum zweitenmale treffen; man kann also von jedem Punkte des Raumes zu einem unendlich fernen Punkte gelangen, ohne durch eine der Ebenen hindurchzugehen. Nachdem in der bezeichneten Weise n Ebenen gewählt sind, fügt man die E_{n-1}^{n+1} hinzu, welche nicht durch den Schnittpunkt der n ersten geht. Infolge der getroffenen

Wahl werden sich je n Ebenen in einem Punkte schneiden, und wir bezeichnen den Schnittpunkt von $E_{n-1}{}^{1} \ldots E_{n-1}{}^{m-1} E_{n-1}{}^{m+1} \ldots E_{n-1}{}^{n+1}$ mit $E_0{}^m$. Von denjenigen beiden Teilen des Raumes, in welche derselbe durch $E_{n-1}{}^1$ zerlegt wird, betrachte ich denjenigen, in welchem $E_0{}^1$ liegt. Dieser Teil wird wieder durch $E_{n-1}{}^2$ zerlegt und ich betrachte wiederum denjenigen Raumteil, auf dessen Grenze gegen $E_{n-1}{}^1$ der Punkt $E_0{}^2$ liegt. Indem ich fortfahre, erhalte ich einen gewissen Raumteil, der näher untersucht werden soll. Wäre ich von $E_{n-1}{}^m$ ausgegangen und hätte dann in der angegebenen Weise einen Raumteil begrenzt, so würde ich wieder zu dem auf die erste Weise erhaltenen gelangen.

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist es gleichgültig, von welchem Eckpunkte man ausgeht: wir wollen annehmen, dasselbe sei bereits für die Zahl $n - 1$ bewiesen. Dann wird in jeder Ebene $E_{n-1}{}^m$ durch den Schnitt mit den übrigen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen ein endliches Grenzgebilde bestimmt, welches mit $F_{n-1}{}^m$ bezeichnet werden soll. Somit wird ein endlicher Raum R bestimmt, wenn man vom Punkte $E_0{}^1$ nach allen Punkten von $F_{n-1}{}^1$ gerade Strecken zieht. Der Beweis des obigen Satzes kommt also jetzt darauf hinaus zu zeigen, dafs der Raumteil R auch erhalten wird, wenn man den Punkt $E_0{}^m$ mit allen Punkten von $F_{n-1}{}^m$ durch gerade Strecken verbindet. Jetzt sei α ein beliebiger Punkt im Innern von R, so folgt hieraus, dafs die Gerade $E_0{}^1\alpha$ das Grenzgebilde $F_{n-1}{}^1$ in einem Punkte β schneidet, dafs α der Strecke $E_0{}^1\beta$ angehört und dafs die Gerade $E_0{}^m\beta$ das Grenzgebilde $F_{n-1}{}^m$ in einem Punkte γ trifft, wo wieder β in der Strecke $E_0{}^m\gamma$ liegt. Demnach gehört das Dreieck $E_0{}^1E_0{}^m\gamma$ dem Raumteile R an, und da α im Innern dieses Dreiecks liegt, so trifft die Gerade $E_0{}^m\alpha$ die Seite $E_0{}^1\gamma$ und damit das Grenzgebilde $F_{n-1}{}^m$ in einem Punkte δ so, dafs α der Strecke $E_0{}^m\delta$ angehört. Wir erhalten also jeden Punkt α des Raumteiles R, indem wir von $E_0{}^m$ nach allen Punkten von $F_{n-1}{}^m$ die geraden Strecken ziehen.

b) »Wenn in einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene ein $(n-1)$-fach ausgedehntes Polyeder gegeben ist, so bestimmt die Gesamtheit der geraden Strecken, welche von einem Punkte dieses Polyeders nach einem festen, nicht in der Ebene des Polyeders gelegenen Punkte gezogen werden können, ein n-dimensionales Polyeder, welches als n-dimensionale Pyramide bezeichnet werden möge.«

Irgend ein Punkt P gehöre dem gegebenen Polyeder an; A sei ein fester Punkt, welcher nicht mit dem Polyeder in derselben Ebene liegt; dann soll dem neuen Polyeder jeder Punkt R angehören, welcher auf der Strecke AP liegt. Ein solcher Punkt R kann aber nicht unendlich fern liegen; da die Gesamtheit der Punkte P im Endlichen liegt, also auch die Entfernung von A nicht über eine gewisse endliche Gröfse steigt und $AR < AP$ ist, so mufs auch AR unterhalb einer festbestimmten Gröfse bleiben. Sind aber R und R' irgend zwei in dieser Weise bestimmte Punkte, so mögen dazu die Strecken AP und AP' nach zwei Punkten P und P' des $(n-1)$-dimensionalen Polyeders gehören; dann kann man von P nach P' in dem ersten Polyeder gelangen, ohne an die Grenze zu kommen; speziell wird die gerade Strecke PP' ganz im Innern des gegebenen Polyeders liegen. Folglich liegt auch die gerade Strecke RR' im Innern des neuen Körpers.

Wenn das gegebene Polyeder b_0 Ecken, b_1 Kanten, b_2 Polygone ... b_{n-2} Grenzpolyeder von $n-2$-Dimensionen hat, so sind die entsprechenden Zahlen a_0, $a_1 \ldots a_{n-1}$ für das neue Polyeder durch die Beziehungen bestimmt:

$$(1)\quad \begin{aligned} &a_0 = b_0 + 1,\ a_1 = b_1 + b_0,\ a_2 = b_2 + b_1 \ldots \\ &a_{n-2} = b_{n-2} + b_{n-3},\ a_{n-1} = b_{n-2} + 1. \end{aligned}$$

Denn die m-dimensionalen Grenzgebilde des ersten gehören auch der Grenze des neuen an; es treten aber als m-dimensionale Grenzgebilde diejenigen m-dimensionalen Ebenen hinzu, welche durch den Punkt A und ein $(m-1)$-dimensionales Grenzgebilde des gegebenen hindurchgehen.

c) (Eulerscher Lehrsatz.) »Zwischen der Anzahl der Ecken, Kanten und der weiteren Grenzgebilde eines n-dimensionalen Polyeders besteht die Relation:

$$(2)\quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n = 1.«$$

Für zwei Dimensionen ist diese Formel: $a_0 - a_1 = 0$, für drei Dimensionen: $a_0 - a_1 + a_2 = 2$, für vier: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$, für fünf: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2$. Auch ist dieselbe für zwei und drei Dimensionen bekannt; wir nehmen an, sie sei für $n-1$ Dimensionen bewiesen, und wollen zeigen, dafs sie für n Dimensionen gilt.

Zu dem Ende setzen wir voraus, jedes gewöhnliche Polyeder könne dadurch erhalten werden, dafs man auf die Seiten einer Pyramide als Grundgebilde neue Pyramiden aufsetzt und in weiterer Folge auch die Seiten des neuen Körpers zu Grundgebilden von Pyramiden nimmt, die zu dem vorher gebildeten Körper hinzugefügt werden sollen. Nun gilt die Relation (2) offenbar für Pyramiden, wie man sofort sieht, wenn man die Werte aus (1) in (2) einsetzt. Will man also die allgemeine Gültigkeit der Relation (2) zeigen, so nehme man an, sie sei für einen gegebenen Körper richtig; dann errichte man über einem seiner $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilde eine Pyramide, füge sie zu dem Körper hinzu und beweise, dafs die Relation auch für den neuen Körper gültig bleibt.

Bei diesem Beweise nehmen wir zuerst an, der Eckpunkt der neuen Pyramide falle nicht in die Erweiterung einer E_{n-1} des gegebenen Körpers hinein. Wenn die gewählte E_{n-1}, auf der die Pyramide errichtet wird, b_0 Ecken, b_1 Kanten u. s. w. enthält, so sind die entsprechenden Zahlen für die Pyramide: b_0+1, b_1+b_0, $b_2+b_1 \ldots b_{n-2}+b_{n-3}$, $1+b_{n-2}$. Für den gegebenen Körper mögen die Zahlen a_0, $a_1 \ldots a_{n-1}$ gelten und hierfür die Relation (2) bewiesen sein. Die Zahlen für den neuen Körper mögen mit c_0, $c_1 \ldots c_{n-1}$ bezeichnet werden; dann ist

$$(3)\quad \begin{aligned} &c_0 = a_0+1,\ c_1 = a_1+b_0,\ c_2 = a_2+b_1 \ldots c_{n-2} = a_{n-2}+b_{n-3} \\ &c_{n-1} = a_{n-1}+b_{n-2}-1; \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} &c_0-c_1+c_2-c_3 \ldots +(-1)^{n-1}c_{n-1}+(-1)^n = \\ &[a_0-a_1+a_2-a_3 \ldots +(-1)^{n-1}a_{n-1}+(-1)^n] \\ &-[b_0-b_1+b_2-b_3+\ldots+(-1)^{n-2}b_{n-2}+(-1)^{n-1}]+1, \end{aligned}$$

wo die zweite Klammer sich gegen die erste hebt, also der Wert 1 bleibt.

Jetzt möge die Spitze der auf E_{n-1} aufgesetzten Pyramide in diejenige Ebene fallen, welcher das Grenzgebilde E_{n-1}' angehört; aber sie möge nicht in die Erweiterung einer E_{n-2} fallen. Dann hört diejenige E_{n-2}, welche E_{n-1} und E_{n-1}' gemeinschaftlich ist, auf, Grenzgebilde für den neuen Körper zu sein. Somit bleiben in (3) die Zahlen c_0, $c_1 \ldots$ ungeändert bis auf c_{n-2} und c_{n-1}; es wird nämlich $c_{n-2} = a_{n-2}+b_{n-3}-1$, $c_{n-1} = a_{n-1}+b_{n-2}-2$;

die Differenz dieser beiden Zahlen ist aber dieselbe wie früher; also gilt auch die Formel (2) wieder.

Allgemein möge die Spitze der Pyramide in die Erweiterung einer E_m fallen. Diese hat mit dem Grundgebilde E_{n-1} der aufgesetzten Pyramide eine E_{m-1} gemeinschaftlich und letztere mufs aufhören, Grenzgebilde des neuen Körpers zu sein; also ist:

$$c_{m-1} = a_{m-1} + b_{m-2} - 1.$$

E_{m-1} möge in E_{n-1} angehören p_μ Gebilden μ^{ter} Dimension für $\mu = m \ldots n-1$; dann wird sein:

$$c_m = a_m + b_{m-1} - p_m,\ c_{m+1} = a_{m+1} + b_m - p_{m+1} \ldots$$
$$c_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2} - p_{n-1} - 1.$$

Setzen wir diese Werte ein, so gilt die Gleichung (2) auch für die Zahlen $c_0, c_1 \ldots c_{n-1}$.

Ein zweiter Beweis ergiebt sich auf folgendem Wege:

Man betrachte nur diejenigen Grenzgebilde, welche einer $(n-1)$-dimensionalen Grenzfläche angehören, und bezeichne die Anzahl der hierdurch erhaltenen m-dimensionalen Grenzgebilde mit e_m für $m = 0, 1 \ldots n-1$, wo offenbar $e_{n-1} = 1$ ist. Für eine zweite Grenzfläche E_{n-1}', die mit der ersten in einer E_{n-2} zusammenhängt, mögen die entsprechenden Zahlen $e_0', e_1' \ldots e_{n-1}'$ sein, während die gemeinschaftliche E_{n-2} gerade $f_0, f_1 \ldots f_{n-2}$ Grenzgebilde von $0, 1, \ldots n-2$ Dimensionen enthält, wo $f_{n-2} = 1$ ist. Den beiden Grenzgebilden E_{n-1} und E_{n-1}' gehören dann zusammen

$$e_0 + e_0' - f_0,\ e_1 + e_1' - f_1 \ldots e_{n-2} + e_{n-2}' - f_{n-2},\ e_{n-1} + e_{n-1}'$$

Grenzgebilde des gegebenen Polyeders an, wo die untern Marken die Zahl der Dimensionen angeben. Nun wird der Satz bereits für $(n-1)$- und $(n-2)$-dimensionale Polyeder als richtig angenommen; folglich gelten die Gleichungen:

$$e_0 - e_1 + e_2 - \ldots \pm e_{n-2} \mp e_{n-1} = 1$$
$$e_0' - e_1' + e_2' - \ldots \pm e_{n-2}' \mp e_{n-1}' = 1$$
$$f_0 - f_1 + f_2 \qquad \pm f_{n-2} \qquad = 1.$$

Hieraus folgt, dafs die erste Relation auch noch gültig bleibt, wenn man jetzt unter e_m für $m = 0, 1 \ldots n-1$ die Anzahl der m-dimensionalen Grenzgebilde versteht, die den Grenzflächen E_{n-1} und E_{n-1}' angehören. Diese Betrachtung ändert sich nicht wesentlich, wenn man ein weiteres $(n-1)$-dimensionales Grenzgebilde hinzunimmt, wofern dies nur mit einem oder mehreren der früher untersuchten ein $(n-2)$-dimensionales Grenzgebilde gemeinschaftlich hat. Nur das letzte Grenzgebilde fügt kein weiteres Grenzgebilde von weniger als $n-1$ Dimensionen hinzu, nötigt also, da die Zahl e_{n-1} um eins vermehrt wird, der Gleichung die Form (2) zu geben.

d) Für den Körper, der durch $n+1$ Ebenen von $n-1$ Dimensionen begrenzt wird, gelten viele Sätze, die ihn in enge Beziehung zum Dreieck bringen. Wir wollen einige von diesen Sätzen anführen.

α) »Die $\frac{n(n+1)}{2}$ Ebenen von $n-1$ Dimensionen, welche je in der Mitte einer Kante senkrecht auf ihr stehen, gehen durch einen Punkt 0, der von den $n+1$ Eckpunkten gleichen Abstand hat. Die $\binom{n+1}{3}$ Ebenen von $n-2$ Dimensionen, von denen jede im Mittelpunkt eines durch drei Punkte gelegten Kreises auf seiner Ebene senkrecht steht, gehen durch denselben Punkt 0. Wenn allgemein $m < n$ ist und für irgend m Punkte der Mittelpunkt der hindurchgelegten Kugel bestimmt ist und wenn dann im Mittelpunkt die $(n-m+1)$-dimensionale Ebene senkrecht auf der durch die m Punkte gehenden $(m-1)$-dimensionalen Ebene errichtet ist, so geht jede solche Ebene durch 0.«

Man nehme die n Kanten $A_1 A_2$, $A_1 A_3 \ldots A_1 A_{n+1}$ und errichte auf jeder in der Mitte die senkrechte Ebene, so ist ihr Schnittpunkt 0 von allen $n+1$ Punkten gleich weit entfernt; also liegt er auch in den Ebenen, welche in der Mitte der andern Kanten senkrecht auf ihnen errichtet sind. Fällt man aber von 0 die $(n-m+1)$-dimensionale Ebene senkrecht auf eine durch m Punkte gelegte $(m-1)$-dimensionale, so mufs deren Fufspunkt der Mittelpunkt der durch die m Punkte gehenden Kugel sein.

β) »Die $\frac{n(n+1)}{2}$ Ebenen, deren jede den Neigungswinkel zweier Grenzebenen halbiert, gehen durch einen Punkt, welcher von den Ebenen gleichen Abstand hat. Für je drei der gegebenen Ebenen giebt es im Innern des Körpers eine $(n-2)$-dimensionale Ebene, deren Punkte von den drei Ebenen gleichen Abstand haben; die so bestimmten $\binom{n+1}{3}$ Ebenen gehen ebenfalls durch denselben Punkt u. s. w.«

γ) »Wenn der Schwerpunkt eines (m — 1)-dimensionalen Gebildes, welches durch m von den gegebenen Punkten bestimmt ist, als bekannt vorausgesetzt wird, so kann man ihn für ein m-dimensionales Gebilde, für welches zu den ersten m Punkten ein $(m+1)^{\text{ter}}$ hinzukommt, dadurch finden, dafs man den $m+1^{\text{ten}}$ Eckpunkt mit dem Schwerpunkt des (m — 1)-dimensionalen Gebildes durch eine gerade Strecke verbindet und vom letzteren Punkte an den $(m+1)^{\text{ten}}$ Teil der Strecke abtrennt. Man würde zu demselben Punkte gelangen, wenn man die Konstruktion für irgend einen andern der $m+1$ Ecken und das gegenüberliegende Gebilde gemacht hätte.«

Beim Beweise nehmen wir an, der Satz sei für m Punkte bewiesen, und leiten daraus seine Gültigkeit für $m+1$ Punkte her. Indem man aus der Reihe der Punkte $A_1 \ldots A_{m+1}$ für i, $k = 1 \ldots m+1$ die beiden Punkte A_i und A_k wegläfst, möge der Punkt S_{ik} der Schwerpunkt des durch die $m-1$ übrigen Punkte bestimmten Polyeders sein. Ebenso sei S_i der Schwerpunkt desjenigen Polyeders, dessen Ecken die Punkte $A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_{m+1}$ sind; entsprechend sei S_k bestimmt. Dann wird vorausgesetzt, dafs die Punkte S_{ik}, S_k, A_i in gerader Linie liegen und dafs die Strecke $S_{ik} S_k = \frac{1}{m} S_{ik} A_i$ ist; ebenso sollen die Punkte S_{ik}, S_i, A_k in gerader Linie liegen und es soll $S_{ik} S_i = \frac{1}{m} S_{ik} A_k$ sein. Folglich ist die Strecke $S_k S_i$ parallel der Strecke $A_i A_k$ und gleich dem m^{ten} Teil derselben. Die Geraden $A_i S_i$ und $A_k S_k$ schneiden sich also in einem Punkte S, für den $S_i S = \frac{1}{m} S A_i$ oder $S_i S = \frac{1}{m+1} S_i A_i$ ist. Der Punkt S liegt aber auch auf jeder andern Strecke $S_k A_k$ und teilt sie nach dem angegebenen Verhältnis.

Da die Richtigkeit des Satzes für $m = 2$ unmittelbar einleuchtet, folgt aus der vorstehenden Entwicklung seine allgemeine Gültigkeit.

δ) Nachdem auf diese Weise der Schwerpunkt für das durch irgend m ($< n+1$) Punkte bestimmte Gebilde definiert ist, können wir den folgenden schönen Satz aussprechen:

»Die Geraden, welche je einen Eckpunkt mit dem Schwerpunkt des gegenüberliegenden ($n-1$)-dimensionalen Gebildes verbinden, sowie diejenigen Geraden, welche die Mitte einer Kante mit dem Schwerpunkt des gegenüberliegenden ($n-2$)-dimensionalen Grenzgebildes verbinden, überhaupt die Geraden, welche den Schwerpunkt eines m-dimensionalen Gebildes mit dem des gegenüberliegenden ($n-m-1$)-dimensionalen Grenzgebildes verbinden gehen durch einen Punkt, den Schwerpunkt des Polyeders.«

Der erste Teil des Satzes ist schon bewiesen. Der zweite Teil folgt durch ähnliche Betrachtungen, wie der erste. Verbinden wir nämlich S_{ik} mit S durch eine Gerade, so mufs diese die Kante $A_i A_k$ in der Mitte treffen; zugleich ist $S_{ik} S_i S_{ik} M_{ik} = n-1:2$, wo M_{ik} die Mitte von A_i und A_k ist. Wir ziehen jetzt die Gerade $M_{ik} A_l$ und machen auf derselben $M_{ik} M_{ikl} = \frac{1}{3} M_{ik} A_l$, so ist M_{ikl} der Schwerpunkt des Dreiecks $A_i A_k A_l$. Ziehen wir aber $A_l S_{ik}$, so trifft diese Linie dasjenige Gebilde, unter dessen Ecken die Marken i, k, l nicht vorkommen, im Schwerpunkt S_{ikl}, und zwar ist $S_{ikl} S_{ik} = \frac{1}{n-2} S_{ikl} A_l$. Daraus ergiebt sich aber, dafs die Gerade $M_{ikl} S_{ikl}$ durch S hindurchgeht u. s. w.

e) Bei einem regelmäfsigen Polyeder soll jedes Grenzgebilde in seinen Eigenschaften mit jedem andern übereinstimmen, das mit dem ersten gleichviel Dimensionen hat. Ein regelmäfsiges Polyeder kann durch Bewegung in mancherlei Weise zur Deckung mit seiner Anfangslage gebracht werden, und zwar kann man dabei noch festsetzen, dafs ein m-dimensionales Grenzgebilde (für $m < n$) die Anfangslage irgend eines andern m-dimensionalen Grenzgebildes deckt. Daher müssen alle Kanten gleich sein; je zwei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten, je zwei in einer Kante sich treffende Grenzpolygone u. s. w. müssen gleiche Winkel mit einander einschliefsen. Sind m und r irgend zwei Zahlen kleiner als n, und ist $m < r$, so mufs jedes E_r gleich viele E_m enthalten und in jedem E_m müssen gleich viele E_r zusammenstofsen.

Wir bezeichnen die Zahl der Grenzgebilde mit $a_0, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$, indem wir die Zahl der Dimensionen als Marke daran setzen.

In jeder Ecke mögen zusammenstofsen $b_1{}^0$ Kanten, $b_2{}^0$ Grenzpolyeder, $b_3{}^0$ dreidimensionale Grenzpolyeder u. s. w. Überhaupt möge für $\iota < \varkappa < n$ die Zahl $b_\varkappa{}^\iota$ die Anzahl derjenigen $E_\varkappa$ bezeichnen, welche in einer E_ι zusammenstofsen; ebenso gebe $E_\iota{}^\varkappa$ die Zahl derjenigen E_ι an, welche in einer $E_\varkappa$ liegen. Demnach mögen in einem $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilde $b_0{}^{n-1}$ Ecken, $b_1{}^{n-1}$ Kanten, $b_2{}^{n-1}$ Grenzpolygone u. s. w. liegen.

Jedes Grenzgebilde von $n-1$ Dimensionen ist selbst regelmäfsig; daher genügen $b_0{}^{n-1}$, $b_1{}^{n-1} \ldots b_{n-2}{}^{n-1}$ denjenigen Bedingungen, welche für einen regelmäfsigen Körper von $n-1$ Dimensionen erfüllt werden müssen. Dasselbe gilt für jedes Grenzgebilde, und die Zahlen $b_0{}^\varkappa$, $b_1{}^\varkappa \ldots b_{\varkappa-1}{}^\varkappa$ genügen den Bedingungen für einen $\varkappa$-dimensionalen regelmäfsigen Körper.

Aber auch die Gesamtheit der in einer Ecke zusammenstofsenden Kanten, Flächen u. s. w. bildet ein Analogon zu einem regelmäfsigen Körper. Man kann in der Nähe eines Eckpunktes eine $(n-1)$-dimensionale Ebene so legen, dafs auf ihr durch das gegebene Polyeder ein regelmäfsiges Polyeder von $n-1$ Dimensionen ausgeschnitten wird. Beschreibt man um einen Eckpunkt eine Kugel, so wird auf ihr ein regelmäfsiger $(n-1)$-dimensionaler Körper durch die von dem Punkte ausgehenden Grenzgebilde ausgeschnitten. Daher genügen auch die Zahlen $b_1{}^0$, $b_2{}^0 \ldots b_{n-1}{}^0$, den Bedingungen für die Zahl der Ecken, Kanten, ... $(n-2)$ dimensionalen Grenzgebilde eines $(n-1)$-dimensionalen regelmäfsigen Polyeders. Entsprechendes gilt für die Zahlen $b_{\varkappa+1}{}^\varkappa$, $b_{\varkappa+2}{}^\varkappa \ldots b_{n-1}{}^\varkappa$ bei beliebigem Werte von $\varkappa$.

Von den n^2 Zahlen $b_\iota{}^\varkappa$ für $\iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n-1$ sind einige sofort bekannt; es ist $b_\varkappa{}^\varkappa = 1$, $b_0{}^1 = 2$, $b_{n-1}{}^{n-2} = 2$. Ferner ist

$$(4)\quad b_\lambda{}^{\lambda-1} < b_\lambda{}^{\lambda-2} < \ldots < b_\lambda{}^0 < a_\lambda,$$

da in einer $E_{\varkappa-1}$ mehr E_λ zusammenstofsen, als in einer $E_\varkappa$. Zudem ist:

$$(5)\quad b_\varkappa{}^{\varkappa+1} < b_\varkappa{}^{\varkappa+2} < \ldots < b_\varkappa{}^{n-1} < a_\varkappa,$$

weil eine $E_{\mu+1}$ mehr $E_\varkappa$ enthält, als eine E_μ.

Endlich gilt noch die wichtige Relation:

$$(6)\quad a_\iota b_\varkappa{}^\iota = a_\varkappa b_\iota{}^\varkappa,$$

wie folgende Betrachtung zeigt: Die Zahl der in einer E_ι liegenden (zusammenstofsenden) $E_\varkappa$ ist $b_\varkappa{}^\iota$; also erhalte ich durch das erste Produkt alle $E_\varkappa$ so oft, als in einer $E_\varkappa$ Grenzgebilde E_ι liegen (zusammenstoſsen); denselben Gedanken drückt aber auch die zweite Seite der Gleichung aus.

f) »In jedem regelmäſsigen Polyeder giebt es einen Punkt, der von allen Ecken, Kanten, sowie von allen Grenzgebilden der übrigen Arten gleichweit entfernt ist; die von diesem Punkte auf ein Grenzgebilde gefällte Senkrechte trifft dasselbe in seinem Mittelpunkte. Speziell giebt es eine Kugel, welche durch alle Ecken geht, und eine zweite, welche alle $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilde berührt.«

»Jedem regelmäſsigen Polyeder kann man als sein reziprokes ein zweites so zuordnen, daſs sich die Zahl der λ-dimensionalen und der $(n-1-\lambda)$-dimensionalen Grenzgebilde vertauscht.«

Dieser Satz wird genau so bewiesen, wie der entsprechende Satz der gewöhnlichen Stereometrie. Um den ersten Teil als richtig zu erkennen, bewege man das Polyeder so, daſs es als Ganzes wieder den anfänglich gedeckten Raum einnimmt, während die Grenzgebilde zum Teil andere Lagen erhalten, und zeige, daſs dann jedesmal auch ein im Innern des Polyeders gelegener Punkt, der Mittelpunkt jener Kugeln, wieder in seine Anfangslage kommt. Für den zweiten Teil fälle man vom Mittelpunkte der Kugel auf jede E_{n-1} die Senkrechte und wähle deren Fuſspunkte (oder auch deren Schnittpunkte mit der Kugel) zu Eckpunkten eines neuen Polyeders. Mit E_{n-1} mögen E_{n-1}', E_{n-1}'' ... zusammenstoſsen; vom Fuſspunkt der auf E_{n-1} gefällten Senkrechten ziehe man gerade Strecken nach den Fuſspunkten der auf E_{n-1}', E_{n-1}'' ... gefällten Senkrechten und lasse sie Kanten des neuen Polyeders sein u. s. w. Für das so gefundene Polyeder mögen den oben eingeführten Zahlen a_0, $a_1 \ldots a_{n-1}$ die Zahlen c_0, $c_1 \ldots c_{n-1}$ und den Zahlen $b_\varkappa{}^\lambda$ die Zahlen $d_\varkappa{}^\lambda$ entsprechen; so möge das neue Polyeder c_0 Ecken, c_1 Kanten u. s. w. besitzen, und für $\lambda < \varkappa$ mögen $d_\varkappa{}^\lambda$ Grenzgebilde von $\varkappa$ Dimensionen in einem λ-dimensionalen Grenzgebilde zusammenstoſsen; dann ist:

$$(7)\quad c_\lambda = a_{n-1-\lambda},\quad d_\varkappa{}^\lambda = b_{n-1-\varkappa}{}^{n-1-\lambda}.$$

g) »Für jede Zahl n von Dimensionen giebt es mindestens drei Arten von regelmäſsigen Körpern.«

Die charakteristischen Zahlen für jede Art sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	a_0	a_1	$a_\varkappa$	a_{n-1}
I.	$n+1$	$\binom{n+1}{2}$	$\binom{n+1}{\varkappa+1}$	$n+1$
II.	2^n	$n \,.\, 2^{n-1}$	$\binom{n}{\varkappa}2^{n-\varkappa}$	$2n$
III.	$2n$	$\binom{n}{2}2^2$	$\binom{n}{\varkappa+1}2^{\varkappa+1}$	2^n

I. Der ersten Klasse entspricht in der zweidimensionalen Ebene das Dreieck, im dreidimensionalen Raume das Tetraeder, im Raume von n Dimensionen der von $n+1$ $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilden begrenzte Körper. Hat man das dieser Reihe angehörende Polyeder in einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene konstruiert, so errichte man in dessen Schwerpunkt die Senkrechte auf der Ebene und mache sie gleich der mit $\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ multiplizierten Kante. Hierdurch erhält man den letzten Eckpunkt des gesuchten Körpers.

Man kann also vom regelmäfsigen Dreieck $A_1A_2A_3$ ausgehen, in dessen Schwerpunkt S_2 eine Senkrechte S_2A_4 auf der Ebene konstruieren, und wenn man die Kanten gleich 1 setzt, die Senkrechte gleich $\sqrt{\frac{2}{3}}$ machen. Nun bestimme man den Schwerpunkt S_3 vom Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$, errichte in ihm eine Senkrechte S_3A_5 zu der das Tetraeder enthaltenden dreidimensionalen Ebene und mache sie gleich $\sqrt{\frac{5}{8}}$; dann sind $A_1 \ldots A_5$ die Ecken des regelmäfsigen vierdimensionalen Körpers.

Endlich kann man folgende Konstruktion machen: Man ziehe in einer Kugel K_{n-1} einen Radius A_1O und verlängere ihn um $OO_1 = \frac{1}{n}OA_1$, errichte in O_1 auf OO_1 die $(n-1)$-dimensionale senkrechte Ebene, durch welche die Kugel K_{n-1} in einer K_{n-2} geschnitten wird. Hierin ziehe man einen beliebigen Radius O_1A_2 und verlängere ihn um $O_1O_2 = \frac{1}{n-1}O_1A_2$, errichte in O_2 auf O_1O_2 die senkrechte Ebene, welche die K_{n-2} in einer K_{n-3} schneidet; darin ziehe man einen Radius O_2A_3 und mache dieselbe Konstruktion. Nachdem man durch die Festsetzung $O_{n-2}O_{n-1} = \frac{1}{2}O_{n-2}A_{n-1}$ zum Punkte O_{n-1} gekommen ist, errichte man in der zweidimensionalen Ebene, zu der man gelangt ist, auf $O_{n-1}O_{n-2}$ in O_{n-1} die Senkrechte, welche die K_1 in zwei Punkten A_n und A_{n+1} trifft.

II. Man gehe von einem Quadrat $A_1A_2A_3A_4$ aus, errichte in A_1 eine Senkrechte A_1A_5 auf A_1A_2 und A_1A_4, mache sie gleich A_1A_2, und ziehe A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8 gleich und parallel zu A_1A_5. Dann wird ein dreidimensionales Polyeder erhalten durch die Gesamtheit derjenigen geraden Strecken, welche von den Punkten des Quadrats aus in gleicher Richtung und in gleicher Gröfse mit A_1A_5 gezogen werden können. In A_1 errichte man eine Senkrechte auf A_1A_2, A_1A_4, A_1A_5, nenne sie A_1A_9 und mache sie gleich A_1A_2. Jetzt lasse man A_2A_{10}, $A_3A_{11} \ldots A_8A_{16}$ dieser Strecke gleich und parallel sein. Auf diese Weise kann man fortfahren, bis man einen n-dimensionalen Körper erhält.

Man kann auch im n-dimensionalen Raume durch einen Punkt 0 n gerade Linien ziehen, von denen jede auf jeder andern senkrecht steht. Auf diesen Linien trägt man n gleiche Strecken $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$ ab, und verlängert jede Strecke $OA_\varkappa$ über O um $OA_\varkappa' = OA_\varkappa$. Dann lege man durch $A_\varkappa$ die $E_{n-1}{}^\varkappa$, welche auf $OA_\varkappa$ senkrecht steht, und ebenso durch $A_\varkappa'$ die $(n-1)$-dimensionale Ebene $F_{n-1}{}^\varkappa$, welche auf $OA_\varkappa'$ senkrecht steht. Dann schliefsen die 2n Ebenen einen regelmäfsigen Körper ein. Denn dreht man die Figur um O, so dafs die Strahlen $OA_\varkappa$ und $OA_\varkappa'$ in ihrer Gesamtheit zur Deckung der Anfangslage kommt, so wird auch der Körper seine Anfangslage decken. Jede Ebene $E_{n-1}{}^\varkappa$ wird von allen übrigen Ebenen mit Ausnahme von $F_{n-1}{}^\varkappa$ geschnitten; demnach liefern die 2n Ebenen $2(n-1)n$ Grenzgebilde von $n-2$ Dimensionen. In einem λ-dimensionalen Grenzgebilde treffen sich $n-\lambda$ Ebenen von $n-1$ Dimensionen; um alle zu erhalten, mufs man also zusehen, wie oft man aus den n Paaren $n-\lambda$ Paare auswählen kann, und dann hat man aus jedem Paare eine Ebene auszuwählen; somit ist $a_\lambda = 2^{n-\lambda}\binom{n}{\lambda}$. In jedem Eckpunkt können nicht zwei Ebenen desselben Paares zusammenstofsen; da aber mindestens n Ebenen sich in einem Eckpunkt treffen müssen, geht durch jeden Eckpunkt eine Ebene aus jedem Paare. Die Zahlen $b_{\varkappa}{}^{\iota}$ für $\iota > \varkappa$ ergeben sich aus den Formeln für $a_{\varkappa}$, indem man n durch ι ersetzt, da in der ι-dimensionalen Ebene ein Gebilde derselben Art liegt. Dann ergeben sich die $b_{\iota}{}^{\varkappa}$ aus (6) oder auch durch eine einfache Überlegung.

III. Man lasse wieder in einem Punkte O n gerade Linien auf einander senkrecht stehen und schneide auf jeder von O aus gleiche Strecken $OA_1 = OA_1{}' = OA_2 = OA_2{}' = \ldots = OA_n = OA_n{}'$ ab. Aus jedem Punktepaar $A_{\iota} A_{\iota}{}'$ für $\iota = 1 \ldots n$ wähle man einen Punkt aus und lege durch sie eine (n — 1)-dimensionale Ebene. Die (n — 2)-dimensionalen Grenzgebilde sollen durch n — 1 Punkte gehen, welche verschiedenen Paaren angehören. Endlich werden die Kanten erhalten, indem man den Punkt A_{ι} mit je einem der Punkte A_1, $A_1{}' \ldots A_{\iota-1}$, $A_{\iota-1}{}'$, $A_{\iota+1}$, $A_{\iota+1}{}' \ldots A_n$, $A_n{}'$ verbindet. Dafs hierbei die in der Tabelle angegebenen Zahlen hervorgehen, zeigt man auf dem in II angegebenen Wege, indem man nur jedesmal Ebene und Punkt vertauscht.

Wenn ein derartiges Polyeder von n—1 Dimensionen gegeben ist, so errichte man im Mittelpunkte die Senkrechte auf der Ebene des Polyeders und mache sie beiderseits gleich dessen halber Diagonale. Indem man jeden Eckpunkt dieser Senkrechten zur Spitze einer Pyramide wählt, deren Grundgebilde das gegebene Polyeder ist, erhält man das entsprechende regelmäfsige Polyeder von n Dimensionen. Als Ecken treten die beiden Endpunkte der Senkrechten hinzu; die Kanten vermehren sich um die doppelte Eckenzahl des gegebenen Polyeders. Zu den μ-dimensionalen Grenzgebilden des ersten Polyeders treten diejenigen hinzu, welche durch je eine der neuen Ecken und je ein (μ—1)-dimensionales Grenzgebilde des gegebenen Polyeders gelegt werden können. Die Anzahl der (n - 1)-dimensionalen Grenzgebilde ist gleich der doppelten Anzahl der (n—2)-fach ausgedehnten Grenzgebilde des ersten Polyeders.

Das Polyeder I ist zu sich selbst, die Polyeder II und III sind zu einander reziprok.

h) Im vierdimensionalen Raume sind die dreidimensionalen Grenzgebilde regelmäfsige Polyeder von drei Dimensionen, deren es bekanntlich nur fünf giebt. Ebenso entsprechen die von einer Ecke ausgehenden Gebilde einem regelmäfsigen dreidimensionalen

Polyeder. Somit giebt es für die Zahlen $b_0{}^3$, $b_1{}^3$, $b_2{}^3$, sowie für die Zahlen $b_1{}^0$, $b_2{}^0$, $b_3{}^0$ nur je fünf Fälle. Mit jedem System der drei ersten Zahlen kann man aber höchstens drei Systeme der letzten Zahlen verbinden. Wähle ich z. B. $b_0{}^3 = 8$, $b_1{}^3 = 12$, $b_2{}^3 = 6$, so ist jede Fläche ein Quadrat, also $b_0{}^2 = b_1{}^2 = 4$; ferner ist $b_3{}^2 = b_0{}^1 = 2$. Dann folgt aus $a_2 b_3{}^2 = a_3 b_2{}^2$ sofort $a_2 = 3a_3$. Wegen der gewählten Werte von $b_0{}^3$, $b_1{}^3$, $b_2{}^3$ ergiebt sich aus (6):

$$b_1{}^0 = \frac{2a}{a_0},\ b_2{}^0 = \frac{4a_2}{a_0},\ b_3{}^0 = \frac{8a_3}{a_0},$$

somit mufs sein: $2b_2{}^0 = 3b_3{}^0$. Diese Relation wird nur in drei Fällen erfüllt, nämlich

1. für $b_1{}^0 = 4$, $b_2{}^0 = 6$, $b_3{}^0 = 4$,
2. für $b_1{}^0 = b$, $b_2{}^0 = 12$, $b_3{}^0 = 8$,
3. für $b_1{}^0 = 12$, $b_2{}^0 = 30$, $b_3{}^0 = 20$.

Wird aber gewählt $b_0{}^3 = 6$, $b_1{}^3 = 12$, $b_2{}^3 = 8$, so ist $b_1{}^2 = b_1{}^2 = 3$. Dann folgt $a_2 = 4a_3$, also $b_2{}^0 = 2b_3{}^0$, was nur eintritt für $b_1{}^0 = 8$, $b_2{}^0 = 12$, $b_3{}^0 = 6$.

In ähnlicher Weise verfährt man mit den andern Arten von regelmäfsigen dreidimensionalen Polyedern. Dadurch werden bereits 14 Fälle als unmöglich ausgeschieden; die übrigen elf, welche auch noch einzeln in Bezug auf ihre Möglichkeit untersucht werden müssen, sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
b^3_0	4	4	4	8	8	8	6	12	20	20	20
$b_1{}^3$	6	6	6	12	12	12	12	30	30	30	30
$b_2{}^2$	4	4	4	6	6	6	8	20	12	12	12
$b_0{}^2 = b_1{}^2$	3	3	3	4	4	4	3	3	5	5	5
$b_2{}^1 = b_3{}^1$	3	4	5	3	4	5	3	3	3	4	5
$b_1{}^0$	4	6	12	4	6	12	8	20	4	6	12
$b_2{}^0$	6	12	30	6	12	30	12	30	6	12	30
$b_3{}^0$	4	8	20	4	8	20	6	12	4	8	20
$a_1 : a_0$	2	3	6	2	3	6	4	10	2	3	6
$a_2 : a_0$	2	4	10	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{15}{2}$	4	10	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{5}$	6
$a_3 : a_0$	1	2	5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Dem ersten, zweiten und vierten Falle entsprechen diejenigen drei regelmäfsigen Körper, welche in g) für eine beliebige Zahl von Dimensionen angegeben sind. Es sind das nach dem Ausdrucke des Herrn Schlegel das Fünfzell ($a_3 = a_0 = 5$, $a_2 = a_1 = 10$), das Sechzehnzell ($a_3 = 16$, $a_2 = 32$, $a_1 = 24$, $a_0 = 8$) und das Achtzell ($a_3 = 8$, $a_2 = 24$, $a_1 = 32$, $a_0 = 16$).

Dafs die Fälle V, VI, VIII, XI, XII keinen endlichen vierdimensionalen Körper bestimmen, beweist man, indem man von einem dreidimensionalen Grenzgebilde ausgeht, durch eine Kante eine zu ihr senkrechte dreidimensionale Ebene legt und zeigt, dafs höchstens drei Würfel, drei Dodekaeder und zwei Ikosaeder hindurchgelegt werden können.

Es bleiben noch die Fälle III, VII und X zu untersuchen, von denen III und X zu einander, VII zu sich selbst reziprok ist. Um die Realität und Endlichkeit zu erkennen, setzt man an eine Ecke allmählich die andern Ecken oder an ein dreidimensionales Polyeder die andern Polyeder an. Wie das ausgeführt werden kann, möge in den Originalarbeiten eingesehen werden. Da haben sich folgende Resultate ergeben: Im Falle III ist der Körper (Sechshundertzell) von 600 Tetraedern mit 1200 Dreiecken, 720 Kanten und 120 Ecken begrenzt. Zu diesem Polyeder reziprok ist das unter X angegebene, welches Hundertundzwanzigzell genannt wird und als Grenzgebilde 120 Dodekaeder, 720 Fünfecke, 1200 Kanten und 600 Ecken enthält. Endlich liefert der Fall VII das Vierundzwanzigzell mit 24 Oktaedern, 96 Dreiecken, 96 Kanten und 24 Ecken.

Zu dem Vierundzwanzigzell kann man noch auf einem andern Wege gelangen, den wir hier mitteilen wollen, weil er sehr geeignet ist, die gegenseitige Lage der einzelnen Grenzgebilde deutlich hervortreten zu lassen.

Wir gehen von einem Sechzehnzell aus mit den acht Eckpunkten $\begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \end{pmatrix}$, wo die unter einander stehenden Punkte Gegenpunkte von einander sind. Jedes der sechzehn Grenztetraeder geht durch vier Punkte a_α, b_β, c_γ, d_δ, wo jede der Marken gleich 1 oder 2 ist. Demnach ist jedes Tetraeder durch die vier Marken α, β, γ, δ bestimmt und soll deshalb mit $(\alpha\beta\gamma\delta)$ bezeichnet werden. Um den Mittelpunkt des Sechzehnzells beschreibe ich eine Kugel, welche durch die acht Ecken geht; zudem errichte ich auf jeder Ebene $(\alpha\beta\gamma\delta)$ nach aufsen die Senkrechte. Diese trifft die Kugel in einem Punkte, welcher ebenfalls durch $(\alpha\beta\gamma\delta)$ bezeichnet werden soll. Ich setze noch fest, dafs $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = 3$ sein soll. Dann sind die Ebenen $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ parallel und deshalb die entsprechenden Punkte Gegenpunkte auf der Kugel.

Jede neue Lage, bei welcher das Sechzehnzell als Ganzes die Anfangslage deckt, kann erhalten werden durch ein- oder mehrmalige Drehung um eine durch zwei Durchmesser (etwa $\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_{\alpha'} \mathfrak{b}_\beta \mathfrak{b}_{\beta'}$) gelegte zweidimensionale Ebene. Bei einmaliger Drehung bleiben zwei Paare von Marken ungeändert. Zwei andere Marken vertauschen sich unter einander oder paarweise mit ihren Ergänzungsmarken. Entsprechendes mufs für jede Bewegung gelten, bei der das gegebene Sechzehnzell wieder in seine Anfangslage kommt. Dabei kann also die Ebene (1, 1, 1, 1) auf die Ebenen (1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2) zu liegen kommen, aber nicht zur Deckung mit (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 2), (2, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 2), (2, 2, 2, 1). Dabei vertauschen nur jedesmal die ersten acht Ebenen und ebenso die letzten acht Ebenen ihre Lage unter einander. Dasselbe gilt von den Punkten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Die sechzehn neu gefundenen Punkte zerfallen also in zwei Gruppen von je acht Punkten; nur die Punkte derselben Gruppe können ihre Lage unter einander vertauschen. Die Punkte einer Gruppe sind somit jedesmal die Eckpunkte eines regelmäfsigen Sechzehnzells. Wir sind daher zu drei Sechzehnzellen gelangt.

Jede Bewegung des ersten Sechzehnzells, durch welche dasselbe mit sich zur Deckung gelangt, hat eine entsprechende Bewegung der beiden andern zur Folge. Da aber die Zahl solcher Bewegungen für die drei Körper dieselbe ist und bei jeder Bewegung des einen die andern mitbewegt werden, so mufs auch bei jeder derartigen Bewegung des zweiten das erste und das dritte jedesmal wieder in die Anfangslage gelangen. Errichtet man daher auf den Tetraedern des zweiten Sechzehnzells die Senkrechten, so gehen acht von ihnen durch die Ecken des ersten und die acht andern durch die des dritten Sechzehnzells. Dasselbe gilt für den dritten Körper. Die vierundzwanzig Punkte bilden also auf der Kugel ein regelmäfsiges System, also die Ecken eines regelmäfsigen Körpers.

In diesem Körper gehen von a_α die Kanten nach denjenigen acht Punkten, welche den in ihm zusammenstofsenden Tetraedern entsprechen, also nach $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, $(\alpha, 2, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2, 2)$, $(\alpha, 2, 2, 2)$. Diese zerfallen in vier Paare $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 2, 2, 2)$ und $(\alpha, 1, 2, 2)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, sowie $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 2, 2, 1)$, endlich $(\alpha, 1, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 2)$. Dadurch werden wir auf zwölf Dreiecke und sechs Oktaeder geführt, welche vom Punkte a_α ausgehen; in den letzteren sind die Punkte b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 die Gegenpunkte; ein solches Oktaeder hat z. B. die Eckpunkte a_α, b_1, $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 2, 1)$, $(\alpha, 1, 2, 2)$. Das giebt den Satz: »Im vierdimensionalen Raume giebt es einen regelmäfsigen Körper, welcher von 24 Oktaedern begrenzt wird und dessen Grenze 96 Dreiecke, 96 Kanten und 24 Ecken enthält. Von jeder Ecke gehen sechs Oktaeder aus; sucht man zu einer Ecke in jedem davon ausgehenden Oktaeder den Gegenpunkt, so bilden diese sechs Punkte auch die Gegenpunkte für die von einem zweiten Punkte ausgehenden sechs Oktaeder, und zwar ist dieser Punkt im Vierundzwanzigzell Gegenpunkt des ersten. Die so gefundenen acht Punkte bilden für sich die Ecken eines regelmäfsigen Sechzehnzells; je zwei Ecken, die in diesem Sechzehnzell Gegenpunkte von einander sind, haben die gleiche Eigenschaft für das Vierundzwanzigzell; die andern sechs Punkte sind Gegenpunkte in Bezug auf jeden der beiden ersten in je einem Oktaeder, welches der Grenze des Vierundzwanzigzells angehört.«

Statt von dem Sechzehnzell konnten wir auch vom Achtzell (dem Analogon des Würfels) ausgehen, wie man schon daraus ersieht, dafs die sechzehn Punkte $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ die Ecken eines Achtzells sind.[36])

§ 14.

Geometrische Grundlage des n-dimensionalen Raumes.

In den drei letzten Paragraphen ist die Beweisführung ganz übereinstimmend mit der der gewöhnlichen Geometrie; auch die neu erhaltenen Sätze zeigen bis ins einzelne eine unverkennbare

Ähnlichkeit mit rein geometrischen Sätzen. Daher vergifst man ganz, dafs das Objekt der Untersuchung in einem analytischen Gebilde, der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit besteht. Es drängt sich somit die Frage auf, ob wir für diese Theorie nicht auch eine rein geometrische Grundlage gewinnen können. Um dieser Frage näher treten zu können, greifen wir auf die Darlegungen in den ersten Paragraphen dieses Abschnitts zurück.

Wie die Erfahrung lehrt, gelten folgende Gesetze: Wenn man einen Raumteil in zwei Teile zerlegt, so wird die gegenseitige Grenze durch eine Fläche oder durch mehrere Flächen gegeben; die Fläche kann wieder geteilt werden und die gegenseitige Grenze ist eine Linie oder besteht aus mehreren Linien; endlich kann die Linie wieder geteilt werden, und die Grenze wird durch einen oder durch mehrere Punkte gebildet; der Punkt ist unteilbar. Diese Sätze werden durch die Erfahrung mit vollster Sicherheit gegeben; wer sie leugnen will, setzt sich mit der Erfahrung in direkten Gegensatz.

Aber trotzdem ist die Frage berechtigt: Verlangen die Begriffe der Teilung und der Grenze, die hier vorkommen, dafs man gerade nach dreimaliger Ausführung des angegebenen Prozesses zum unteilbaren Gebilde gelangt, oder darf man annehmen, dafs die hier auftretende Zahl drei mit jeder andern Zahl gleichberechtigt ist, wofern man vom Raum in seiner eigentlichen Bedeutung absieht und nur die Zerlegung in zwei Teile und die gegenseitige Grenze der beiden Teile berücksichtigt? Ehe wir hierauf eine endgültige Antwort geben, führen wir eine neue Bezeichnung ein. Wir gehen von irgend einem Gebilde aus, zerlegen es in zwei Teile und bezeichnen ihre gegenseitige Grenze als Grenzgebilde erster Ordnung. Wenn das Grenzgebilde wieder teilbar ist und irgend zwei Teile, in die es zerlegt werden kann, eine gegenseitige Grenze haben, so möge die neue Grenze ein Grenzgebilde zweiter Ordnung genannt werden. In gleicher Weise gehen wir weiter, bis wir zum unteilbaren Grenzgebilde gelangen. Für den Raum im wahren Sinne ist das Grenzgebilde erster Ordnung die Fläche, das Grenzgebilde zweiter Ordnung die Linie und die Grenze dritter Ordnung der Punkt. Nun könnte man fragen: Läfst sich der Teilung ein Gebilde zu Grunde legen, für das der angegebene Prozefs niemals zum unteilbaren Grenzgebilde führt, wie oft er auch wiederholt wird? Indessen soll uns diese Frage nicht beschäftigen; wir fragen nur, ob das Grenzgebilde n^{ter} Ordnung unteilbar ist, wo n nicht gleich drei angenommen wird, sondern irgend eine andere ganze Zahl sein soll.

Jetzt betrachten wir wieder die Gesamtheit der Wertsysteme, die durch n variabele Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n$ gebildet werden können. Ihre Mannigfaltigkeit kann in der verschiedensten Weise so in zwei Klassen zerlegt werden, dafs die beiden Klassen eine gegenseitige Grenze besitzen. Dadurch gelangt man zum Grenzgebilde erster Ordnung, das wieder zerlegt werden kann. Führt man diesen Prozefs weiter aus, so wird das Grenzgebilde n^{ter} Ordnung ein einzelnes Wertsystem, also unteilbar sein. Man kann sich auch von vornherein auf einen stetigen endlichen Bereich beschränken; so kann man nur diejenigen Wertsysteme betrachten, für welche alle Variabeln positiv und kleiner als eins sind; oder man setzt fest, dafs für die zu betrachtenden Wertsysteme der Wert des Ausdrucks $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2$ eine gegebene Gröfse a^2 nicht übersteigt. Die Wertsysteme eines solchen Bereiches teile man in zwei Klassen; dann giebt es Wertsysteme, die je nach der getroffenen Festsetzung beiden Klassen zugleich angehören oder von beiden Klassen auszuschliefsen sind; ihre Gesamtheit bildet das Grenzgebilde erster Ordnung. Dieses Gebilde kann man wieder teilen und dann den Prozefs wiederholen, bis man nach n-maliger Teilung zu einzelnen Wertsystemen gelangt.

Indessen sind die analytischen Mannigfaltigkeiten durchaus nicht die einzigen Gebilde, mit denen der angegebene Prozefs durchgeführt werden kann; der Raum selbst bietet Beispiele, für die die oben angegebene Zahl n sowohl gröfser wie kleiner als drei ist. Jede Fläche kann geteilt werden; für sie ist das Grenzgebilde erster Ordnung eine Linie, das Grenzgebilde zweiter Ordnung unteilbar. Nach Plückers Vorgange darf man aber irgend ein Raumgebilde als Element auffassen; schon sehr früh führte er die Ebene und in seinem letzten grofsen Werke die gerade Linie als Raumelement ein. Betrachten wir aber die Gesamtheit der Geraden des Raumes, so wird erst das Grenzgebilde vierter Ordnung unteilbar. Wir betrachten z. B. eine Gerade als der einen oder andern Klasse angehörig, je nachdem ihr Abstand von einem festen Punkte gröfser oder kleiner ist als eine bestimmte

Länge. Dann wird das Grenzgebilde erster Ordnung durch die Tangenten an eine Kugel gebildet. Diese Tangenten zerlegen wir wieder in zwei Gruppen, etwa durch die Festsetzung, daſs die Geraden der einen Gruppe innerhalb und die der andern auſserhalb eines gewissen Kreises berühren sollen. Hiernach besteht das Grenzgebilde zweiter Ordnung aus denjenigen Tangenten, deren Berührungspunkte der gewählten Kreislinie angehören. Nun läſst sich der Kreis in zwei Teile zerlegen; man kann also zwischen den Tangenten unterscheiden, die den einen oder andern Teil treffen. Dadurch erhalten wir zwei Grenzgebilde dritter Ordnung, von denen jedes aus einem Büschel von Geraden besteht. Erst die vierte Teilung, die des Büschels, führt zu einzelnen Geraden.

Ebenso bietet die Gesamtheit der Kugeln des Raumes, sowie die der in parallelen Ebenen gelegenen Kreise jedesmal eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, während für die Gesamtheit aller Kreise des Raumes der Teilungsprozeſs nach der angegebenen Regel sechsmal ausgeführt werden muſs, ehe er zum unteilbaren Gebilde führt.

Indessen so wichtig eine derartige Auffassung für manche Untersuchungen ist, im allgemeinen dürfte es für die Theorie am geeignetsten sein, n variabele Gröſsen zu Grunde zu legen. Selbst bei einem solchen Ausgange ist es in manchen Fällen gestattet oder sogar geboten, den Punkt im uneigentlichen Sinne von dem Wertsysteme noch in etwa zu unterscheiden. Es kann nämlich vorkommen, daſs man in den hergeleiteten Sätzen verschiedene Wertsysteme als identisch auffassen oder umgekehrt bei demselben Wertsysteme noch den (analytischen) Weg beachten muſs, auf dem man von einem gegebenen Wertsysteme aus zu ihm gelangt. Eine derartige Forderung wird durch die Analysis selbst gestellt. Denn wie bereits früher (S. 210) erwähnt wurde, besteht die analytische Behandlung darin, die einzelnen Wertsysteme mit einander in Beziehung zu setzen. Bei diesem Prozeſs kann es aber vorkommen, daſs man verschiedene Wertsysteme als identisch auffassen oder an demselben Wertsysteme noch Unterschiede anbringen muſs, wenn man jener Zuordnung der Wertsysteme zu einander die Eigenschaften der geometrischen Kongruenz (Deckung) beilegen will. Auch müssen die Sätze, zu denen man gelangt, doch von den benutzten Variabeln unabhängig sein; bei der Einführung neuer Gröfsen wird aber die eindeutige Beziehung im allgemeinen nicht für das ganze Gebiet bestehen. Definieren wir n von einander unabhängige Gröfsen $y_1 \ldots y_n$ als Funktionen von $x_1 \ldots x_n$, so müssen die Wertsysteme der $(y_1 \ldots y_n)$ denen der $(x_1 \ldots x_n)$ so lange eindeutig entsprechen, als man in einem gewissen endlichen Gebiete bleibt: aber bei der Erweiterung des Gebietes ist es möglich, dafs zu demselben Wertsysteme $(x_1 \ldots x_n)$ verschiedene Wertsysteme $(y_1 \ldots y_n)$ gehören. Führen wir z. B. an Stelle der Variabeln x_1 und x_2 die Gröfsen y_1 und y_2 durch die Gleichungen ein:

$$x_1 = y_1 \cos y_2, \; x_2 = y_1 \sin y_2,$$

so entsprechen jedem Wertsysteme (x_1, x_2) unendlich viele Wertsysteme (y_1, y_2).

Demnach dürfte es angebracht sein, die Untersuchung zunächst auf ein endliches Gebiet von Wertsystemen zu beschränken und für die Erweiterung die Frage zu stellen: Ist es geboten oder auch nur gestattet, verschiedene Wertsysteme als identisch aufzufassen oder bei demselben Wertsysteme noch eine Verschiedenheit anzunehmen, wofern für jedes endliche Gebiet, das gewisse Grenzen nicht überschreitet, dieselben Sätze gelten sollen, die für das zuerst gewählte Gebiet gewonnen sind? In dem hier entwickelten Sinne werden zuweilen demselben Punkte verschiedene Wertsysteme und in andern Fällen demselben Wertsysteme verschiedene Punkte zugeordnet.

Beispiele ergeben sich bereits durch die vorangehenden Entwicklungen. So hätte es nahe gelegen, die projektive Geometrie des n-dimensionalen Raumes unter Anwendung von n von einander unabhängigen Gröfsen $y_1 \ldots y_n$ zu behandeln. Thut man das und benutzt die einfachsten Variabeln, nämlich diejenigen, für welche sich die Beziehung der Wertsysteme zu einander durch gebrochene lineare Funktionen darstellt, so ist man genötigt, die unendlich grofsen Werte der Variabeln ebenso zu behandeln, wie die endlichen Werte, und dem Wertsystem $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \infty$ eine $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zuzuordnen. Diese Erwägung hat darauf geführt, $n+1$ Variabele $x_0, x_1 \ldots x_n$ durch die Gleichungen:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_0} \cdots y_n = \frac{x_n}{x_0}$$

einzuführen und die Verhältnisse der Gröfsen x_0, $x_1 \ldots x_n$ der Untersuchung zu Grunde zu legen. Für eine dreidimensionale elliptische Raumform bestimmten wir in I § 21 (S. 71) die Lage eines jeden Punktes durch vier Gröfsen p, x, y, z, zwischen denen eine gewisse Beziehung festgestellt wurde; hierbei müssen wir in der Kleinschen Raumform den beiden Wertsystemen (p, x, y, z) und (—p, —x, —y, —z) denselben Punkt zuordnen. Andererseits ist die Lage eines Punktes durch die Verhältnisse der vier Gröfsen p, x, y, z bestimmt; dabei entsprechen im Riemannschen Raume jedem System der Verhältnisse zwei verschiedene Punkte.

Hiernach ist es klar, was wir unter dem Raume im allgemeinsten Sinne zu verstehen haben. Es sei möglich, irgend eine Mannigfaltigkeit in zwei Teile zu zerlegen, die eine gegenseitige Grenze haben; dieser Prozefs lasse sich wiederholen, bis er nach n-maliger Ausführung das unteilbare Gebilde, das Element, liefert. Für diese Mannigfaltigkeit soll ein Gesetz bestehen, nach welchem die einzelnen Elemente auf andere Elemente bezogen werden können. Jedes System von Begriffen und Urteilen, das sich auf einer solchen Grundlage aufbauen läfst, soll eine Raumform im allgemeinen Sinne genannt werden.

Wenngleich diese Nomenklatur zum mindesten recht geeignet ist, Sätze der Analysis bequem auszusprechen, wenn sie sogar aus Gründen, die wir später entwickeln werden, geradezu geboten erscheint, so ist sie doch nicht frei von Bedenken, da dieselben Worte in einem ganz verschiedenen Sinne gebraucht werden. Nun ergiebt sich der Sinn, der mit den Worten: Punkt, Grenzgebilde u. s. w. verbunden werden soll, unmittelbar, sobald man weifs, in welchem Sinne das Wort Raum gebraucht wird. Natürlich geht in den meisten Fällen aus dem Zusammenhang deutlich hervor, ob man dies Wort seiner wahren Bedeutung nach oder in uneigentlichem Sinne benutzt. Wo das nicht der Fall ist, wird es gestattet sein, den »Erfahrungsraum« in Gegensatz zu einem uneigentlichen Raume zu stellen, ohne dafs durch dies Wort über die Theorie des Raumes in philosophischer Hinsicht geurteilt werden soll.

Die eigentliche Geometrie gebraucht außer der Teilung noch weitere Voraussetzungen, die wir bisher allerdings einer Prüfung noch nicht haben unterziehen können, von denen man aber unmittelbar ersieht, daſs sie keineswegs aus dem Begriff der Teilung hervorgehen. Um daher diejenigen Raumformen zu erhalten, welche in den letzten Paragraphen als analytische Mannigfaltigkeiten behandelt worden sind, müssen wir auch für den n-dimensionalen Raum besondere Voraussetzungen machen. Natürlich kann hier nicht der Ort sein, sie auf ihre geringste Zahl zurückzuführen; es genügt zu zeigen, daſs wir bei ihrer Aufstellung nicht auf die Analysis angewiesen sind.

Um z. B. für die projektive Geometrie, wie sie in § 7 entwickelt ist, eine Grundlage zu gewinnen, machen wir folgende Annahmen:

In einem n-dimensionalen Raume giebt es ein System von Linien, Flächen, drei- bis (n—1)-dimensionalen Gebilden E_1, E_2, $E_3 \ldots E_{n-1}$ von folgender Eigenschaft: Durch irgend zwei Punkte geht eine und nur eine einzige Linie E_1 des Systems; durch jede Linie E_1 des Systems und einen ihr nicht angehörenden Punkt läſst sich eine einzige Fläche E_2 des Systems legen; dieser Prozeſs soll fortgesetzt werden können, so daſs durch jedes μ-dimensionale Gebilde E_μ des Systems und einen nicht in ihm gelegenen Punkt ein einziges $(\mu + 1)$-fach ausgedehntes Gebilde $E_{\mu+1}$ des Systems geht, wo wir unter μ jede Zahl zu verstehen haben, die kleiner ist als $n-1$. Nun werden die Punkte so auf einander bezogen, daſs die sämtlichen Systeme von Gebilden ungeändert bleiben; es soll also für jedes μ jede E_μ wieder in eine E_μ übergehen. Von diesen Voraussetzungen aus kann man, ähnlich wie im zweiten Abschnitt für $n = 2$ und $n = 3$, jür jedes beliebige n diejenigen Koordinaten entwickeln, von denen wir in § 7 ausgegangen sind. Man kann aber auch durch Beschränkungen, wie sie in II § 11 (S. 157 ff.) angegeben sind, von der Projektivität zur Metrik gelangen.

Ein anderes System von Voraussetzungen, das sich in § 8 durch Rechnung aus einer einfachen analytischen Festsetzung ergeben hatte, wurde im Beginn von § 11 aufgestellt. Diese Annahmen entsprechen ganz den von Euklid gemachten. Auch haben wir hieraus bereits in den §§ 11 und 13 für eine beliebige

Zahl und in § 12 für die Vierzahl der Dimensionen weitere Folgerungen gezogen auf einem Wege, der ganz mit dem in der Geometrie gebräuchlichen übereinstimmt.

Um jedoch die nicht-euklidischen Raumformen einzuschliefsen, ersetzen wir die letzte Voraussetzung des § 11 (S. 218) durch die folgende:

In einem allseitig begrenzten Bereich einer jeden dreidimensionalen Ebene bestehen die Gesetze, welche Euklid für den Raum voraussetzt, natürlich mit Ausschlufs der Unendlichkeit der Geraden und des Parallel-Axioms.

Hier wird also die Existenz der Geraden und der Ebenen von zwei bis $n-1$ Dimensionen ebenso vorausgesetzt, wie in der allgemeinen Projektivität, und die neu hinzukommende Annahme ermöglicht den Übergang zur Metrik. Übrigens kann man die letzte Voraussetzung durch das Postulat des Kreises ersetzen, oder man kann für gerade Strecken den Begriff der Gleichheit postulieren und annehmen, die Endpunkte gleicher Strecken, die in einer zweidimensionalen Ebene von einem Punkte ausgehen, lägen in einer geschlossenen Linie.

In diesen Voraussetzungen tritt die Beziehung zur Analysis ganz zurück. Es erübrigt jetzt also nur noch, die analytischen Gesetze herzuleiten, von denen wir in § 8 für einen euklidischen und in § 9 für einen nicht-euklidischen Raum ausgegangen sind.

Dabei gebraucht man diejenigen Formeln, die in den §§ 24 und 25 des ersten Abschnitts (S. 80 ff.) und auf anderem Wege im zweiten Abschnitt hergeleitet sind. Wie wir dort gezeigt haben, gelten für das Dreikant stets die Formeln der sphärischen Trigonometrie, während die Beziehung zwischen den Seiten und Winkeln eines ebenen Dreiecks durch drei verschiedene Formelsysteme angegeben wird, die man durch Einführung einer gewissen Konstanten k^2 einheitlich darstellen kann.

Zudem bedarf man einige wenige von den in § 11 bewiesenen Sätzen, namentlich diejenigen, durch welche der Winkel bestimmt wird, den eine Gerade mit einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene bildet oder unter dem zwei derartige Ebenen zu einander geneigt sind. Nur ist es notwendig, diese Sätze ohne Anwendung der Parallelentheorie zu beweisen.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht schwer, eine analytische Theorie der so definierten Raumformen zu begründen. Man lege durch einen festen Punkt O n auf einander senkrecht stehende (n—1)-dimensionale Ebenen E^1, $E^2 \ldots E^n$. Auf diese Ebenen seien von zwei beliebigen Punkten P und P' des Raumes Senkrechte gefällt; die n vom Punkte P ausgehenden Senkrechten seien mit a_1, $a_2 \ldots a_n$ bezeichnet, während vom Punkte P' die Senkrechten a_1', $a_2' \ldots a_n'$ ausgehen mögen. Der Winkel, den zwei von demselben Punkte ausgehende Gerade mit einander bilden, möge durch Nebeneinanderstellen der Linien bezeichnet werden. Die Längen OP und OP' seien l und l' und der Winkel (ll') sei gleich φ. Die Ebenen E^2, $E^3 \ldots E^n$ haben eine Gerade g gemeinschaftlich; der Neigungswinkel der zweidimensionalen Ebenen (gl) und (gl') sei φ_1, und die von P und P' auf die Gerade g gefällten Senkrechten mögen mit l_1 und l_1' bezeichnet werden. Dann gilt die Beziehung:

$$\cos\varphi = \cos(lg)\cos(lg') + \sin(lg)\sin(lg')\cos\varphi_1 .$$

Da die Geraden g und a_1 auf der Ebene E^1 senkrecht stehen und deshalb in einer zweidimensionalen Ebene liegen, so ist der Winkel (lg) das Komplement des Neigungswinkels der Geraden l gegen die Ebene E^1; somit ist unter Benutzung der früher eingeführten Gröfse k^2:

$$\sin\frac{l}{k}\cos(lg) = \sin\frac{a_1}{k} .$$

Hiernach nimmt die vorstehende Gleichung die Form an:

$$\sin\frac{l}{k}\sin\frac{l'}{k}\cos\varphi = \sin\frac{a_1}{k}\sin\frac{a_1'}{k} + \sin\frac{l_1}{k}\sin\frac{l_1'}{k}\cos\varphi_1 .$$

Eine durch l_1 und g gelegte zweidimensionale Ebene schneidet die E^1 in einer Geraden. die auf g senkrecht steht. Auf derselben begrenze man ein Stück $OP_1 = l_1$ und bezeichne es der Gröfse und Lage nach durch λ_1. Dann sind die von P_1 auf die Ebenen E^2, $E^3 \ldots E^{n-1}$ gefällten Senkrechten gleich den entsprechenden von P gefällten Senkrechten, also gleich a_2, $a_3 \ldots a_n$. Ebenso bestimme man in der Schnittlinie von E^1 mit der durch g und l_1' gelegten zweidimensionalen Ebene einen Punkt P_1' so dafs die Strecke OP_1', die mit λ_1' bezeichnet werden möge, gleich l_1' ist. Dann sind die Abstände des Punktes P_1' von den Ebenen E^2, $E^3 \ldots E^n$ der Reihe nach gleich a_2', $a_3' \ldots a_n'$, und die

Geraden λ_1 und λ_1' bilden den Winkel φ_1 mit einander. In der Ebene E_1 schneiden sich die Ebenen $E^3 \ldots E^n$ in einer Geraden g_1. Indem man auf das durch die Geraden g_1, λ_1 und λ_1' bestimmte Dreikant den Cosinussatz anwendet, die von P_1 und P_1' auf g_1 gefällten Senkrechten mit l_2 und l_2', und den von den Ebenen $(g_1 \lambda_1)$ und $(g_1 \lambda_1')$ gebildeten Winkel mit φ_2 bezeichnet, erhält man auf dem oben angegebenen Wege die Relation:

$$\sin\frac{l_1}{k}\sin\frac{l_1'}{k}\cos\varphi_1 = \sin\frac{a_2}{k}\sin\frac{a_2'}{k} + \sin\frac{l_2}{k}\sin\frac{l_2'}{k}\cos\varphi_2.$$

Nun lassen sich in der Schnittebene von E^1 und E^2 von O aus zwei Strecken OP_2 und OP_2' gleich l_2 und l_2' abtragen, die mit einander den Winkel φ_2 bilden und deren Endpunkte P_2 und P_2' von den Ebenen $E^3 \ldots E^n$ die Abstände $a_3 \ldots a_n$, bez. $a_3' \ldots a_n'$ haben. Dann drücken wir das Produkt $\sin\frac{l_2}{k}\sin\frac{l_2'}{k}\cos\varphi_2$ in entsprechender Weise aus und gelangen, indem wir auf demselben Wege fortfahren, schliefslich zu der Gleichung:

$$(1)\ \sin\frac{l}{k}\sin\frac{l'}{k}\cos\varphi = \sin\frac{a_1}{k}\sin\frac{a_1'}{k} + \sin\frac{a_2}{k}\sin\frac{a_2'}{k} + \ldots + \sin\frac{a_n}{k}\sin\frac{a_n'}{k}.$$

Diese Beziehung mufs noch bestehen, wenn die Punkte P und P' zusammenfallen, oder es mufs sein:

$$(2)\ \sin^2\frac{l}{k} = \sin^2\frac{a_1}{k} + \sin^2\frac{a_2}{k} + \ldots + \sin^2\frac{a_n}{k}.$$

Um jetzt die Koordinaten eines Punktes P zu bestimmen, setze man:

$$(3)\ \cos\frac{l}{k} = x_0,\ k\sin\frac{a_1}{k} = x_1 \ldots k\sin\frac{a_n}{k} = x_n.$$

Dann folgt aus der Gleichung (2):

$$(4)\ k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = k^2.$$

Indem man dieselbe Festsetzung für den Punkt P' trifft und die Entfernung e der beiden Punkte P und P' durch die Gleichung darstellt:

$$\cos\frac{e}{k} = \cos\frac{l}{k}\cos\frac{l'}{k} + \sin\frac{l}{k}\sin\frac{l'}{k}\cos\varphi,$$

erhält man unter Benutzung der Gleichungen (2) und (3) die Beziehung:

$$(5)\ k^2\cos\frac{e}{k} = k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n'.$$

Die Gleichungen (4) und (5) sind es, von denen wir in § 9 ausgegangen sind. Für ein unendlich grofses k^2 wird $x_0 = 1$, $x_1 = a_1 \ldots x_n = a_n$, und die Gleichung (5) geht unter Berücksichtigung von (2) über in:

$$(6)\quad e^2 = (x_1 - x_1\ )^2 + \ldots (x_n - x_n')^2;$$

wir erhalten also diejenige Beziehung, die wir in § 8 zu Grunde gelegt haben.

§ 15.

Rückblick.

Die Untersuchungen dieses Abschnitts sind nach zwei Richtungen hin von Wichtigkeit. Einmal geben sie den Weg an, der zu den Grenzgebilden führt, und weisen darauf hin, dafs zu diesem Zwecke die Teilung benutzt werden mufs. Da unsere Untersuchungen hierüber jedoch noch nicht zum Abschlufs gebracht werden konnten, wenden wir uns dem zweiten Resultat zu, das uns der vorliegende Abschnitt gelehrt hat, und das in dem Nachweis gipfelt, dafs die mehrdimensionale Geometrie, obwohl sie der Erfahrung widerstreitet, begrifflich als möglich bezeichnet werden mufs.

Zum mehrdimensionalen Raume kann man auf verschiedenen Wegen gelangen. Grafsmanns Ausdehnungslehre will eine Wissenschaft darstellen, in welcher die Geometrie als besonderer Zweig enthalten ist und in der die Lehrsätze nicht jenen Schranken unterliegen, die der Raum durch die Dreizahl der Dimensionen steckt. Das Ziel soll dadurch erreicht werden, dafs unabhängig von der Erfahrung gewisse allgemeine Begriffe gebildet werden, mit denen ganz wie mit den Begriffen der Geometrie operiert werden kann. Diese Theorie ist lange unbeachtet geblieben und hat daher nicht jenen Einflufs ausgeübt, der ihrer Bedeutung entspricht. Dagegen hat die Analysis allmählich zur mehrdimensionalen Geometrie gedrängt. Analytische Probleme, die für zwei oder drei Variabele durch die Geometrie gestellt werden, müssen auf eine gröfsere Zahl von veränderlichen Gröfsen übertragen werden (§ 6). Benutzt man hierbei die Sprache der Geometrie als bequemen Ausdruck für Gesetze der Analysis, so tritt eine merkwürdige Übereinstimmung in den Resultaten zu Tage: man spricht Gesetze der Analysis genau so aus, wie Sätze der Geometrie

(§ 7—10). Diese Ähnlichkeit in den Ergebnissen kann auch in der Beweisführung herbeigeführt werden (§ 11—13): man legt analytische Mannigfaltigkeiten zu Grunde, leitet aus einer einfachen Voraussetzung durch Rechnung Folgerungen her, die bekannten geometrischen Sätzen entsprechen, und kann jetzt ein Beweisverfahren einschlagen, das voll und ganz mit der Methode der Geometrie übereinstimmt. So ist man einer Wissenschaft immer näher gekommen, die in übertragenem Sinne als Raumlehre bezeichnet werden kann. Es fragt sich nur, ob man sich nicht auch davon unabhängig machen kann, dafs der Gegenstand der Untersuchung und die Grundlagen, auf denen der Weiterbau möglich ist, durch die Analysis gegeben werden. Diese Frage haben wir in § 14 einer vorläufigen Prüfung unterzogen und sind einer rein geometrischen Grundlage wenigstens näher gekommen. Umgekehrt haben wir von gewissen geometrischen Sätzen aus analytische Formeln hergeleitet, vermittelst deren die Theorie der mehrdimensionalen Raumformen entwickelt werden kann. Hiernach liefert die Durchführung eines einfachen analytischen Prozesses alle Sätze des mehrdimensionalen Raumes; ein innerer Widerspruch ist also vollständig ausgeschlossen.

Natürlich kann es nicht fehlen, dafs manche Sätze des dreidimensionalen Raumes bei ihrer Übertragung auf eine gröfsere Zahl von Dimensionen wesentliche Veränderungen erleiden; aber eine blofse Abweichung von bekannten Sätzen darf nicht als ein Beweis für die Unmöglichkeit einer mehrdimensionalen Geometrie angesehen werden. Auch die Geometrie von zwei Dimensionen ist in mancher Hinsicht von der des dreidimensionalen Raumes wesentlich verschieden; ich erinnere nur daran, dafs regelmäfsige Polygone von jeder Seitenzahl existieren, während die regelmäfsigen Körper nur in beschränkter Anzahl möglich sind. Es ist also nicht gestattet zu verlangen, dafs die geometrischen Lehren für jede Zahl von Dimensionen ungeändert bleiben.[37])

Von mancher Seite ist grofses Gewicht auf die Thatsache gelegt worden, dafs durch den Erfahrungsraum selbst mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten geliefert werden, wofern man nicht den Punkt, sondern gewisse andere Gebilde als Elemente betrachtet. Wie mir scheint, ist die Bedeutung dieses Umstandes jedoch vielfach überschätzt worden. Wenn man z. B. geglaubt hat, jeden andern Zugang zur mehrdimensionalen Geometrie entbehren zu können, so mufs eine solche Ansicht als unrichtig bezeichnet werden. Nur so lange es sich um die Teilung und um die Erzeugung der Grenzgebilde handelt, genügen die Mannigfaltigkeiten der bezeichneten Art. Sobald es sich aber um die Art und Weise handelt, nach der die Elemente auf einander bezogen werden sollen, treten meistens Besonderheiten ein, durch welche die weiteren, für den Aufbau unentbehrlichen Voraussetzungen wesentlich beeinflufst werden. Nimmt man z. B. die gerade Linie als Raumelement, so gelangen wir allerdings zu einer vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; aber durch das einzelne Element ist bereits ein dreidimensionales Gebilde bestimmt, nämlich die Gesamtheit aller geraden Linien, die von der gegebenen Linie geschnitten werden. Will man also die geraden Linien des Raumes auf einander beziehen, so mufs das in der Weise geschehen, dafs auch jedesmal die angegebenen dreidimensionalen Gebilde auf einander bezogen werden. In ähnlicher Weise bildet die Gesamtheit der Kreise in der Ebene eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit; aber sobald ein Kreis gewählt ist, wird durch ihn auch die Gesamtheit der ihn berührenden Kreise, also eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, bestimmt; zudem zerfallen die sämtlichen Kreise in zwei Gruppen in der Art, dafs die Kreise der einen Gruppe den gegebenen Kreis schneiden, die der andern Gruppe keinen Punkt mit ihm gemeinschaftlich haben. Solche Besonderheiten werden aber fast regelmäfsig auftreten. Aus diesem Grunde scheint es nicht möglich zu sein, den vierdimensionalen euklidischen Raum dadurch zu versinnlichen, dafs man ein Gebilde des Erfahrungsraumes als Element einer vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit wählt.

Die Dreizahl der Dimensionen wird durch jede Erfahrung bestätigt; es ist deshalb nicht nötig, zum Beweise mit Kant noch auf Newtons Gravitationsgesetz hinzuweisen, da, wie Benno Erdmann hervorhebt, bei dem Versuche, dies Gesetz als notwendig nachzuweisen, die Gültigkeit von Sätzen angenommen werden mufs, die nicht unbestreitbar sind. Dagegen kann die Notwendigkeit dreier Dimensionen nicht aus dem Begriffe einer Teilbarkeit, bei der die Teile in Zusammenhang mit einander stehen, hergeleitet werden. Dies Resultat, das aus den durchgeführten

Entwicklungen hervorgeht, scheint mir von aufserordentlicher Wichtigkeit zu sein. Dagegen glaube ich nicht weiter gehen zu dürfen, und jeden Versuch, einen mehrdimensionalen Raum als existierend oder auch nur als mit der Erfahruug vereinbar hinstellen zu sollen, glaube ich mit Entschiedenheit zurückweisen zu müssen. Es sei gestattet, einen Blick auf die Gründe zu werfen, die man für Vier- oder Mehrzahl der Dimensionen glaubt beibringen zu können.

Die Art und Weise, in der Herr von Helmholtz die Möglichkeit einer gröfseren Zahl von Dimensionen mit unserer Anschauung vereinigen will, ist mir trotz redlichsten Bemühens nie klar geworden; ich mufs daher davon Abstand nehmen, seine Theorie zu besprechen.

Auf anderer Seite sagt man: Wenn zwei Körper in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen, so müssen sie auch zur Deckung gebracht werden können; zwei Körper, die zu einer Ebene symmetrisch liegen, dürfen trotz einer solchen Übereinstimmung nicht als kongruent betrachtet werden, so lange man den Raum als dreidimensional voraussetzt; also mufs man eine vierfache Ausdehnung des Raumes annehmen, um die Deckung zu ermöglichen. Allerdings mufs man einem Teil des hier ausgesprochenen Gedankens beistimmen. Schon wenn zwei Dreiecke in den Seiten und Winkeln übereinstimmen und mit einer Seite in derselben Ebene an einander liegen, so werden sie, wofern beide ungleichseitig sind, nicht zur Deckung gebracht werden können durch eine Bewegung, bei der beide in der Ebene verbleiben; aber die Drehung des einen Dreiecks um die gemeinschaftliche Seite genügt, die Deckung herbeizuführen; jedoch verläfst hierbei das Dreieck seine Ebene und bewegt sich im dreidimensionalen Raume. Ebenso können zwei Gebilde einer dreidimensionalen Ebene, die in einem vierfach ausgedehnten Raume liegen und in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen, durch eine Bewegung in diesem Raume stets zur Deckung gebracht werden. Wäre also der Erfahrungsraum eine Ebene in einem mehrdimensionalen Raume, so würde für unsern Raum der Unterschied zwischen kongruenten und sog. symmetrischen Körpern wegfallen. Aber damit ist wesentlich nichts gewonnen. Denn jetzt können vierdimensionale Gebilde in ihrer Gestalt und Gröfse übereinstimmen, ohne kongruent zu sein. Wie grofs man auch die Zahl der Dimensionen annehmen mag, niemals wird der Begriff der Kongruenz identisch sein mit dem Begriff der Übereinstimmung in allen Gröfsenbeziehungen; es ist also gar nicht gestattet, die Identität der beiden Begriffe zu verlangen.

Endlich beruft man sich auf Experimente, welche angeblich gemacht sind und welche im dreidimensionalen Raume nicht ausgeführt werden können, während sie in einem Raume von mehr Dimensionen ganz einfacher Natur sind. Die erste Aufgabe besteht darin, einen Körper aus einem allseitig verschlossenen Raum zu entfernen, ohne dafs der Verschlufs aufgehoben wird. Denken wir z. B. ein Schrotkorn in eine Hohlkugel eingeschlossen, so soll das Korn daraus entfernt werden, ohne dafs eine Öffnung in die Kugel gemacht wird. Diese Aufgabe ist im dreidimensionalen Raume nicht löslich; aber die Lösung ist ganz einfach, wenn die Kugel einem vierdimensionalen Raume angehört. Denn gleichwie die Kreislinie wohl zwei Teile einer Ebene von einander trennt, aber nicht zwei Raumteile gegen einander abgrenzen kann, so ist auch die zweidimensionale Kugelfläche nicht die Grenze für Teile eines vierdimensionalen Raumes. Man kann aus dem Innern einer Kreisfläche in das Äufsere gelangen, wenn man den Weg durch den Raum wählt; ebenso müfste man aus dem Innern einer Kugel herauskommen können, wenn der Raum vierdimensional wäre. Genau so verhält es sich mit einer zweiten Aufgabe: In einem Faden ist ein Knoten angebracht und dann sind die Enden fest mit einander verbunden; man soll den Knoten lösen, ohne den Faden zu zerreifsen. Könnte man hierbei einem Teil des Bandes gestatten, in einen vierdimensionalen Raum hinüberzugehen, so würde sich bei passender Wahl des Teiles und seiner Bewegung die Aufgabe lösen lassen. Nun haben einige geglaubt, beide Probleme seien in der That mehrmals gelöst worden; deshalb haben sie zur Erklärung die Annahme vorgeschlagen, der Raum sei vierdimensional. Aber vorläufig ist es doch gewifs gestattet, an der Richtigkeit der Angaben zu zweifeln; jedenfalls war bei den betreffenden Experimenten ein klarer Einblick in die Vorbereitungen und in den ganzen Verlauf der Versuche nicht möglich, und schon aus diesem Grunde darf man die Versuche nicht zur Grundlage einer neuen Theorie machen. Da diese neue Theorie zudem den stärksten Bedenken unterliegt, ja allen Beobachtungen direkt widerspricht, müssen an die zu ihrer Begründung dienenden Versuche die weitgehendsten Bedingungen gestellt werden, und so lange diese Bedingungen nicht vollständig erfüllt sind, mufs man, wenn man einen Betrug nicht annehmen will, die Sache ohne Erklärung auf sich beruhen lassen.[38])

Vierter Abschnitt.

Die Clifford-Kleinschen Raumformen.

§ 1.

Die Geometrie auf den abwickelbaren Flächen des euklidischen Raumes.

Schon im sechsten Paragraphen des ersten Abschnittes (S. 10) haben wir auf die sogenannten abwickelbaren Flächen des euklidischen Raumes hingewiesen. Wir verstehen darunter diejenigen Flächen, welche durch bloſse Biegung, aber ohne Dehnung und Kürzung in eine Ebene (oder wenigstens in ein ebenes Flächenstück) umgewandelt werden können. Bei dieser Operation bleibt die Länge einer jeden Linie, die Gröſse eines jeden Winkels und jeder Fläche ungeändert. Dabei gehen die kürzesten Linien der Fläche in die geraden Linien auf der Ebene über; wählt man nämlich auf der Fläche zwei Punkte und läſst durch sie die kürzeste Linie und beliebige andere Linien begrenzt sein, so behalten alle diese Linien beim Abwickeln ihre Länge bei; somit verwandelt sich die kürzeste Linie der Fläche in die kürzeste Linie der Ebene, also in eine Gerade.

Wir können uns auch in folgender Weise ausdrücken: Eine Fläche heiſst auf eine Ebene abwickelbar, wenn man den Punkten der Fläche die Punkte der Ebene so zuordnen kann, daſs jeder auf der Fläche verlaufenden Linie eine gleich groſse Linie in der Ebene entspricht; dann werden, wie sich leicht zeigen läſst, sowohl entsprechende Winkel als auch entsprechende Flächen jedesmal gleich groſs sein.

Wie die Mathematik zeigt, enthält jede abwickelbare Fläche eine Schar von geraden Linien, die als die Erzeugenden der

Fläche bezeichnet werden und die entweder sämtlich parallel sind oder sämtlich durch denselben Punkt gehen oder sämtlich Tangenten an eine Raumkurve sind; im letzten Falle ist die Kurve eine Rückkehrkante der Fläche. Umgekehrt bilden die Tangenten einer jeden Raumkurve die Erzeugenden einer developpabeln Fläche.

Der Einfachheit wegen betrachten wir im folgenden hauptsächlich diejenigen abwickelbaren Flächen, deren Erzeugende entweder sämtlich zu einander parallel sind oder sich in demselben Punkte schneiden. Auch legen wir zunächst nur spezielle Gebilde zu Grunde; dabei wählen wir zwei Arten mit parallelen Erzeugenden, schieben aber, um das Wesen der Sache deutlicher hervortreten zu lassen, zwischen beide Arten gewisse Kegel ein. Zur Erzeugung der ersten Art legen wir eine ebene Kurve zu Grunde, die ins Unendliche verläuft und weder Doppel- noch Rückkehrpunkte besitzt; längs dieser Kurve lassen wir eine Gerade, die nicht in die Ebene der Kurve hineinfällt, sich so bewegen, dafs sie stets ihrer Anfangslage parallel bleibt. Speziell errichten wir in den Punkten einer Parabel die Senkrechten auf der Ebene der Kurve und betrachten diejenige Fläche, welche alle diese Senkrechten enthält. Die zweite Art möge die Kegelflächen umfassen; es genügt für unsern Zweck, den geraden Kreiskegel zu betrachten. Um ihn zu erhalten, gehen wir von einem Kreise aus, errichten in seinem Mittelpunkte die Senkrechte auf der Ebene des Kreises und ziehen von einem festen Punkte dieser Senkrechten die (beiderseits verlängerten) geraden Linien nach den Punkten der Kreislinie. Als Typus der dritten Art wählen wir den geraden Cylinder: wir betrachten die Gesamtheit aller Punkte, welche von einer festen Geraden konstanten Abstand haben; oder wir gehen von zwei parallelen Geraden aus und drehen die aus ihnen bestehende Figur um die eine Gerade. Für unsern Zweck verschlägt es nicht, die Fläche erzeugt zu denken durch eine Schar paralleler Geraden, von denen jede eine einfach geschlossene ebene Kurve (ohne Punktsingularitäten) schneidet.

Bei den Flächen der ersten Klasse und speziell bei der oben angeführten, welche aus den sämtlichen in den Punkten einer Parabel auf ihrer Ebene errichteten Senkrechten gebildet wird, geht durch zwei Punkte immer eine einzige kürzeste (geodätische) Linie. Jede solche Linie geht dadurch, dafs man die Fläche auf eine Ebene abwickelt, in eine gerade Linie über; sie ist selbst unendlich und stellt die kürzeste Verbindung zwischen irgend zwei in ihr gewählten Punkten dar. Zwei geodätische Linien haben, soweit man sie auch verlängern mag, höchstens einen einzigen Punkt gemeinschaftlich; durch jeden Punkt geht nur eine einzige kürzeste Linie, welche von einer gegebenen geodätischen Linie bei beliebiger Verlängerung nicht geschnitten wird. Überhaupt entspricht jedem Satze der euklidischen Ebene ein ganz bestimmter Satz für eine solche Fläche; wir können durch eine leichte Änderung in der Bezeichnung entsprechende Sätze auch vollständig gleichlautend machen. Es ändert sich also nur die Vorstellung, welche wir mit den einzelnen Sätzen verbinden. Während man in der Ebene auf ganz verschiedene Weise eine starre Bewegung ausführen kann, ist es nur dadurch möglich, die Fläche starr in sich zu bewegen, dafs man sie längs ihrer Erzeugenden verschiebt; will man aber z. B. die Fläche bei der Ruhe eines Punktes in sich bewegen, so mufs sie fortwährend in geeigneter Weise gebogen werden. Diese Operation hat aber keinen Einflufs auf die Sätze selbst, sondern nur auf die mit den Sätzen verbundene Anschauung. Das System der Sätze ist demzufolge identisch mit dem der Sätze für die euklidische Ebene. So lange man also die Fläche nur in sich, ohne Rücksicht auf den äufsern Raum betrachtet, zeigt sie in ihren Sätzen keinen Unterschied von der zweidimensionalen euklidischen Geometrie; die Fläche mufs daher als eine euklidische Raumform von zwei Dimensionen betrachtet werden.

Ganz andere Eigenschaften zeigt die Oberfläche des geraden Kegels. Hier besteht die vollständige Fläche aus zwei Mänteln, die in einem Punkte zusammenstofsen. Will man von einem Punkte des einen Mantels zu irgend einem Punkte des andern gelangen, so mufs man durch die Spitze hindurchgehen. Jede kürzeste Linie, die durch die Spitze geht, ist eine Gerade; alle andern kürzesten Linien verbleiben also in dem einen oder andern Mantel. Eine solche behält demnach die Eigenschaft, eine kürzeste Verbindung der in ihr liegenden Punkte zu sein, nicht während ihres ganzen Verlaufes bei; es kann sogar vorkommen, dafs eine solche Linie sich selbst schneidet, und zwar tritt dies regelmäfsig ein, wenn der spitze Winkel, durch dessen Drehung die Kegelfläche entsteht, kleiner ist als der dritte Teil eines Rechten.

Um die letztere Behauptung zu beweisen, rolle man den Kegelmantel auf die Ebene ab; dann bedecke er das Winkelfeld X_0SX_1 ($= \mu = 2\pi \sin \varphi$, wenn φ den Winkel bezeichnet, unter welchem jede Kante zur Achse geneigt ist). Wofern dieses Winkelfeld kleiner ist als zwei Rechte (oder mit andern Worten, wenn $\varphi < 30^0$), so mufs jede in demselben gezogene Gerade mindestens einen Schenkel treffen. Nun werde der Schenkel SX_0 in A_0 unter dem Winkel α getroffen, und zwar möge α der Winkel sein, den der nach A_0 verlaufende Teil der Geraden mit A_0X_0 bildet. Dann mache man auf SX_1 die Strecke $SA_1 = SA_0$ und lege an SA_1 in A_1 den Winkel α im gegebenen Winkelfelde an. Sein zweiter Schenkel stellt die Fortsetzung der geodätischen Linie dar und trifft den Schenkel SX_0 in einem Punkte A_0' unter dem Winkel $\mu + \alpha$, wofern $\mu + \alpha < \pi$ ist. So geht es nach beiden Richtungen fort; die Abbildung einer jeden geodätischen Linie setzt sich, wofern $\mu < \pi$ ist, aus zwei Halbgeraden zusammen, zu denen noch einzelne gerade Strecken treten können.

Indessen kommt diese Eigenschaft nicht allen Kegelflächen zu. Wir müssen daher untersuchen, ob nicht diese Flächen sämtlich in wesentlichen Punkten von der Ebene abweichen. Zu dem Ende grenzen wir ein einfach zusammenhangendes Stück, das den Scheitel nicht enthält, ganz beliebig ab; d. h. wir betrachten einen Flächenteil, der von einer einzigen geschlossenen Linie (ohne Doppelpunkte) begrenzt wird. Jedes solche Stück hat bekanntlich alle Eigenschaften einer ebenen Fläche: durch je zwei Punkte desselben läfst sich eine, und zwar eine einzige kürzeste Linie legen; die Summe der Winkel in jedem aus kürzesten Linien gebildeten Dreieck beträgt zwei Rechte u. s. w. Bei passender Wahl des Stückes läfst es sich um jeden seiner Punkte drehen, wofern man nur jedesmal eine entsprechende Biegung vornimmt. Verschieben wir diesen Teil auf dem Kegelmantel bei gleichzeitiger Biegung, so wird, falls wir uns vom Scheitel entfernen, die eindeutige Beziehung zwischen dem neuen und dem gegebenen Stück fortwährend bestehen bleiben; zugleich wird das neue Stück die Eigenschaften einer ebenen Fläche behalten. Nähern wir uns aber dem Scheitel, so wird der Fall eintreten, dafs der Kegelmantel von dem Flächenstück zum Teil mehrmals bedeckt wird. Punkte, welche vorher von einander verschieden waren, fallen jetzt zusammen und müssen als identisch angesehen werden; die Eigenschaft, dafs durch zwei Punkte eine einzige kürzeste Linie geht, bleibt nicht mehr bestehen. Wie man also auch das erste Flächenstück gewählt hat, niemals wird es möglich sein, ihm an jeder andern Stelle der Fläche ein gleichartiges zuzuordnen. Nun hat der Raum folgende Eigenschaft: nachdem ein Raumteil abgegrenzt ist, kann man ihn in Beziehung setzen zu einem zweiten in der Weise, dafs 1. jedem Punkte des einen ein einziger Punkt des andern entspricht, und dafs 2. die Entfernung zwischen irgend zwei Punkten im einen Raumteil gleich ist der Entfernung der entsprechenden Punkte im andern; hierbei kann man noch denjenigen Punkt des Raumes ganz beliebig wählen, der einem Punkte des gegebenen Raumteiles entsprechen soll. Diese Eigenschaft liegt allen unsern Untersuchungen über den Raum zu Grunde. Soll also eine Fläche als zweidimensionale Raumform bezeichnet werden können, so mufs auch für sie ein entsprechender Satz gelten; ein solcher fehlt für die Kegelfläche.

Kongruent im weiteren Sinne wollen wir zwei Flächenstücke nennen, welche so auf einander bezogen werden können, dafs jedem Punkte des einen ein Punkt des andern entspricht und dafs entsprechende Linien, Winkel und Flächen jedesmal gleich sind. Wenn wir dann ein Flächenstück zu Grunde legen, so mufs es in der Umgebung einer jeden Stelle der Raumform ein in diesem Sinne kongruentes geben. Nehmen wir aber ein beliebiges Stück eines Kegelmantels, so wird es nie gelingen, ein zu ihm im weiteren Sinne kongruentes in jeder Nähe des Scheitels zu bestimmen.

Anders ausgedrückt: ein fester Körper kann an jede Stelle des Raumes gebracht werden. Um dies auf eine Fläche zu übertragen, denken wir uns ein Stück Papier, dessen Dicke als verschwindend betrachtet werden soll, und verschieben es bei gleichzeitiger Biegung auf einem Kegelmantel. Sobald man das Stück nahe genug an den Scheitel bringt, mufs ein Teil der Fläche gleichzeitig von zwei verschiedenen Teilen des Papiers bedeckt werden. Diese Art der Bedeckung mufs aber ausgeschlossen werden; denn auch für zweidimensionale Gebilde, die als Raumformen betrachtet werden sollen, mufs das Analogon des Satzes gelten, daſs derselbe Raum nicht gleichzeitig von verschiedenen Körpern oder auch von verschiedenen Teilen desselben Körpers eingenommen werden kann.

Hiernach ist es nicht gestattet, die Kegelfläche als eine zweidimensionale Raumform zu betrachten. Dasselbe gilt von jeder abwickelbaren Fläche, die eine Rückkehrkante besitzt. Denn auch hier muſs die eindeutige Beziehung zwischen zwei Flächenteilen fortfallen, sobald man mit dem einen nahe genug an die Rückkehrkante herankommt.

Wir gehen jetzt zu der dritten Klasse von abwickelbaren Flächen über und betrachten speziell den geraden Kreiscylinder. Zu seinen geodätischen Linien gehören einmal gerade Linien, nämlich die Erzeugenden der Fläche; ferner diejenigen Kreise, welche auf den Erzeugenden senkrecht stehen, und endlich die Schraubenlinien. Von den zuletzt genannten Linien schneidet jede sämtliche Erzeugenden, und zwar unendlich oft und unter gleichen Winkeln. Wofern also zwei Punkte nicht in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen, gehen unendlich viele kürzeste Linien durch sie hindurch. Schon hieraus geht hervor, daſs die Schraubenlinie die Eigenschaft, kürzeste Linie zu sein, nicht für zwei beliebige, in ihr gelegene Punkte, besitzt.

Während die Ebene durch jede beiderseits unendliche Linie, speziell durch die Gerade in zwei Teile zerlegt wird, kann man auf dem Cylinder mancherlei unendliche Linien ziehen, durch welche die Oberfläche nicht zerlegt wird. So kann man, nachdem eine Erzeugende gezogen ist, von irgend einem Punkte der Fläche zu jedem zweiten gelangen, ohne die Erzeugende zu treffen, wofern nur keiner der beiden Punkte auf der Erzeugenden liegt. Auch durch die Schraubenlinie wird die Fläche nicht zerlegt. Wenn zwei Punkte A und B der Fläche einer Schraubenlinie s nicht angehören, so lege man durch B die Erzeugende g; C und D seien diejenigen beiden Punkte, in denen g von s zunächst an B getroffen wird, so daſs B, aber kein dritter Schnittpunkt von s und g zwischen C und D liegt. Durch A lege man diejenige Schraubenlinie s', welche mit den Erzeugenden denselben Winkel bildet, wie s; dann wird auch von s' jede Erzeugende getroffen und der Abstand zweier auf einanderfolgender Schnittpunkte ist gleich CD. Folglich trifft s' mit g in einem einzigen

Schnittpunkte E zwischen C und D zusammen, wo E auch mit B identisch sein kann. Da sich s und s' nicht schneiden, so kann man sich von A aus auf s' bis E und dann auf der Geraden EB bewegen und gelangt nach B, ohne der Schraubenlinie s zu begegnen.

Zwar wird die Fläche schon dadurch zu einer einfach zusammenhangenden, daſs man sie längs einer Erzeugenden zerschneidet. Aber die Übereinstimmung mit der Ebene wird noch gröſser, wenn man ein einfach zusammenhangendes Stück abgrenzt, in dem nur solche kürzeste Linien vorkommen, deren Länge kleiner ist als der Umfang des Grundkreises. Beschränkt man die Betrachtung auf ein solches Stück, so kann man durch zwei Punkte desselben nur eine einzige geodätische Linie legen; die Winkelsumme in jedem durch kürzeste Linien begrenzten Dreiecke beträgt zwei Rechte; kurz, jeder für die euklidische Ebene geltende Satz, der nicht bereits durch seinen Ausspruch über ein gewisses Gebiet hinausgeht, findet auf einem solchen Stücke der Cylinderfläche sein volles Analogon.

Ein solches Stück kann aber auch auf der Cylinderfläche alle Bewegungen machen, welche den Bewegungen einer Ebene in sich entsprechen. Man kann es längs der erzeugenden Geraden und längs der Grundkreise verschieben; diese beiden Bewegungen und alle durch ihre Verbindung entstehenden (also z. B. die Verschiebungen längs irgend einer Schar von parallelen Schraubenlinien) erfordern keine Biegung. Man kann aber endlich auch einen beliebigen Punkt des Stückes in Ruhe halten und das betrachtete Stück um den Punkt drehen; dann muſs allerdings mit der Drehung eine gewisse Biegung verbunden werden; aber da alle Dehnung und Verkürzung ausgeschlossen ist, so bleiben alle Längen ungeändert, es behalten die Winkel und Flächen ihre Gröſsen bei, und zwei Punkte, welche in der Anfangslage getrennt liegen, gelangen auch durch die Bewegung niemals zur Deckung. Indem man diese Bewegungen beliebig fortsetzt, kann man das anfangs betrachtete Stück an jede Stelle der Fläche bringen, und indem man irgend ein kongruentes Stück betrachtet, gelten auch hierfür dieselben Sätze, wie in der euklidischen Ebene.

Wenn wir vor allem auf die starre Bewegung Rücksicht nehmen, können wir als besonders charakteristischen Unterschied zwischen der Ebene und der Cylinderfläche hervorheben, dafs jede starre Bewegung eines Teiles einer zweidimensionalen Ebene in sich auch für jeden andern Teil eine starre Bewegung eindeutig bestimmt, während dies auf dem Cylinder nur für die Parallelverschiebung gilt. Speziell kann die Ebene auch als Ganzes bei der Ruhe eines Punktes in sich bewegt werden, die Cylinderfläche aber nicht. Dieser Unterschied hindert aber nicht, die Cylinderfläche auch als Raumform aufzufassen; denn der Raum selbst ist unbeweglich, in ihm bewegen sich die Körper, speziell die festen Körper. So kann man auch die Cylinderfläche als den Träger auffassen, in welchem sich ein zweidimensionaler Körper bewegt. Wir wählen etwa ein Stück Papier, von dessen Dicke wir absehen und dessen übrige Dimensionen nach keiner Richtung hin eine Länge erreichen, die dem Umfang des Grundkreises gleichkommt; dies Stück läfst sich auf dem Cylinder nach denselben Gesetzen bewegen, nach denen eine Ebene in sich verschoben werden kann.

Wollen wir von der Bewegung absehen und nur die Zuordnung der einzelnen Teile in Betracht ziehen, so können wir sagen: An jeder Stelle der Fläche läfst sich ein Gebiet abgrenzen, für das die Gesetze der euklidischen Ebene gelten, und an jeder andern Stelle giebt es, nachdem das erste Gebiet passend gewählt ist, ein zweites, das zu ihm im weiteren Sinne kongruent ist. Demnach unterliegt es keinem Bedenken, die Cylinderfläche als Raumform aufzufassen.

Werfen wir jetzt noch einen Blick auf solche Cylinderflächen im weiteren Sinne, welche sich selbst durchschneiden. Wir gehen etwa von einer ebenen krummen Linie aus, welche einen Doppelpunkt hat, aber im übrigen beiderseits ins Unendliche verläuft. Längs einer solchen Linie lassen wir eine Gerade, welche nicht der Ebene der Kurve angehört, parallel mit ihrer Anfangslage bewegt werden. Die durch diese Gerade beschriebene Fläche hat in ihren Eigenschaften die gröfste Ähnlichkeit mit den an erster Stelle betrachteten Flächen; nur die Doppelgerade bedingt einen Unterschied. Im allgemeinen wird man nämlich, wenn man sich längs einer geodätischen Linie bewegt, niemals denselben Punkt zweimal treffen; nur bei den Punkten der Doppelgeraden ist diese Möglichkeit vorhanden. Dadurch nimmt eine solche Fläche an den für die dritte Klasse angegebenen Eigenschaften teil; es unterliegt also keinem Bedenken, auch diese Flächen als Raumformen zu betrachten.

Ähnliches gilt, wenn man etwa eine Lemniskate, überhaupt eine geschlossene Linie mit Doppelpunkten, zur Leitlinie einer Cylinderfläche wählt. Dann wird man zwar von jedem Punkte der Fläche aus längs einer geodätischen Linie in die Anfangslage zurückkehren können; aber für jeden Punkt, welcher auf einer Doppelgeraden liegt, führt hierbei bereits ein kürzerer Weg in die Anfangslage zurück. Indessen bleiben die früheren Ergebnisse auch für die neuen Flächen im wesentlichen ungeändert.

Demnach können wir das Resultat der angestellten Untersuchung in die Worte zusammenfassen:

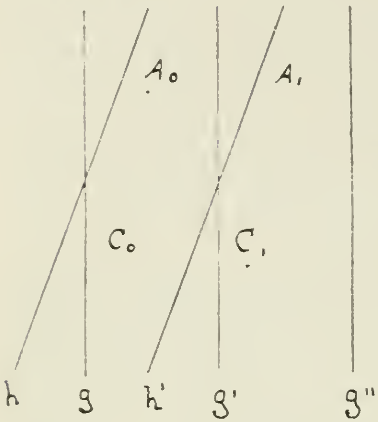
Unter den auf eine Ebene abwickelbaren Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes können nur die Cylinderflächen, d. h. diejenigen Flächen, deren Erzeugende sämtlich unter einander parallel sind, als Raumformen betrachtet werden. Läfst man für solche Flächen neben der Verschiebung noch die Biegung zu, (d. h. eine Deformation, bei welcher alle Gröfsenbeziehungen ungeändert bleiben), so ist es nur möglich, diejenigen unter diesen Flächen als Ganze allgemein in sich zu verschieben, deren Leitlinie eine einfach unendliche ebene Kurve ohne Doppelpunkte ist; die übrigen Flächen werden nur bei einer Parallel-Verschiebung als Ganze in sich verbleiben.

§ 2.

Erweiterung der angestellten Betrachtungen.

Wird die Fläche eines Kreiscylinders auf die Ebene abgerollt, so deckt die ganze Oberfläche einen Streifen, der von zwei parallelen Geraden g und g′ eingeschlossen wird. Indem wir die Abwicklung fortsetzen, zerfällt die ganze Ebene in lauter solche Streifen; jeder Punkt der Fläche wird unendlich oft abgebildet. So möge der auf der Cylinderfläche gelegene Punkt A in der Ebene die Bilder A_0, A_1, $A_2 \ldots$ und zugleich die Bilder A_{-1}, A_{-2}, $A_{-3} \ldots$ haben. Alle Punkte A_i liegen auf einer geraden Linie und je zwei auf einander folgende Punkte A_i und A_{i+1} haben einen konstanten Abstand. Wählt man umgekehrt in einer Ebene eine Strecke a und betrachtet zwei Punkte als zusammengehörig, wenn ihre Verbindungslinie der Strecke a parallel läuft und ein ganzes Vielfache dieser Strecke ist, so existiert stets ein Cylinder, der so auf die Ebene abgewickelt werden kann, dafs jeder seiner Punkte auf »zusammengehörige« Punkte der Ebene fällt. Dagegen ist die Schar der Geraden g, g′ ... für die Abbildung nicht charakteristisch. Hätte man nämlich auf dem Cylinder eine Schraubenlinie gezogen, so würde diese durch eine Gerade h abgebildet, welche gegen a unter einem spitzen Winkel geneigt ist; die Fläche wird also jetzt durch den Streifen hh′ abgebildet (Fig. 35).

Fig. 35.



Demnach können wir auch von der Cylinderfläche ganz absehen und nur die Ebene betrachten. Dann läfst sich das Schlufsresultat des vorigen Paragraphen in folgender Weise aussprechen:

Die Ebene kann auch dann als Raumform betrachtet werden, wenn man zwei Punkte als identisch ansieht, welche nach einer festen Richtung hin einen konstanten Abstand haben.

Ist A ein Punkt der Ebene, so soll derjenige Punkt durch A_m bezeichnet werden, für den die Gerade AA_m der festen Richtung parallel und die Länge $AA_m = ma$ ist. Ebenso setzen wir fest, dafs die Strecke BB_n der Strecke a parallel und gleich na ist.

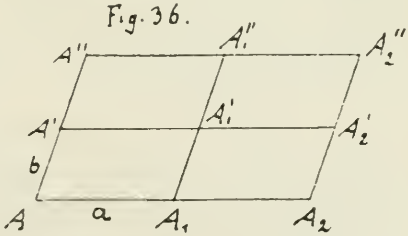
Wählt man in der Ebene ein einfach begrenztes Stück, in welchem sich keine gerade Strecke von der Länge a ziehen läfst, so läfst sich dieses ganz beliebig in der Ebene bewegen, ohne dafs es zusammenfallende Punkte enthält. Für jeden solchen Teil gelten also die Gesetze einer zweidimensionalen euklidischen Raumform ohne jede Einschränkung.

Wenn man die Ebene parallel in sich verschiebt, so möge der Punkt A auf B fallen; dann fällt jeder Punkt A_m auf einen Punkt B_m, so dafs die Festsetzung über zusammenfallende Punkte sich nicht ändert. Die neue Raumform kann also auch durch Parallelverschiebung in sich bewegt werden. Dagegen ist es nicht möglich, die Raumform auch als Ganzes bei der Ruhe eines Punktes in sich zu bewegen. Denn bei einer solchen Drehung wird die Richtung der Strecke a sich ändern.

Es wird nicht nötig sein, nochmals die weiteren Eigenschaften dieser Raumform in Anschlufs an die hier zu Grunde gelegte Abbildung anzuführen, da wir hierauf bereits im vorigen Paragraphen genugsam eingegangen sind. Dagegen wollen wir prüfen, ob es nicht gestattet ist, auch zwei Punkte als zusammenfallend zu betrachten, die nach einer zweiten Richtung hin einen festen Abstand haben.

Wir bezeichnen demnach durch a eine gewisse Strecke ihrer Länge und Richtung nach und setzen fest, dafs zwei Punkte zusammenfallen, deren Verbindungsstrecke nach Länge und Richtung gleich a ist. Dadurch mögen wir von A aus zu den Punkten A_1, $A_2 \ldots A_{-1}$, $A_{-2} \ldots$ gelangen. Eine zweite Strecke möge ihrer Gröfse und Richtung nach mit b bezeichnet werden. Die beiden Richtungen a und b mögen den Winkel φ mit einander bilden. Durch die Festsetzung, dafs auch zwei Punkte zusammenfallen, welche in der zweiten Richtung um b von einander entfernt sind, möge A auch mit A', $A'' \ldots$, $A^{(-1)}$, $A^{(-2)} \ldots$ identisch sein. Wenn jetzt A_1' der vierte Eckpunkt des Parallelogramms mit drei Ecken $A_1 A_1$, A' ist, so fällt auch A mit A_1' zusammen (Fig. 36). Überhaupt sei A_μ^ν der vierte Eckpunkt eines Parallelogramms, das die Punkte A, A_μ, A^ν zu Ecken hat, so fällt auch der Punkt A_μ^ν mit A zusammen.

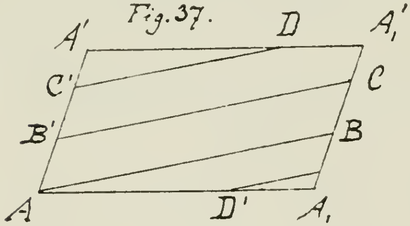
Fig. 36.



Auch jetzt kann man in mannigfaltiger Weise ein Gebiet der Ebene so abgrenzen, dafs es einfachen Zusammenhang besitzt und keine zusammenfallende Punkte enthält. Ein solches Gebiet besitzt alle Eigenschaften einer zweidimensionalen euklidischen Ebene. Wenn zudem alle geraden Linien, welche in diesem Gebilde gezogen werden können, eine gewisse Länge nicht erreichen, so kann man das Stück beliebig in der Ebene bewegen, ohne dafs es zusammenfallende Punkte enthält. Somit stellt die Ebene auch bei der getroffenen Festsetzung eine Raumform dar.

Jede gerade Linie der Raumform wird in der Ebene wieder durch eine Gerade abgebildet. Lassen wir dieselbe von A ausgehen, so möge sie einen Punkt $A_\mu^{(\nu)}$ treffen, und zwar müssen hier μ und ν relative Primzahlen sein, wenn der Punkt A_μ^ν unter allen Punkten A_ϱ^σ der erste sein soll, durch den die Gerade von A aus wieder hindurchgeht. Dann ist die Gerade in der abgebildeten Raumform geschlossen, und ihre Länge beträgt $\sqrt{\mu^2 a^2 + \nu^2 b^2 + 2\mu\nu ab \cos\varphi}$. Wenn $\mu > \nu$ ist, so schneidet das Bild $AA_\mu^{(\nu)}$ die Seite A_1A_1' in einem Punkte B, so daſs $A_1B : A_1A_1' = \mu : \nu$ ist. Wählt man also in A_1A_1' einen Punkt B so, daſs das Verhältnis $A_1B : A_1A_1'$ irrational ist, so kann die Gerade AB durch keinen Punkt A_μ^ν hindurchgehen; in der abgebildeten Raumform erhalten wir daher eine unbegrenzte Gerade. Eine solche Gerade wird jedem Punkte der Raumform unbegrenzt nahe kommen. Davon überzeugt man sich sofort durch ihre Abbildung auf das Parallelogramm $AA_1A_1'A'$. Hier möge die von A ausgehende Gerade den Umfang des Parallelogramms zuerst (Fig. 37) etwa in einem Punkte B der Seite A_1A_1' treffen. Man trage AB' auf AA' gleich A_1B ab und ziehe durch B' die Parallele zu AB; diese treffe die Begrenzung des Parallelogramms zuerst wieder in C. Zwei auf einanderfolgende Parallele haben den konstanten Abstand m; solcher müssen unendlich viele in das Parallelogramm gezeichnet werden; daher kommt man jedem Punkte unendlich nahe. Eine ungefähre Übersicht erlangt man durch die nebenstehende Figur.

Fig. 37.



Um eine Raumform der bezeichneten Art zu erhalten, nehme man x_1, x_2, x_3, x_4 als die rechtwinkligen Koordinaten in einer vierdimensionalen euklidischen Raumform an. Eine gewisse Fläche wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$x_1 = a\cos\frac{u}{a},\ x_2 = a\sin\frac{u}{a},\ x_3 = b\cos\frac{v}{b},\ x_4 = b\sin\frac{v}{b},$$

wo a und b festgewählte Konstante, u und v veränderliche Gröſsen sind. Wir betrachten u und v als die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten in einer euklidischen Ebene. Dann entspricht jedem

Punkte u, v der Ebene ein einziger Punkt $(x_1 \ldots x_4)$ auf der Fläche. Wird dagegen irgend ein Punkt auf der Fläche angenommen, so kann man stets ein Wertepaar (u, v) für $0 < u < 2a\pi$, $0 < v < 2b\pi$ so bestimmen, dafs die vier Gleichungen bestehen. Dann entsprechen demselben Punkte $(x_1 \ldots x_4)$ der Fläche unendlich viele Punkte $(u + 2\mu a\pi,\ v + 2\nu b\pi)$ der Ebene für beliebige ganzzahlige Werte von μ und ν. Somit kann man die Fläche auf ein in der Ebene gelegenes Rechteck mit den Seiten $2\pi a$ und $2\pi b$ abbilden.

Da $dx_1 = -du \sin\frac{u}{a} \ldots$ ist, so gilt für das Linienelement ds auf der Fläche die Beziehung

$$ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 + dx_4{}^2 = du^2 + dv^2;$$

oder jedes Linienelement der Fläche ist gleich dem entsprechenden Linienelement in der Ebene. Bei der bezeichneten Abbildung bleiben somit alle Längen (und zugleich alle Winkel und Flächen) ihrer Gröfse nach ungeändert. Diese Abbildung wird daher vielfach als Abwicklung bezeichnet, obwohl der angegebene Prozefs rein analytischer Natur ist. Gehen wir aber vom vierdimensionalen euklidischen Raume aus, so können wir ein zweidimensionales ebenes Rechteck auf eine allseitig geschlossene Fläche abwickeln. Da hierbei jeder Punkt (u, v) identisch mit den Punkten $(u + 2\mu a\pi,\ v + 2\nu a\pi)$ ist, so wird durch die angegebene Fläche die oben charakterisierte Raumform dargestellt, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist und a durch $2\pi a$, b durch $2\pi b$ ersetzt wird.

Eine Fläche von der bezeichneten Eigenschaft kann man auch in einer dreidimensionalen Riemannschen Raumform konstruieren. Wenn nämlich das Riemannsche Krümmungsmafs gleich eins gewählt wird, so kann man die Punkte des Raumes durch vier Gröfsen $x_1 \ldots x_4$ darstellen, wofern zwischen ihnen die Beziehung besteht:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = 1.$$

Wenn man diese Beziehung als erfüllt betrachtet, so mufs man annehmen, dafs auch in den Gleichungen (1) die Beziehung besteht:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Hiernach kann man das Rechteck auch (analytisch) abwickeln auf eine gewisse Fläche des dreidimensionalen Riemannschen Raumes. Diese Fläche enthält alle diejenigen Punkte, welche von einer festen Geraden einen konstanten Abstand haben.

Dafs der Zusammenhang in unserer Raumform ein mehrfacher ist, kann man auf verschiedene Weise zeigen. Ein einfach geschlossener Linienzug, welcher vom Punkte A ausgeht, wird abgebildet durch eine Kurve, welche vom Punkte A aus ganz im Parallelogramm $AA_1A_1'A'$ verläuft und in einem seiner Endpunkte endigt. Sind nun im Innern des Parallelogramms zwei Punkte gegeben, welche durch den Linienzug gegen einander abgegrenzt sind, so nehme man ein zweites Parallelogramm hinzu und beachte, dafs die Punkte dieses Parallelogramms mit denen des ersten identisch sind. Analytisch wird jede einfach unendliche stetige Folge von Wertsysteme (u, v), welche zwischen den Werten (u', v') einerseits zu dem Wertepaar (u'', v'') oder $(u'' + 2\pi a, v'')$ oder $(u'', v'' + 2\pi b)$ oder endlich zu $(u'' + 2\pi a, v'' + 2\pi b)$ führt, einen Linienzug darstellen, welcher dieselben beiden Punkte verbindet. Um den Zusammenhang zu einem einfachen zu machen, ziehe man erst auf der Fläche die Linie $u = 0$, dann die Linie $v = 0$; die erste ist eine geschlossene Linie, die zweite führt von einem Punkte dieser Linie zu demselben Punkte zurück. Jetzt ist der Zusammenhang einfach; denn die Raumform ist auf die Fläche eines Parallelogramms abgebildet, und ein Überschreiten der Grenzen ist nicht gestattet.

Wir dürfen auch folgende Erwägung anstellen.

Der Zusammenhang einer Fläche ändert sich nicht, wenn man beliebige Verzerrungen mit ihr vornimmt, wofern nur keine Spaltungen u. dergl. eintreten. Nun kann man ein Rechteck zuerst zu einem Stück eines Cylindermantels umbiegen, wodurch der Grad des Zusammenhangs um eins zunimmt. Dieses Stück, das von zwei Kreisen begrenzt ist, verbiege und dehne man, bis die Kreise zusammenfallen. Dadurch hat man eine Ringfläche erhalten und gefunden, dafs die gegebene Raumform denselben Zusammenhang besitzt, wie eine Ringfläche.

§ 3.

Der dreidimensionale Raum verschwindender Krümmung.

Ganz entsprechend den für die zweidimensionalen Raumformen getroffenen Festsetzungen nehmen wir jetzt an, jeder Punkt des dreidimensionalen euklidischen Raumes sei identisch mit demjenigen Punkte, welcher von ihm nach einer festen Richtung einen gegebenen Abstand hat. Wir nehmen also an, dafs man in einen Punkt A zurückkehrt, wenn man sich von ihm aus in einer gewissen Richtung geradlinig um eine gewisse Strecke a bewegt, und fragen uns, ob wir unter dieser Voraussetzung zu einem innern Widerspruch gelangen oder nicht, und ob es vielleicht sogar gestattet ist, für den Erfahrungsraum diese Annahme zu machen. Dafs man diese Strecke aufserordentlich grofs annehmen mufs, versteht sich von selbst und braucht nicht eigens hervorgehoben zu werden.

Betrachten wir zu dem Ende einen Teil des Raumes, in welchem sich nach keiner Richtung eine gerade Strecke von der Länge a ziehen läfst. So lange es nicht gestattet ist, über diesen Teil hinauszugehen, läfst sich durch je zwei Punkte desselben eine einzige gerade Linie, durch eine Gerade und einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt eine einzige Ebene legen. Eine darin gelegene Figur zeigt alle Eigenschaften, welche in der euklidischen Geometrie gelten. Aber auch, wenn dieser Teil des Raumes einer Transformation unterworfen wird, welche einer starren Bewegung entspricht, so wird der neue Raumteil, für sich betrachtet, wieder dieselben Eigenschaften zeigen. Denn erst der Abstand a führt zusammenfallende Punkte herbei; im vorliegenden Falle kommt ein solcher Abstand zwischen irgend zwei Punkten des gegebenen Raumteiles nicht vor; da aber die gestatteten Transformationen den Abstand irgend zweier Punkte ungeändert lassen, so kommt eine Entfernung a auch für die Punkte des neuen Raumteiles nicht vor.

Wir können dies auch in folgender Weise aussprechen. Nehmen wir einen festen Körper im Raume an, so müssen wir voraussetzen, dafs der Abstand irgend zweier Punkte desselben kleiner ist, als die zu Grunde gelegte Strecke a. Dann können irgend zwei Punkte dieses Körpers durch eine einzige gerade

Linie, drei nicht in gerader Linie liegende Punkte durch eine einzige Ebene verbunden werden. Ebenfalls kann man den Körper im Raume alle jene Bewegungen ausführen lassen, welche erfahrungsgemäfs bei festen Körpern möglich sind; denn der Körper kann in keiner Lage zwei Punkte enthalten, deren Abstand gleich a wäre.

Legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde und nehmen wir an, der Punkt $(x + a, y, z)$ falle mit dem Punkte (x, y, z) zusammen. Die Koordinaten des Punktes, welchen ein gegebener Punkt des Körpers in der Anfangslage einnimmt, mögen mit (x_0, y_0, z_0) bezeichnet werden; dagegen möge dieser Punkt während der Bewegung zur Zeit t die Koordinaten (x, y, z) haben. Dann können wir setzen:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= \varphi_2(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= \varphi_3(x_0, y_0, z_0, t), \end{aligned}$$

wo φ_1, φ_2, φ_3 lineare Funktionen von x_0, y_0, z_0 sind, deren Koeffizienten Funktionen von t sind. Hierbei bleibt der Abstand zweier Punkte ungeändert. Sind also (x_0, y_0, z_0) und (x_0', y_0', z_0') zwei Punkte, welche der Körper in der Anfangslage deckt, so mufs auch der Abstand der entsprechenden Punkte (x, y, z) und (x', y', z') kleiner sein als a. Somit wird ganz gewifs $x' - x$ dem absoluten Betrage nach kleiner als a sein. Der Körper kann also unter der gemachten Annahme in gleicher Weise bewegt werden, wie im euklidischen Raume.

Wir fragen uns jetzt, ob auch bei der gemachten Voraussetzung der Raum noch als Ganzes bewegt werden könne. Dazu ist notwendig und hinreichend, dafs die feste Richtung von a nicht geändert werde. Demnach darf man mit dem Raume jede Parallelverschiebung vornehmen und jede Drehung um eine Gerade, welche zu der festen Richtung parallel ist; natürlich darf man auch diese Bewegungen beliebig mit einander verbinden. Der Raum besitzt also vier Grade von Beweglichkeit, während jeder feste Körper sechsfach beweglich ist. Jede Drehung um eine Gerade, die zu der gegebenen Richtung nicht parallel ist, verändert die feste Richtung, kann also nicht mehr auf den Raum übertragen werden.

Somit wird in der That durch die gemachte Annahme eine widerspruchsfreie Raumform definiert. Dieselbe wird auf den euklidischen Raum durch einen Streifen abgebildet, welcher von zwei parallelen Ebenen eingeschlossen wird. Jedem Punkte A der Raumform entsprechen wieder unendlich viele Punkte A_0, A_1, $A_2 \ldots A_{-1}$, $A_{-2} \ldots$ des euklidischen Raumes.

Durch zwei Punkte der betrachteten Raumform gehen im allgemeinen unendlich viele gerade Linien. Sind die Punkte A und B gegeben, so mögen dem ersten in der euklidischen Ebene die Punkte A_i, dem zweiten die Punkte B_i entsprechen. Die verschiedenen Geraden, welche durch A und B gezogen werden können, bilden sich ab durch $A_0 B_i$ für jedes ganzzahlige i. Alle diese sind verschieden, wenn nicht $A_0 B_0$ zu der festen Richtung parallel ist.

Durch drei Punkte gehen im allgemeinen unendlich viele Ebenen, und zwar lassen sich zwei Parameter derartig bestimmen, dafs jedem ganzzahligen Wertsysteme derselben eine Ebene entspricht, welche von der zu einem andern Parameterpaare gehörigen verschieden ist. Die drei Punkte mögen die Koordinaten haben $(0, 0, 0)$, (x', y', z'), (x'', y'', z''). Hier darf man aber die Koordinate x um λa, μa, νa vermehren, wofern nur λ, μ, ν ganze Zahlen sind. Dann ergeben sich die Gleichungen der Ebenen in der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & \lambda a & 0 & 0 \\ 1 & x' + \mu a & y' & z' \\ 1 & x'' + \nu a & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0, \text{ oder } \begin{vmatrix} x - \lambda a & y & z \\ x' + (\mu - \lambda) a & y' & z' \\ x'' + (\nu - \lambda) a & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Da aber die Verminderung von x um λa keine Verschiedenheit hervorruft, so können wir geradezu $\lambda = 0$ annehmen. Wenn hier $y'z'' - y''z'$ von null verschieden ist, so entspricht jedem Paare (μ, ν) eine bestimmte Ebene, die von der zu einem andern Paare (μ', ν') gehörigen Ebene notwendig verschieden ist. Unter dieser Annahme wird auch für kein Wertepaar (y, z) der Wert von x unbestimmt sein; die Ebene enthält also keine Gerade, die der festen Richtung parallel ist. Alle Geraden der Ebene sind unendlich, die Ebene selbst ist eine euklidische.

Wenn aber $y'z'' - y''z' = 0$ ist, so wird die Gleichung der

Ebene $py - qz = 0$, wo p und q von μ und ν ganz unabhängig sind. Hier geht durch jeden Punkt eine geschlossene Gerade, nämlich eine solche, welche der festen Richtung parallel ist; denn es läfst sich, wenn y und z dieser Gleichung genügen, der Wert von x noch ganz beliebig wählen. In diesem Falle geht durch die drei Punkte eine einzige Ebene und jede solche ist eine Raumform von der Art, wie sie im ersten Paragraphen durch die Oberfläche eines Cylinders dargestellt wurde.

Jede Ebene der letzten Art zerlegt den Raum, eine jede der ersten Art aber nicht. Wir müssen dem Raum also mehrfachen Zusammenhang beilegen.

Man kann aber auch mit der gegebenen Richtung eine zweite verbinden, nach welcher in einer bestimmten Entfernung die Punkte wiederum zusammenfallen sollen. Dann liegen alle diejenigen Punkte, welche mit einem gegebenen identisch sind, in derjenigen Ebene, welche die beiden festen Richtungen enthält, und bilden hierin die Eckpunkte von Parallelogrammen, wie sie in Figur 36 (S. 281) angegeben sind. Von jedem Punkte gehen unendlich viele geschlossene Gerade aus und alle diese liegen in der bezeichneten Ebene. Es giebt aber auch in dieser Ebene unendliche gerade Linien, wie im vorigen Paragraphen gezeigt ist. Nur in einer Ebene, welche dieser Schar angehört, gehen durch jeden Punkt unendlich viele geschlossene gerade Linien; es giebt aber auch Ebenen, in denen durch jeden Punkt nur eine einzige geschlossene Gerade geht; endlich kann man wieder Ebenen finden, deren sämtliche gerade Linien unendlich sind. Während ein Körper, dessen Dimensionen sämtlich unterhalb der Länge der kürzesten geraden Linie liegen müssen, eine sechsfache Unendlichkeit von Bewegungen zuläfst, wird der Raum als Ganzes nur die Parallelverschiebung, also eine dreifache Unendlichkeit von Bewegungen zulassen.

Endlich kann man noch Punkte als zusammenfallend betrachten, die nach einer dritten Richtung hin eine gewisse Entfernung haben. Man konstruiere ein Parallelepipedon und betrachte seine Eckpunkte als zusammenfallend. Dieser Parallelepipeda kann man unbegrenzt viele neben einander konstruieren oder, wie man sich ausdrückt, den Raum in lauter kongruente derartige Körper zerlegen. Die Eckpunkte sollen mit (λ, μ, ν) für beliebige ganze

Zahlen λ, μ, ν bezeichnet werden. Dabei gehen wir von einem Punkte $(0, 0, 0)$ aus und erhalten den Punkt $(\lambda, 0, 0)$, indem wir durch den Punkt $(0, 0, 0)$ die Parallele zur ersten Richtung ziehen und hierauf die zur ersten Richtung gehörige Länge λ-mal abtragen; indem wir die zu den drei Richtungen gehörigen Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnen, soll die Länge λa abgetragen werden. Dann wird der Punkt $(\lambda, \mu, 0)$ erhalten, indem man durch $(\lambda, 0, 0)$ die Parallele zur zweiten Richtung zieht und auf ihr die Länge μb abträgt. Endlich kommt man zum Punkte (λ, μ, ν), indem man vom Punkte $(\lambda, \mu, 0)$ aus die Länge νc nach der dritten Richtung hin abträgt. Dabei entspricht einem negativen Vorzeichen die entgegengesetzte Richtung.

Eine gerade Linie, welche vom Punkte $(0, 0, 0)$ ausgeht, ist geschlossen, wenn sie noch durch einen Punkt (λ, μ, ν) hindurchgeht; dann mufs sie auch für jedes ganzzahlige $\varkappa$ jeden Punkt $(\varkappa\lambda, \varkappa\mu, \varkappa\nu)$ enthalten. Geht eine Ebene, welche den Punkt $(0, 0, 0)$ enthält, durch zwei Punkte (λ, μ, ν) und (λ', μ', ν'), wo die Determinanten $\mu\nu' - \mu'\nu$, $\nu\lambda' - \nu'\lambda$, $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ nicht sämtlich verschwinden, so ist sie selbst endlich und stellt eine Raumform dar, wie sie im zweiten Abschnitt des vorigen Paragraphen untersucht ist. Es ist aber auch möglich, dafs eine vom Punkte $(0, 0, 0)$ ausgehende Ebene nur die Punkte $(\varkappa\lambda, \varkappa\mu, \varkappa\nu)$ für ein beliebiges ganzzahliges $\varkappa$ enthält, und endlich ist es möglich, dafs sie durch keinen Punkt (λ, μ, ν) hindurchgeht. Demnach giebt es hier drei Arten von Ebenen.

§ 4.

Allgemeine Begründung der neuen Raumformen.

Für die Bewegung eines starren Körpers gelten die allgemeinen Gesetze:

I. Wenn ein Körper zu irgend einer Zeit den früheren Raum eines zweiten Körpers deckt, so kann er zur Deckung mit jedem Raume gebracht werden, welchen der zweite zu irgend einer Zeit einnimmt.

II. Jeder Körper kann so bewegt werden, dafs einer seiner Punkte zur Deckung mit einem beliebigen Punkte des Raumes gelangt.

III. Für einen Körper ist die Lage eines jeden seiner Punkte vollständig und eindeutig bestimmt, sobald die Lage aller einem beliebigen Teile des Körpers angehörigen Punkte bestimmt ist.

Diese Gesetze möchten wir auch den weiteren Untersuchungen über den Raum zu Grunde legen. Das dritte Gesetz, welches uns hier vor allem beschäftigen soll, kann auch folgenden Ausspruch erhalten:

Bewegen wir einen Körper, so ist dadurch auch für jeden andern Körper, welcher mit dem ersten fest verbunden ist, eine gewisse Bewegung eindeutig bestimmt.

Wir betrachten demnach einen starren Körper und denken uns unbegrenzt weitere Körper damit fest verbunden. Hierbei wird keineswegs vorausgesetzt, dafs es möglich sein mufs, diese Körper sämtlich zugleich im Raume anzubringen; es genügt vorauszusetzen, dafs je zwei zusammenstofsende Körper zugleich im Raume liegen. Alsdann bedingt die Bewegung des ersten Körpers auch die eines jeden damit fest verbundenen, und zwar gelangt man, wenn die Bewegung des ersten und die Verknüpfung der einzelnen Körper gegeben ist, für jeden weiteren Körper zu einer einzigen Bewegung. So mögen die Körper K_1 und K_s keinen Zusammenhang haben; es seien aber die Körper K_2, $K_3 \ldots$ K_{s-1} derartig hinzugefügt, dafs je zwei auf einanderfolgende zugleich im Raume liegen, und dafs K_1 mit K_2, K_2 mit $K_3 \ldots$, K_{i-1} mit $K_i \ldots$, K_{s-1} mit K_s fest verbunden ist. Dann ist durch die Bewegung von K_1 und durch die Körper $K_2 \ldots K_s$ auch die Bewegung von K_s eindeutig bestimmt. Nachdem die Anfangslagen von K_1 und K_s und die Bewegung von K_1 gegeben sind, wird die Bewegung von K_s auch wieder eindeutig bestimmt sein, wenn zwischen K_1 und K_s irgend andere Körper $K_2' \ldots K_p$ in der bezeichneten Weise eingeschoben sind. Dieselbe Bewegung von K_1 bedingt also einmal infolge der Einschiebung von $K_2 \ldots K_{s-1}$ eine bestimmte Bewegung, und dann eine zweite Bewegung infolge der Einschiebung von $K_2' \ldots K_p'$. Jetzt ist die eine Möglichkeit offenbar vorhanden, dafs K_s beidemal dieselbe Bewegung macht, wie auch immer die andern Körper eingeschoben sind. Diese Annahme ist die einfachste und liegt den Untersuchungen der drei ersten Abschnitte stillschweigend zu Grunde.

Unter dieser Annahme ist durch die Bewegung eines Körpers

K_1 für jeden an irgend einer andern Stelle liegenden Körper K_s eine einzige Bewegung bestimmt. Läfst man aber K_s die hierdurch gefundene Bewegung machen, so wird für K_1 diejenige Bewegung bestimmt, von der wir ausgingen. Dadurch wird die Bewegung von dem gewählten Körper ganz unabhängig und durch diejenige Stelle des Raumes bestimmt, welche der Körper in der Ruhelage deckt. Man spricht daher wohl von einer Bewegung des Raumes, nicht als wollte man dessen Beweglichkeit behaupten, sondern nur, um anzudeuten, dafs man für jeden Körper eine eindeutig bestimmte Bewegung erhält, sobald man die Stelle des Raumes kennt, welche er in der Anfangslage deckt. Diese Beziehung ist so wichtig, dafs man verlangen mufs, sie durch einen kurzen, wenn auch etwas ungenauen Ausdruck bezeichnen zu können.

Man kann aber mit dem Ausdruck noch eine zweite Vorstellung verbinden. A und A′ seien zwei Lagen desselben festen Körpers K_1; wenn K_1 die erste Lage einnimmt, möge ein damit in der bezeichneten Weise verbundener Körper K_s die Lage B decken. Gelangt nun K_1 durch die Bewegung in die Lage A′, so wird auch K_s eine bestimmte zweite Lage B′ erhalten. So wird jedem Punkte P des Raumes, wofern er als der ersten Lage eines mit K_1 durch Vermittlung beliebiger Körper in Zusammenhang gebrachten Körpers K_s angehörig betrachtet wird, ein zweiter Punkt P′ entsprechen, in welchen derjenige Punkt von K_s gelangt, welcher in der ersten Lage den Punkt P deckt. Hierdurch ist eine Zuordnung der sämtlichen Punkte des Raumes unter einander festgesetzt, indem jedem Punkte P ein bestimmter Punkt P′ entspricht. Gerade wie hier mit einer bestimmten zweiten Lage geschehen, läfst sich jede bei der Bewegung erlangte Lage und die dadurch bedingte Zuordnung der Punkte betrachten. Man erhält also im vorliegenden Falle eine stetige Folge von Zuordnungen der Punkte des Raumes; diese Folge von Zuordnungen ist durch die Bewegung eines festen Körpers bedingt; sie folgt denselben Gesetzen und bestimmt für jeden festen Körper selbst wieder eine Bewegung. Alle diese Beziehungen sollen durch den Ausdruck: Bewegung des Raumes, angedeutet werden.

Aber die Voraussetzung, auf der die Zulässigkeit dieses Ausdrucks begründet war, nämlich die Annahme, dafs die einem

Körper vermittelte Bewegung unabhängig sei von den vermittelnden Körpern, ist keineswegs notwendig; vielmehr hat uns der vorige Paragraph bereits Raumformen kennen gelehrt, in denen diese Annahme nicht mehr allgemein gemacht werden kann. Wir wählen die einfachste unter den dort betrachteten Raumformen, nämlich diejenige, in welcher der Punkt $(x + a, y, z)$ mit dem Punkte (x, y, z) identisch ist, während keine hiervon unabhängige Substitution das Zusammenfallen von Punkten anzeigt.

Um den Beweis zu führen, teilen wir die Strecke der X-Achse von 0 bis a in ϱ gleiche Teile und nehmen jeden Teil zur Achse eines geraden Kreis-Cylinders mit einem konstanten Radius; die einzelnen Cylinder mögen mit $0, 1, 2 \ldots \varrho - 1$ bezeichnet werden. Den ersten Cylinder (0) lassen wir eine Drehung um die Y-Achse ausführen. Da die Cylinder 0 und 1, 1 und $2 \ldots \sigma - 1$ und σ (für $\sigma < \varrho$) je zusammenhangen, so wird die durch diese Körper vermittelte Bewegung des Cylinders σ erhalten, indem man in die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{aligned} x' &= x \cos t - z \sin t \\ y' &= y \\ z' &= x \sin t + z \cos t \end{aligned}$$

für x die Werte zwischen $\frac{\sigma}{\varrho} a$ und $\frac{\sigma + 1}{\varrho} a$ einsetzt, während y und z von σ unabhängige Werte erhalten.

Nun teile man die Strecke zwischen $(0, 0, 0)$ und $(-a, 0, 0)$ in ϱ gleiche Teile und denke auch um diese Linie Cylinder der angegebenen Art gelegt, welche mit $-1, -2 \ldots -\varrho$ bezeichnet werden mögen. Dann ist der Cylinder $-\tau$ identisch mit dem Cylinder $\varrho - \tau$, also (σ) identisch mit $(-\varrho + \sigma)$. Man erhält also eine zweite Verbindung der Körper (0) und (σ) durch die Körper $(-1), (-2) \ldots (-\varrho + \sigma + 1)$. Die hierdurch vermittelte Bewegung erhält man aber, wenn man in die Gleichungen (1) für x die Werte zwischen $\frac{-\varrho + \sigma + 1}{\varrho} a$ und $\frac{-\varrho + \sigma}{\varrho} a$ einsetzt. Diese Bewegungen sind aber in der That von einander verschieden.

Wir müssen also die Voraussetzung zulassen, dafs, wofern man von einer bestimmten Bewegung eines festen Körpers ausgeht und einem zweiten Körper durch Vermittlung anderer eine

Bewegung zuordnet, diese letztere von der Wahl der vermittelnden Körper abhängig ist. Um diese Voraussetzung auf eine andere Form zu bringen, gehen wir wieder auf die beiden oben betrachteten Reihen K_1, K_2, $K_3 \ldots K_{s-}$, K_s und K_1, K_2', $K_3' \ldots K_p'$, K_s zurück, und nehmen jetzt an, die erste Reihe vermittle bei derselben Bewegung von K_1 für K_s eine andere Bewegung als die zweite. Jetzt betrachten wir die geschlossene Reihe $K_1 K_2$ $K_3 \ldots K_{s-1} K_s K_p' \ldots K_3 K_2' K_1$. Da je zwei auf einander folgende Körper festen Zusammenhang haben, so wird man vermittelst dieser Reihe dem Körper K_1 eine Bewegung zuordnen. Diese zweite Bewegung mufs aber von der ersten verschieden sein; wäre sie nämlich mit der ersten identisch, so würde auch für K_2 sich dieselbe Bewegung aus der Reihe $K_1 K_2 \ldots K_s K_p' \ldots K_2$ wie aus der direkten Verbindung mit K_1 ergeben, und daraus würde folgen, dafs die beiden Reihen $K_1 K_2 \ldots K_{s-1}$ und $K_1 K_2' \ldots K_p'$ für K_s dieselbe Bewegung vermitteln. Die oben angegebene Voraussetzung kommt also auf die folgende hinaus: es mufs möglich sein, eine Reihe von Körpern K_1, K_2, $K_3 \ldots K_{t-1}$, K_t, wo K_t mit K_1 identisch ist, so zu bestimmen, dafs je zwei auf einander folgende zusammenhangen und dafs die durch diese Reihe für K_t vermittelte Bewegung von der dem K_1 beigelegten verschieden ist.

Auch hierfür liefert die vorhin gewählte Raumform ein passendes Beispiel. Die oben mit (0), (1), (2) ... (ϱ) bezeichneten Körper bilden eine Reihe, wie wir sie so eben betrachtet haben, worin je zwei auf einander folgende Körper zusammenhangen und worin der letzte Körper mit dem ersten identisch ist. Die Bewegung, welche dem Körper (0) anfangs beigelegt wird, möge erhalten werden, indem man in die Gleichungen (1) für x die Werte zwischen 0 und $\frac{1}{\varrho}$a einsetzt. Um die durch die Einschiebung vermittelte Bewegung analytisch darzustellen, hat man der Variabeln x die Werte zwischen a und $\frac{\varrho + 1}{\varrho}$a zu geben. Diese beiden Bewegungen sind aber von einander verschieden.

Jetzt kann man sich von der Wahl der vermittelnden Körper in etwa unabhängig machen. Sind zwei Körper K_1 und K_t gegeben, (wo K_t auch mit K_1 identisch sein kann), so ziehe man einen Linienzug von einem Punkte von K_1 nach einem Punkte von K_t und setze fest, dafs er in der Richtung von K_1 nach K_t durchlaufen werden soll. Dieser Linienzug kann ganz beliebig sein und sich öfters schneiden; nur mufs in jedem mehrmals durchlaufenen Punkte die Richtung des weiteren Fortschreitens fest bestimmt sein. Man zerlege ihn in hinreichend kleine Teile $l_1, l_2 \ldots l_i, l_{i+1} \ldots l_{t-1}, l_t$. Für jeden Teil bestimmt man einen Körper K_i, welcher den ganzen Teil l_i der Linie enthält; die Wahl mufs so getroffen werden, dafs für jedes i die zwei auf einander folgenden Körper K_i und K_{i+1} als Teile eines einzigen Körpers angesehen werden können. Dieser Linienzug sei auf andere Weise in die Teile: $l_1', l_2 \ldots l_s'$ zerlegt und nach denselben Bestimmungen seien die Körper $K_1', K_2' \ldots K_{s-1}', K_s'$ eingeschoben, wo K_s' und K_t als identisch angesehen werden mögen. Dann übersieht man unmittelbar, dafs die auf die zweite Weise vermittelte Bewegung jedesmal dieselbe ist, von welcher Bewegung des Körpers K_1 man auch ausgehen mag. Dasselbe gilt von den einzelnen Körpern, welche an irgend einer andern Stelle der Linie angebracht werden; die Linie selbst, die Richtung, in der sie durchlaufen wird, und die Strecke, welche man auf ihr zurückgelegt hat, bestimmen durchaus eindeutig die Bewegung für jeden Körper, welcher das Ende der gewählten Strecke deckt. Ordnen wir also jedem Teile des Raumes, der in einer gewissen Umgebung des Linienzuges liegt, diejenige Transformation zu, durch welche die Bewegung eines in ihm enthaltenen Körpers bestimmt wird, so wird dadurch jedem Raumteil eine bestimmte Transformation zugeordnet. Allerdings können dabei demselben Raumteile verschiedene Transformationen zugeordnet werden; aber dann kann man diese durch die zugehörigen Teile des Linienzuges unterscheiden. Somit darf man in uneigentlichem Sinne auch von einer durch den Linienzug bestimmten Bewegung des Raumteiles sprechen.

Wenn eine gerade Linie durch denselben Punkt P zweimal hindurchgeht, sei es, dafs sie geschlossen ist oder sich selbst in diesem Punkte durchschneidet, so kann die Länge PP in keinem Körper vorkommen; denn sonst müfste es möglich sein, dem Körper eine Lage zu geben, bei welcher verschiedene Punkte des Körpers denselben Punkt des Raumes decken, was nicht angeht.

Die Länge PP darf also nicht unter eine fest bestimmte Gröfse sinken, von welcher Stelle des Raumes man auch ausgeht und welche Gerade man auch wählt. Von dieser Bemerkung werden wir oft Gebrauch machen müssen.

§ 5.

Analytische Bestimmung der allgemein in sich beweglichen Raumformen.

Im Anschlufs an die §§ 24 und 25 des ersten Abschnitts und an die Ergebnisse des zweiten Abschnitts ist in § 14 des dritten Abschnitts gezeigt worden, dafs für einen gewissen endlichen Bereich, der in einem n-dimensionalen Raume passend abgegrenzt ist, sich nur drei Möglichkeiten ergeben und dafs jede von ihnen durch eine gewisse Konstante $1:k^2$, welche als das Krümmungsmafs bezeichnet wird, charakterisiert werden kann. Dann ist es möglich, innerhalb dieses Bereiches die Lage eines jeden Punktes durch n Gröfsen $(x_1 \ldots x_n)$, die Koordinaten, zu bestimmen, in dem Sinne, dafs jedem Punkte des Bereiches ein einziges Wertsystem und jedem hierbei erhaltenen Wertsystem ein einziger Punkt entspricht. Zu dem Zwecke konstruieren wir n Ebenen von $n-1$-Dimensionen, welche sich in einem Punkte des Bereiches schneiden und auf einander senkrecht stehen, und fällen von dem zu bestimmenden Punkte die Senkrechten p_1, $p_2 \ldots p_n$ auf diese Ebenen. Für ein verschwindendes Krümmungsmafs nehmen wir die Längen dieser Senkrechten selbst zu Koordinaten, bei einem endlichen Werte von k^2 aber die Funktionen $k \sin\frac{p_1}{k} \ldots k \sin\frac{p_n}{k}$. Allerdings haben wir, um die Formeln möglichst einfach zu machen, noch eine Gröfse x_0 hinzugefügt, aber diese ist eine Funktion der n übrigen, nämlich gleich $\sqrt{1 - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{k^2}}$.

Es handelt sich jetzt darum, auch jedem andern Punkte des Raumes diejenigen Koordinaten zuzuordnen, welche den obigen Festsetzungen entsprechen. Wir könnten daran denken, die einzelnen Koordinaten-Ebenen zunächst immer weiter auszudehnen und dann wieder die Senkrechten hierauf zu fällen. Aber abgesehen davon, dafs wir nicht von vorn herein beweisen können, dafs von jedem Punkte eine einzige Senkrechte auf eine Ebene gefällt werden kann, dieser Satz vielmehr nicht in voller Allgemeinheit besteht, würden wir gezwungen sein, neue Annahmen zu machen, also das Prinzip verlassen, nach welchem es geboten erscheint, die Axiome auf die geringste Zahl zurückzuführen. Auch in der Praxis gelingt es meistens nicht, die Senkrechten unmittelbar zu messen; vielmehr ist es bei gröfseren Entfernungen notwendig, die Koordinaten auf einem indirekten Wege zu bestimmen.

Wir suchen also nach Merkmalen, welche uns erkennen lassen, dafs die für neue Punkte erhaltenen Koordinaten als Fortsetzung der früheren gelten können. Dazu ist an erster Stelle die Stetigkeit notwendig; d. h. wenn Punkte eine stetige Mannigfaltigkeit im Raume bilden, so müssen ihre Koordinaten auch eine stetige Mannigfaltigkeit von Wertsystemen bilden. Diese Bedingung allein genügt aber nicht; vielmehr mufs eine zweite hinzutreten, in welcher die erste schon eingeschlossen ist. Man lasse einen Körper K_1, welcher in der Ruhelage dem zuerst betrachteten Raumteile angehört, eine gewisse Bewegung machen; durch Vermittlung der Körper K_2, $K_3 \ldots K_{s-1}$ sei man zu einem Körper K_s gelangt und habe den sämtlichen Punkten, welche von K_2, $K_3 \ldots K_{s-1}$, K_s in der Ruhelage gedeckt werden, Koordinaten zugeordnet. Läfst man K_1 eine Bewegung machen, so werden seine Koordinaten Veränderungen unterworfen, welche durch gewisse lineare Gleichungen angegeben werden; dann soll die hierdurch für K_2, $K_3 \ldots K_{s-1}$, K_s hergeleitete Bewegung analytisch dadurch ausgedrückt werden, dafs man die für K_i $(i = 2 \ldots s)$ aufgestellten Koordinaten in dieselben Gleichungen einsetzt. Wir wollen zeigen, dafs eine solche Zuordnung allgemein möglich ist. Nur mufs vorläufig die Frage unerörtert bleiben, ob demselben Punkte nicht verschiedene Koordinatenwerte entsprechen können.

Am übersichtlichsten läfst sich diese Aufgabe für ein verschwindendes Kümmungsmafs lösen. Man gehe von einem Körper aus, der in seinem Innern den Anfangspunkt enthält. Zu allen Punkten, welche der Körper in der Ruhelage deckt, mögen die Koordinaten bestimmt sein, und jedem so erhaltenen Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ soll nur ein einziger Punkt entsprechen. Mit diesem

Körper führe man eine Verschiebung längst der ersten Achse ($x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$) aus. Von dieser Achse liegt nur ein gewisses Stück innerhalb der Ruhelage des Körpers; somit ist auch nur eine endliche dieser Achse angehörende Strecke gegeben, nämlich diejenigen Punkte, für welche die Koordinate x_1 hinlänglich kleine positive und negative Werte erhält. Betrachten wir aber eine zweite durch die Verschiebung erhaltene Lage, und zwar eine solche, bei welcher ein Teil des Körpers noch dem in der Ruhelage gedeckten Raume angehört: so werden hierfür die Koordinaten $x_2 \ldots x_n$ ungeändert bleiben, alle x_1 aber um dieselbe (positive oder negative) Gröfse wachsen. Wir müssen daher dieselbe Bestimmung auch für die neu gedeckten Punkte treffen. Wenn also irgend ein Punkt des Körpers in der Anfangslage den Punkt ($x_1, x_2 \ldots x_n$) des Raumes deckt, so müssen wir demjenigen Punkte, mit dem er in der zweiten Lage zusammenfällt, die Koordinaten ($x_1 + \xi_1, x_2 \ldots x_n$) beilegen, wo ξ_1 von $x_1 \ldots x_n$ ganz unabhängig und nur durch die zweite Lage bestimmt ist. Auf dieselbe Weise können wir aber beliebig fortfahren; wir vergröfsern die gewählte Achse immer mehr und nehmen längs des neu erhaltenen Stückes eine Verschiebung vor. Somit kann die Gröfse ξ_1, um welche alle x_1 wachsen sollen, ganz beliebig angenommen werden, und man kann den Koordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ auch dann noch einen Punkt zuordnen, wenn x_1 beliebig grofs ist, wofern nur die Gröfsen $x_2, x_3 \ldots x_n$ unterhalb derjenigen Grenzen bleiben, welche sich aus der Ruhelage des Körpers ergeben. Durch die vorgenommene Verschiebung möge derjenige Punkt, welcher anfangs den Nullpunkt deckte, in den Punkt (ξ_1, 0, 0, ... 0) gelangen. In dieser Lage gehört dem Körper eine gerade Strecke an, deren Punkte den Gleichungen genügen ($x_3 = x_1 = \ldots = x_n = 0$, $x_1 = \xi_1$). Längs dieser Geraden kann wieder eine Verschiebung des Körpers vorgenommen, dadurch die Gerade selbst verlängert und das hinzugekommene Stück wieder als Achse einer Verschiebung gewählt werden. Auch diese Operation darf man beliebig fortsetzen. Dabei bleiben die Koordinatenwerte $x_3, x_4 \ldots x_n, x_1$ ungeändert, während der Wert von x_2 um eine gewisse Konstante ξ_2 zunimmt. Derjenige Punkt des Körpers, der bei Beginn der ersten Bewegung den Anfangspunkt (0, 0 ... 0) deckt, hat durch die beiden auf einander folgenden Bewegungen eine Lage erhalten, die durch die Koordinaten ($x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \ldots = x_n = 0$) angegeben wird; überhaupt erhält jeder Punkt des Körpers, der anfangs die Koordinaten (x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$) hatte, die Lage ($x_1 + \xi_1$, $x_2 + \xi_2$, $x_3 \ldots x_n$). In dieser neuen Lage gehört dem Körper eine gerade Strecke an, deren Punkte die Koordinaten besitzen $x_4 = \ldots = x_n = 0$, $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$. Man verschiebe den Körper längs dieser Geraden und wiederhole mehrmals den früher vorgenommenen Prozefs; hierdurch kann man jedem Wertsystem $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2 \ldots x_n = \xi_n$ für beliebige Werte von $\xi_1 \ldots \xi_n$ einen einzigen Punkt zuordnen.

Auf der ersten Achse denke man Körper K_1, $K_2 \ldots K_{s-1}$, K_s so neben einander gelegt, dafs je zwei auf einander folgende zusammen hangen und dafs der erste den Punkt $(0, \ldots 0)$, der letzte den Punkt $(\xi_1, 0 \ldots 0)$ enthält. Bei der Verschiebung längs der Geraden ($x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$, $x_1 = \xi_1$) bleiben zunächst für K_s und im Anschlufs daran für $K_{s-1} \ldots K_2$, K_1 die Koordinaten x_3, $x_4 \ldots x_n$, x_1 ungeändert; folglich wird auf dem bezeichneten Wege für K_1 eine Verschiebung längs der Achse ($x_3 = x_4 = \ldots = x_n = x_1 = 0$) vermittelt. Überträgt man dieselbe Betrachtung auf die weiteren Bewegungen, schiebt man also zunächst Körper auf der Linie $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$, $x_1 = \xi_1$ zwischen die beiden Endlagen ein, und entsprechend auf den andern Linien, längs deren eine Verschiebung vorgenommen ist, so erhält man folgende Sätze:

1. Hätte man erst eine Verschiebung längs der Achse $x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$ vorgenommen und dadurch die x_i um ξ_i vergröfsert, dann den Körper längs der Geraden $x_i = \xi_i$, $x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = \ldots = 0$ um ξ_k verschoben, so würde durch die Koordinaten $\xi_1 \ldots \xi_n$ derselbe Punkt bestimmt, wie durch die erste Reihenfolge.

2. Die sämtlichen Punkte, welche der Gleichung $x_i = \xi_i$ für einen gegebenen Wert von ξ_i genügen, liegen auf einer Ebene.

3. Vom Punkte ($\xi_1 \ldots \xi_n$) kann man nach der Ebene $x_i = 0$ eine Gerade ziehen, welche gleich ξ_i ist und auf der Ebene senkrecht steht.

4. Vom Punkte ($\xi_1 \ldots \xi_n$) kann man auf die Ebene $x_i = p_i$ eine Senkrechte ziehen, deren Länge gleich $\xi_i - p_i$ (oder $p_i - \xi_i$) ist.

Im Anschlusse hieran beweisen wir folgende Behauptung:

»Wenn in einem Bereiche die Punkte $\Sigma a_\iota x_\iota = b$ einer Ebene angehören, so genügen die Koordinaten für die Punkte eines benachbarten Bereiches, welche auf der Erweiterung der Ebene liegen, derselben Gleichung.«

Zum Beweise betrachte man einen Bereich C, welcher zum Teil mit dem ersten Bereich A und zum Teil mit dem zweiten B zusammenfällt, mit dem ersteren den Teil C′, mit dem zweiten den Teil C″ gemeinschaftlich hat. Dann gilt die Beziehung für den Teil C′. Wir wählen ein Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt innerhalb C′ liegt, so, dafs die neuen Koordinaten sich von den ursprünglich gewonnenen nur um gewisse Konstanten unterscheiden. Dann können wir für alle Punkte von C die Koordinaten bestimmen und die Gleichung der genannten Ebene in den neuen Koordinaten herleiten. Diese ist für den ganzen Bereich von C linear und unterscheidet sich von der zu Grunde gelegten Form nur durch den Wert der Konstanten b. Hiernach wählt man in B das Koordinaten-System in passender Weise, und da sich die Form der Gleichung für den in C″ liegenden Teil der Ebene unmittelbar ergiebt, so gilt dieselbe Gleichung auch für den ganzen Bereich B. Gehen wir aber jetzt zu den ursprünglichen Koordinaten zurück, so bleiben die Koeffizienten $a_1 \dots a_n$ ungeändert, während die Konstante b ihren ursprünglichen Wert wieder annimmt.

Dasselbe gilt für die Gerade und für die Ebenen von 2, 3 ... n — 2 Dimensionen.

Auf dieselbe Weise zeigt man, dafs, wenn für einen Bereich durch eine Bewegung die Koordinaten stetig nach den Gleichungen umgestaltet werden:

$$(1)\quad y_\iota = \sum_\varkappa a_{\iota\varkappa} x_\varkappa + b_\iota$$

auch die hierdurch für einen benachbarten Bereich vermittelte Bewegung durch dieselben Gleichungen bestimmt wird. Zwischen den Koeffizienten bestehen die Relationen:

$$(2)\quad \sum_\varrho a_{\iota\varrho} a_{\varkappa\varrho} = \delta_{\iota\varkappa} \ (= 1 \text{ oder } = 0) \text{ und}$$

$$(3)\quad \text{Det. } a_{\iota\varkappa} = 1.$$

Wir haben nur zwei zusammenhangende Körper K_0 und K_1 zu betrachten und diese durch einen Körper K' zu ersetzen, welcher zum Teil den (früheren) Raum von K_0 und den von K_1 einnimmt. Für einen Teil dieses Körpers gelten die Gleichungen (1) mit den Beziehungen (2) und (3); dann leitet man die Gültigkeit auch für den andern Teil von K' her; somit müssen diese Gleichungen für den Körper K_1 gelten.

Die Punkte eines Körpers K_1 mögen in der Anfangslage die Koordinaten $x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}$ haben, und man sei durch stetige Veränderung dieser n Gröfsen zu Koordinaten $x_1^{(\nu)} \dots x_n^{(\nu)}$ gelangt, welche von einem Körper K_ν eingenommen werden. Man schiebe Körper $K_2 \dots K_{\nu-1}$ ein, welche imstande sind, den oben bezeichneten Übergang zu vermitteln; d. h. wenn die Koordinaten von K_2 sind $x_1^{(2)} \dots x_n^{(2)} \dots$ und von $K_{\nu-1} : x_1^{(\nu-1)} \dots x_n^{(\nu-1)}$, so mögen auch je auf einander folgende Wertsysteme Zusammenhang haben, und jedes Wertsystem, welches vorher den Übergang von $x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}$ zu $x_1^{(\nu)} \dots x_n^{(\nu)}$ vermittelte, soll einem Punkte eines der Körper $K_2 \dots K_{\nu-1}$ entsprechen. Läfst man jetzt den Körper K_1 eine Bewegung machen und wird diese Bewegung dadurch dargestellt, dafs man in die Gleichungen (1) die Werte $x^{(1)}$ einsetzt, so wird die für K_ν vermittelst der Körper $K_2 \dots K_{\nu-1}$ hergeleitete Bewegung dadurch analytisch dargestellt, dafs man in dieselben Gleichungen die Werte $x^{(\nu)}$ einsetzt.

Die vorstehenden Betrachtungen kann man noch übersichtlicher machen durch eine Anordnung, welche wir zunächst für den dreidimensionalen Raum darlegen wollen. Wir gehen aus von einem Würfel, der so klein ist, dafs der mit der doppelten Kante konstruierte Würfel noch ganz in dem anfänglich untersuchten Bereiche liegen kann. Diesen Würfel legen wir mit einem Eckpunkt in den Anfangspunkt und mit drei Flächen in die Koordinatenebenen hinein. Solcher Würfel konstruiert man beliebig viele so, dafs je zwei mit einer Fläche und in vier Ecken zusammenstofsen, und stellt die angegebenen Untersuchungen nur stets für zwei derartig an einander liegende Würfel an. Im n-dimensionalen Raume ersetzt man den Würfel durch denjenigen regelmäfsigen Körper, welcher 2^n Ecken hat und von $2n$ regelmäfsigen $(n-1)$-dimensionalen Gebilden eingeschlossen wird.

Wir erhalten also folgenden Satz:

Wenn ein gewisses endliches Gebiet des Raumes die Eigenschaften eines n-dimensionalen euklidischen Raumes besitzt, so dafs die Winkelsumme für jedes darin enthaltene Dreieck zwei Rechte beträgt, so kann man jedem Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ einen Punkt in der Weise zuordnen, dafs alle einer linearen Gleichung zwischen $x_1 \ldots x_n$ genügenden Punkte auf einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene liegen, und dafs die gleichzeitige Bewegung zweier fest mit einander verbundener Körper durch dieselben Gleichungen dargestellt wird.

Hier entspricht jedem Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ ein einziger Punkt. Es ist offenbar gestattet, auch umgekehrt jedem Punkte nur ein einziges Wertsystem zuzuordnen. Aber wir haben die Frage zu stellen, ob diese Zuordnung auch notwendig ist. Mit der Beantwortung dieser Frage wollen wir uns in den folgenden Paragraphen eingehend beschäftigen. Jetzt stellen wir für die Raumform die Bedingung, als Ganzes allgemein bewegt werden zu können; d. h. wenn wir von einer beliebigen Bewegung eines festen Körpers ausgehen, so soll die hieraus für einen zweiten festen Körper hergeleitete Bewegung unabhängig sein von den vermittelnden Körpern. Dieser Forderung genügt man offenbar, wenn man jedem Punkte ein einziges Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ zuordnet; wir wollen nachweisen, dafs man die aufgestellte Forderung auf keine andere Weise befriedigen kann. Zu dem Ende nehmen wir an, die Koordinaten $(x_1' \ldots x_n')$ und $(x_1'' \ldots x_n'')$ stellten denselben Punkt dar. Dann mufs bei jeder Bewegung, bei der $(x_1' \ldots x_n')$ in Ruhe gehalten wird, auch $(x_1'' \ldots x_n'')$ in Ruhe bleiben. Jede derartige Bewegung läfst sich durch Zusammensetzung von $\frac{n(n-1)}{2}$ Drehungen erhalten, von denen jede durch die Gleichungen dargestellt wird:

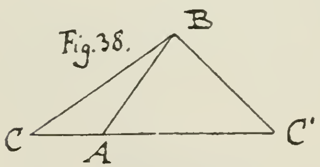
$$y_\iota - x_\iota' = (x_\iota - x_\iota') \cos\varphi - (x_\varkappa - x_\varkappa') \sin\varphi$$
$$y_\varkappa - x_\varkappa' = (x_\iota - x_\iota') \sin\varphi + (x_\varkappa - x_\varkappa') \cos\varphi$$
$$y_\varkappa = x_\lambda \quad (\text{für } \lambda \gtrless \iota \gtrless \varkappa;\ \iota,\ \varkappa,\ \lambda = 1 \ldots n).$$

Soll hier für $x_1 = x_1'' \ldots x_n = x_n''$ auch $y_1 = x_1 \ldots y_n = x_n$ sein, so mufs entweder die Gleichung $2 - 2\cos\varphi = 0$ bestehen oder es mufs sein $x_\varkappa = x_\varkappa'$, $x_\iota'' = x_\iota'$. Da aber für ein beliebiges φ die erste Gleichung nicht befriedigt werden kann, so folgt $x_\iota = x_\iota'$ für $\iota = 1 \ldots n$. Somit entspricht jedem Punkte nur ein einziges Wertsystem, und es zeigt sich, dafs nur die euklidische Raumform den gestellten Forderungen genügt.

Die vorstehend für einen Raum von verschwindender Krümmung durchgeführte Entwicklung läfst sich nicht unmittelbar auf die übrigen Raumformen übertragen. Statt die Änderungen im einzelnen anzugeben, ziehen wir es vor, einen zweiten, durchaus selbständigen Weg zu verfolgen, welcher für alle Raumformen gleichmäfsig gilt und nur den einen Nachteil besitzt, nicht so anschaulich zu sein, wie der mitgeteilte. Bei der Darstellung werden wir stets einen endlichen Wert von k^2 voraussetzen; die Änderungen, welche für einen unendlich grofsen Wert angebracht werden müssen, sind so geringfügig, dafs sie nicht erwähnt zu werden brauchen.

In den §§ 24 und 25 des ersten Abschnittes (S. 80) sind wir von einem Bereich ausgegangen, welcher die Eigenschaft besitzt, dafs durch je zwei Punkte desselben nur eine einzige ganz dem Bereich angehörige gerade Strecke gelegt werden kann. Ein solcher Bereich soll auch den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegen. Wie wir dort bewiesen haben, gelten für jedes hierin enthaltene geradlinige Dreieck die trigonometrischen Formeln; namentlich werden wir von den Gleichungen (8), (9), (10) des § 24 vielfachen Gebrauch machen. Wir haben zunächst nachzuweisen, dafs dieselben Gleichungen für jedes geradlinige Dreieck gelten. Zu dem Ende legen wir zwei Dreiecke ABC und ABC′ zu Grunde, welche eine Seite AB gemeinschaftlich haben und in denen die Seite AC′ des zweiten auf der Verlängerung CA des ersten liegt. Wir nehmen ferner an, dafs für jedes dieser Dreiecke die entwickelten Gleichungen gelten, und wollen nachweisen, dafs auch die Seiten und Winkel des Dreiecks BCC′ durch dieselben Beziehungen mit einander verbunden sind.

Fig. 38.



Die Seiten BC, CA, AB und die gegenüberliegenden Winkel A, B, C des ersten Dreiecks mögen der Reihe nach mit a, b, c; α, β, γ und die entsprechenden Seiten und Winkel des zweiten mit a′, b′, c′; α', β', γ' bezeichnet werden. Nach unserer Annahme ist $c' = c$, $\alpha + \alpha' = \pi$, also $\sin \alpha' = \sin \alpha$, $\cos \alpha' = -\cos \alpha$. Dann folgt unmittelbar:

$$\sin \frac{a}{k} \sin \gamma = \sin \frac{c}{k} \sin \alpha = \sin \frac{c'}{k} \sin \alpha' = \sin \frac{a'}{k} \sin \gamma'.$$

Ferner ist:

$$\cos \frac{a}{k} = \cos \frac{b}{k} \cos \frac{c}{k} + \sin \frac{b}{k} \sin \frac{c}{k} \cos \alpha$$

$$= \cos \frac{b'}{k} \cos \frac{c'}{k} - \sin \frac{b'}{k} \sin \frac{c'}{k} \cos \alpha'.$$

Setzt man hierin für

$$\cos \frac{c'}{k} \text{ den Wert } \cos \frac{b'}{k} \cos \frac{a'}{k} + \sin \frac{b'}{k} \sin \frac{a'}{k} \cos \gamma'$$

und für

$$\sin \frac{c'}{k} \cos \alpha' \text{ den Wert } \sin \frac{b'}{k} \cos \frac{a'}{k} - \sin \frac{a'}{k} \cos \frac{b'}{k} \cos \gamma'$$

ein, so folgt unmittelbar:

$$\cos \frac{a}{k} = \cos \frac{b+b'}{k} \cos \frac{a'}{k} + \sin \frac{b+b'}{k} \sin \frac{a'}{k} \cos \gamma'.$$

Genau so leitet man die Gleichungen für $\cos \frac{a'}{k}$, $\cos \gamma$ und $\cos \gamma'$ her. Diese Formeln genügen aber, um auch die weiteren Beziehungen zwischen a, a′, b + b′, γ, γ', $\beta + \beta'$ zu entwickeln. Es ist aber vielleicht ganz gut, auch die weiteren Gleichungen direkt zu verifizieren. So erhält man durch Multiplikation:

$$\cos \frac{b}{k} \cos \frac{b'}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \frac{a'}{k} - \cos \frac{a}{k} \cos \frac{a'}{k} \sin^2 \frac{c}{k}$$

$$+ \cos \frac{a}{k} \sin \frac{a'}{k} \cos \frac{c}{k} \sin \frac{c}{k} \cos \beta' + \cos \frac{a'}{k} \sin \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k} \cos \frac{c}{k} \cos \beta$$

$$+ \sin \frac{a}{k} \sin \frac{a'}{k} \cos \beta \cos \beta' - \sin \frac{a}{k} \sin \frac{a'}{k} \cos^2 \frac{c}{k} \cos \beta \cos \beta'.$$

Im zweiten Gliede der rechten Seite setze man:

$$\cos \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k} = \sin \frac{b}{k} \cos \alpha + \sin \frac{a}{k} \cos \frac{c}{k} \cos \beta$$

$$\text{und } \cos \frac{a'}{k} \sin \frac{c}{k} = -\sin \frac{b'}{k} \cos \alpha + \sin \frac{a'}{k} \cos \frac{c}{k} \cos \beta'.$$

Dadurch erhält man:

$$\cos \frac{b}{k} \cos \frac{b'}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \frac{a'}{k} + \sin \frac{a}{k} \sin \frac{a'}{k} \cos \beta \cos \beta' + \sin \frac{b}{k} \sin \frac{b'}{k} \cos^2 \alpha,$$

da die beiden Produkte:

$$\sin\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}\cos\beta\left(\sin\frac{b'}{k}\cos\alpha-\sin\frac{a'}{k}\cos\frac{c}{k}\cos\beta'+\cos\frac{a'}{k}\sin\frac{c}{k}\right)$$

und

$$\sin\frac{a'}{k}\cos\frac{c}{k}\cos\beta'\left(-\sin\frac{b}{k}\cos\alpha-\sin\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}\cos\beta+\cos\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\right)$$

als verschwindend wegfallen. Durch Subtraktion von $\sin\frac{b}{k}\sin\frac{b'}{k}$ folgt hieraus:

$$\cos\frac{b+b'}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{a'}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{a'}{k}\cos\beta\cos\beta'-\sin\frac{b}{k}\sin\frac{b'}{k}\sin^2\alpha,$$

welche Gleichung infolge der Beziehung:

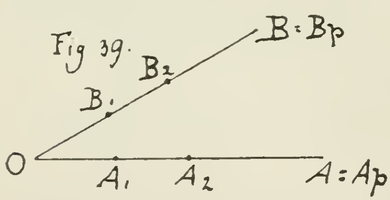
$$\sin\frac{b}{k}\sin\frac{b'}{k}\sin^2\alpha=\sin\frac{a}{k}\sin\frac{a'}{k}\sin\beta\sin\beta'$$

übergeht in

$$\cos\frac{b+b'}{k}=\cos\frac{b}{k}\cos\frac{b'}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{a'}{k}\cos(\beta+\beta').$$

In ähnlicher Weise lassen sich die weiteren Gleichungen verifizieren.

Nun lasse man von einem Punkte 0 zwei gerade Linien OA und OB ausgehen und nehme an, es sei möglich, auf jeder dieser Linien p Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots A_p$ und $B_1, B_2, B_3 \ldots B_p$, wo A_p mit A und B_p mit B zusammenfällt, so anzunehmen, dafs je zwei zusammengehörige Punktepaare $A_i A_{i+1}$, $B_i B_{i+1}$ für $i = 1 \ldots p-1$ einem Bereiche von der vorausgesetzten Beschaffenheit angehören und dafs dasselbe für die drei Punkte OA_1B_1 gilt (Fig. 39).



Dann ist die Gültigkeit der trigonometrischen Formeln direkt erwiesen für OA_1B_1 und für jedes Dreieck $A_i A_{i+1} B_i$ und $A_{i+1} B_i B_{i+1}$. Somit gelten diese Gleichungen auch für das Dreieck OA_2B_1 und indem man hierzu $A_2B_1B_2$ hinzunimmt, für OA_2B_2. Auf gleiche Weise kann man zu jedem Dreieck OA_iB_i erst $A_iA_{i+1}B_i$ und dann $A_{i+1}B_iB_{i+1}$ hinzunehmen und beweist dadurch schliefslich die Gültigkeit auch für das Dreieck OAB. Mit diesem Dreieck kann man aber wieder ein Dreieck OBB vereinigen, wo die Punkte ABB′ in derselben geraden Linie liegen und wo das zweite Dreieck gewissen Beschränkungen unterliegt. Dadurch zeigt man allmählich, dafs die trigonometrischen Formeln für jedes Dreieck gelten.

Um jetzt die Koordinatenbestimmung ganz allgemein durchzuführen, gehen wir wieder von einem allseitig begrenzten Gebiete aus, welches die angegebenen Eigenschaften besitzt. Einen Punkt desselben wählt man zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems und bestimmt geometrisch auf dem öfters angegebenen Wege für die Punkte des Gebiets die Koordinaten $x_0, x_1 \dots x_n$. So sei in diesem Bereiche ein Punkt $(\xi_0, \xi_1 \dots \xi_n)$ angenommen und durch diesen Punkt und den Anfangspunkt eine gerade Linie gelegt. Diese Linie kann unbegrenzt verlängert werden, wofern man davon absieht, dafs möglicherweise die Gerade wieder durch einen frühern Punkt hindurchgeht. Man kann also auf der Geraden jede beliebige Länge l vom Nullpunkte aus erhalten. So lange die Punkte $(x_0, x_1 \dots x_n)$ innerhalb des gewählten Bereiches liegen, mufs die Beziehung bestehen:

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = \xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_n.$$

Wird die Länge vom Nullpunkte bis zum Punkte ξ mit λ bezeichnet, so mufs, wofern die Länge l noch ganz dem gewählten Bereiche angehört, sein:

$$(4)\quad x_0 = \cos\frac{l}{k},\ x_\iota = \frac{\xi_\iota \sin\frac{l}{k}}{\sin\frac{\lambda}{k}} = k \sin\frac{l}{k} \sin\alpha_\iota,$$

wo α_ι den Winkel bezeichnet, unter dem das zunächst gewählte Stück der Geraden gegen die Ebene $x_\iota = 0$ geneigt ist. Diese Beziehungen müssen aber für jede Länge l gelten; sie sind also geeignet, jedem Punkte, zu dem man durch die Verlängerung der geraden Linie gelangt, ein Wertsystem $x_0, x_1 \dots x_n$ zuzuordnen. Nur diejenigen Punkte müssen vorläufig ausgeschlossen werden, für welche $l = \mu k \pi$ bei einem ganzzahligen Werte von μ ist, da infolge der Multiplikation mit null die anfangs benutzten Gröfsen $\xi_1 \dots \xi_n$, resp. $\alpha_1 \dots \alpha_n$ ganz ausfallen. Im übrigen ist durch den Wert von l und durch die von $\alpha_1 \dots \alpha_n$ ein einziger Punkt bestimmt.

Die Werte von $x_0, x_1 \dots x_n$ können nicht beliebig gewählt werden. Aus der bereits bewiesenen Gleichung:

$$\xi_1{}^2 + \ldots + \xi_n{}^2 = k^2 \sin^2 \frac{\lambda}{k}$$

folgt

$$x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 = k^2 \sin^2 \frac{l}{k}$$

und daraus:

$$(5) \quad k^2 x_0{}^2 + x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 = k^2.$$

Nachdem $x_0, x_1 \ldots x_n$ so gewählt sind, dafs sie dieser Gleichung genügen, kann man bei einem positiven Werte von k^2 eine Reihe von Werten für l hieraus berechnen und jedem solchen (mit Ausnahme eines Wertes $\mu k \pi$) einen einzigen Punkt zuordnen. Für ein negatives k^2 mufs der Wert von x_0 positiv und gröfser als eins sein, und wenn dann noch $x_1 \ldots x_n$ so gewählt sind, dafs sie der Relation (5) genügen, so folgt ein einziger Wert von l; hier wird also durch beliebige Werte von $x_1 \ldots x_n$ stets ein einziger Punkt bestimmt.

Obwohl es für das folgende nicht notwendig ist, möchte ich darauf hinweisen, dafs, wofern für die Punkte einer (n—1)-dimensionalen Ebene, soweit sie dem zu Grunde gelegten Bereiche angehören, die Gleichung besteht:

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_0 = 0,$$

diese Gleichung auch für die durch Erweiterung der Ebene erhaltenen Punkte gilt. Zieht man nämlich durch den Anfangspunkt eine beliebige Gerade in dieser Ebene, so mufs diese Gerade ganz in der Ebene liegen. Da aber die Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ für alle Punkte der Geraden mit derselben Gröfse multipliziert werden, so genügen auch die Koordinaten der neu erhaltenen Punkte derselben Gleichung. Speziell stellt die Gleichung $x_\iota = 0$ eine Koordinatenebene in ihrer ganzen Ausdehnung dar.

Durch den oben angegebenen Prozefs sei man vom Anfangspunkte O aus zu zwei Punkten A und B gelangt, wo l und l' die entsprechenden Längen, und $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Neigungswinkel der Geraden OA, $\alpha_1' \ldots \alpha_n'$ die von OB gegen die Koordinatenebenen sind. Für A mögen sich die Koordinaten x_0, $x_1 \ldots x_n$ und für B die x_0', $x_1' \ldots x_n'$ ergeben. Zieht man eine gerade Strecke von A nach B und bezeichnet ihre Länge mit a, so mufs die Gleichung bestehen:

$$k^2 \cos\frac{a}{k} = k^2 \cos\frac{l}{k}\cos\frac{l'}{k} + k^2 \sin\frac{l}{k}\sin\frac{l'}{k}\cos\varphi,$$

wo φ den Winkel AOB bezeichnet. Wählt man auf OA in hinlänglicher Nähe λ von O einen Punkt ξ und ebenso auf OB in hinlänglicher Nähe λ' von O einen Punkt ξ', so ist, wie wir früher bewiesen haben:

$$k^2 \sin\frac{\lambda}{k}\sin\frac{\lambda'}{k} \cdot \cos\varphi = \xi_1\xi_1' + \ldots + \xi_n\xi_n'.$$

Infolge der Gleichung (4) ist

$$x_k x_k' = \frac{\sin\frac{l}{k}\sin\frac{l'}{k}}{\sin\frac{\lambda}{k}\sin\frac{\lambda'}{k}}\xi_k\xi_k',$$

und somit

$$k^2 \sin\frac{l}{k}\sin\frac{l'}{k}\cos\varphi = x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n'.$$

Da zudem

$$\cos\frac{l}{k} = x_0,\ \cos\frac{l'}{k} = x_0'$$

ist, so folgt:

$$(6)\quad k^2 \cos\frac{a}{k} = k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n'.$$

Aus dieser Betrachtung erhellt, dafs die obige Zuordnung der Punkte zu den Koordinatenwerten stetig ist. Nimmt man nämlich die Wertsysteme $x_0, x_1 \ldots x_n$ und $x_0', x_1' \ldots x_n'$, sowie die Längen l und l' hinreichend wenig von einander verschieden an, so wird auch der Abstand der entsprechenden Punkte beliebig klein gemacht werden können.

Ferner geht hieraus hervor, dafs die Zuordnung auch für die vorläufig ausgeschlossenen Werte $l = \mu k\pi$ bei ganzzahligem μ gültig bleibt. Nimmt man nämlich die Punkte A und B so an, dafs l und l' beide dem Werte $\mu k\pi$ hinlänglich nahe kommen, so wird der Abstand a sich beliebig klein machen lassen. Folglich kann der Entfernung $\mu k\pi$ nur ein einziger Punkt entsprechen.

Das System der in der angegebenen Weise bestimmten Gröfsen $x_0, x_1 \ldots x_n$ nennen wir ein Weierstrafssches Koordinaten-System. Ersetzen wir die gewählten Ebenen durch n andere, die ebenfalls auf einander senkrecht stehen, und bestimmen mit ihrer Hülfe die neuen Koordinaten $y_0, y_1 \dots y_n$, so gelten auch für diese die Beziehungen (5) und (6). Statt also die Gröfsen $x_0, x_1 \dots x_n$ und $y_0, y_1 \dots y_n$ vermittelst geometrischer Betrachtungen in einander überzuführen, kann man, wie wir in III § 9 S. 205 gethan haben, die Gleichungen (5) und (6) benutzen, deren allgemeine Gültigkeit wir bewiesen haben. Aus den Formeln, die zwischen den Variabeln in zwei verschiedenen Weierstrafsschen Koordinatensystemen bestehen, läfst sich ein sehr einfacher Beweis dafür herleiten, dafs die Formeln der analytischen Geometrie ganz allgemein gelten. Indessen ist es auch nicht schwer, die wichtigsten Beziehungen direkt zu entwickeln.

So seien zwei Punkte x' und x'' hinreichend nahe bei einander gegeben. Sucht man die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche von ihnen gleichen Abstand haben, so erhält man die homogen lineare Gleichung:

$$(7)\quad k^2 x_0 (x_0' - x_0'') + x_1 (x_1' - x_1'') + \dots + x_n (x_n' - x_n'') = 0.$$

Diese Gleichung stellt also in der Umgebung der Punkte x' und x'' eine Ebene dar. Ersetzt man den Punkt x' durch irgend einen andern Punkt des Bereiches, so kann man einen Punkt x'' so bestimmen, dafs die Gleichung (7) nur mit einem konstanten Faktor multipliziert wird, wofern man die Punkte x' und x'' hierin durch das neue Punktepaar ersetzt. Der gewählte Bereich möge mit M bezeichnet werden; N sei ein zweiter derartiger Bereich, welcher mit M teilweise zusammenfällt. Wählt man zwei Punkte y' und y'' in gleichem Abstande von der Ebene und in dem Teile, welcher M und N gemeinschaftlich ist, so wird man als geometrischen Ort der Punkte gleichen Abstandes (bis auf einen konstanten Faktor) wieder die Gleichung (7) erhalten. Diese Gleichung gilt dann sowohl für den Bereich M wie für N; also genügt die Fortsetzung der Ebene in den Bereich N wieder der obigen Gleichung. Auf diese Weise kann man beliebig fortfahren und findet, dafs die ganze Ebene der Gleichung (7) genügt.

Setzt man zwischen den Koeffizienten in der Gleichung einer Ebene:

$$(8)\quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

die Beziehung fest:

$$(9)\quad \frac{a_0^2}{k^2} + a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1,$$

so gilt für jeden Punkt y des Raumes die Beziehung:

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n = k \sin \frac{r}{k},$$

wo r den senkrechten Abstand des Punktes von der Ebene bezeichnet. Das folgt einfach daraus, dafs die trigonometrischen Formeln ganz allgemein gelten. Somit ist für jeden Punkt des Raumes:

$$x_\iota = k \sin \frac{p_\iota}{k},$$

wo p_ι die Länge einer geraden Strecke ist, welche vom Punkte x ausgeht, bis zur Ebene $x_1 = 0$ reicht und auf ihr senkrecht steht.

Setzen wir jetzt für einen Körper in irgend einem Teile des Raumes eine Bewegung voraus, so wird diese für den Körper selbst durch die bekannten Gleichungen angegeben, in denen die Koeffizienten Funktionen der Zeit sind. Wir ersetzen den Körper durch einen andern, welcher in seiner Anfangslage nur einen Teil desjenigen Raumes deckt, den der zuerst gewählte Körper in der Anfangslage einnahm. Auch jetzt wird die Bewegung wieder durch dieselben Gleichungen bestimmt; diese gelten also auch für diejenigen Punkte, welche nur dem zweiten, aber nicht dem ersten Körper in der Anfangslage angehören. In dieser Weise können wir aber beliebig fortfahren, und wir erhalten stets dieselben Gleichungen. Dadurch können wir für jeden beliebigen zweiten Körper eine einzige Bewegung erhalten. Diese Bewegung des zweiten Körpers wird aber jedesmal hergeleitet, wenn die Einschiebung neuer Körper zwischen die beiden gegebenen in einer Weise erfolgt, wie sie dem analytischen Übergange von den Koordinaten des ersten zu denen des zweiten Körpers entspricht. Daraus folgt der Satz:

»Sind zwei Körper K_1 und K_s beliebig im Raume und ist für K_1 irgend eine Bewegung gegeben, so kann man stets zwischen K_1 und K_s weitere Körper $K_2 \ldots K_{s-1}$, von denen je zwei auf einander folgende zusammenhangen, so einschieben, dafs die hierdurch für K_s hergeleitete Bewegung durch dieselben Gleichungen bestimmt wird, wie die für K_1 gegebene Bewegung.«

Wir wollen jetzt nachweisen, dafs nach Annahme der Koordinatenebenen und der Längeneinheit durch die obige Festsetzung jedem Wertsystem $x_0, x_1 \ldots x_n$ nur ein einziger Punkt zugeordnet ist. Das ist an sich klar für ein verschwindendes Krümmungsmafs; denn hierfür gehen die Gleichungen (4) über in: $x_i = l \sin \alpha_i$, wo α_i den Winkel bezeichnet, den ein vom Nullpunkt ausgehendes Linienelement mit der Ebene $x_i = 0$ bildet. Da jetzt

$$\sin^2\alpha_1 + \ldots + \sin^2\alpha_n = 1$$

ist, so sind durch $x_1 \ldots x_n$ die Gröfsen l, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ eindeutig bestimmt. Ebenso kann man für ein negatives k^2 den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ ganz beliebige reelle Werte beilegen. Da $x_0 > 1$ ist, so folgt hieraus ein einziger Wert von x_0 und von l, also auch ein einziger Punkt. Aber für ein positives k^2 mufs man die Variabeln $x_1 \ldots x_n$ so wählen, dafs der Wert des Ausdrucks $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq k^2$ ist; dann liefert die Gleichung (5) zwei verschiedene Werte von x_0, und nachdem einer von diesen gewählt ist, erhält man für die Länge l noch unendlich viele Werte, die sich um Vielfache von $2k\pi$ unterscheiden. Wir können aber zeigen, dafs jede gerade Linie in sich zurückkehrt, wenn man sie um eine Strecke $2k\pi$ verschiebt.

Zu dem Ende bringen wir an der in I § 18, h) S. 56 durchgeführten Betrachtung eine kleine Änderung an, die wir zunächst für eine zweidimensionale Ebene erläutern wollen. Von einem Punkte A lassen wir eine gerade Strecke AB ausgehen, deren Länge $\frac{1}{2}k\pi$ beträgt. Ein Körper möge in der Ruhelage den Punkt A, ein anderer den Punkt B enthalten; wir verbinden die beiden Körper durch eine Reihe von Körpern, die zu zweien zusammenhangen und von denen jeder ein Stück der Geraden AB einschliefst. In A errichten wir auf der Ebene die Senkrechte und drehen den ersten Körper um diese Gerade. Dadurch wird für den durch B gehenden Körper eine Bewegung vermittelt, bei der der Punkt B eine Gerade beschreibt. Diese Gerade wird in sich verschoben, und wenn man den ersten Körper eine Drehung von der Gröfse φ machen läfst, so beschreibt jeder Punkt der durch B gehenden Geraden eine Strecke von der Gröfse $\frac{1}{2}k\varphi$. Erreicht die Drehung um die in A errichtete Senkrechte die Gröfse 2π (ist eine volle Umdrehung erfolgt), so gelangt jeder Teil des ersten Körpers in seine Anfangslage; folglich mufs auch jeder vermittelnde Körper wieder die Anfangslage decken; somit wird auch jeder Punkt der von B beschriebenen Geraden wieder in seine Anfangslage zurückkehren. Dabei hat aber jeder Punkt eine Verschiebung um $2k\pi$ gemacht; diese führt also in die Anfangslage zurück.

Im dreidimensionalen Raume lassen wir einen Körper K_1 sich längs einer in ihm enthaltenen Geraden g verschieben. Durch g legen wir eine beliebige Ebene, errichten in ihr auf g eine Senkrechte h und schneiden auf ihr vom Fufspunkte aus eine Strecke $= \frac{1}{2} k\pi$ ab. Man legt einen Körper K_s so, dafs er den Endpunkt dieser Linie enthält, und nimmt zur Vermittlung Körper $K_2 \ldots K_{s-1}$, auf denen je zusammenstofsende Stücke der Linie h liegen. Dadurch wird für K_s eine Drehung um eine gewisse Gerade g' bestimmt. Wenn jetzt K_1 um die Länge $2k\pi$ verschoben wird, so vollendet K_s um g' eine volle Umdrehung; folglich gelangt jeder Punkt von K_s in seine Anfangslage zurück. Somit mufs auch zugleich K_1 seine Anfangslage wieder erlangen.

Ähnliches gilt im n-dimensionalen Raume; hier entspricht einer Verschiebung längs einer Geraden die Drehung um eine (n—2)-dimensionale Ebene.

Ein zweiter Beweis berücksichtigt nur einen einzigen festen Körper und läfst ihn längs einer Geraden verschoben werden. Darauf wollen wir jedoch nur hinweisen. Wir sehen, dafs jeder Punkt wieder erlangt wird, wenn man sich in irgend einer von ihm ausgehenden Geraden um die Strecke $2k\pi$ bewegt, dafs also einem gegebenen Wertsystem $x_0, x_1 \ldots x_n$ nur ein einziger Punkt entspricht.

Dadurch ist der Satz gewonnen:

»Wenn ein festes Weierstrafssches Koordinatensystem zu Grunde gelegt wird, so ist durch $n+1$ Gröfsen $x_0, x_1 \ldots x_n$, welche der Bedingung (5) genügen, in der angegebenen Weise ein einziger Punkt bestimmt.«

Die vorstehenden Entwicklungen gelten ganz allgemein; sie setzen nur voraus, dafs um jede Stelle des Raumes ein endliches Gebiet abgegrenzt werden kann, welches den von Euklid für das Endliche aufgestellten Bedingungen genügt. Jetzt fügen wir die Bedingung hinzu, dafs jeder Bewegung eines festen Körpers eine Bewegung des Raumes entspricht, oder genauer ausgedrückt, dafs durch die Bewegung eines starren Körpers auch für jeden in irgend einem andern Teile des Raumes gelegenen Körper die zugeordnete Bewegung eindeutig bestimmt wird. Wir haben aber bereits gesehen, dafs diese Forderung immer erfüllt wird, wenn man jedem Wertsystem $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ einen einzigen Punkt zuordnet. Jede Bewegung wird dann durch Gleichungen:

$$(10)\quad y_i = \varphi_i(x_0, x_1 \ldots x_n) \qquad (i = 0, 1 \ldots n)$$

bestimmt. Wir haben zu untersuchen, ob dieselbe Bedingung auch befriedigt werden kann, wenn man einem Punkte verschiedene Koordinatenwerte beilegt. Wenn aber derselbe Punkt sowohl durch die Koordinaten $(x_0, x_1 \ldots x_n)$, wie durch $(x_0', x_1' \ldots x_n')$ bestimmt wird, so mufs sich auch durch die Gleichungen

$$y_i' = \varphi_i(x_0', x_1' \ldots x_n')$$

jedesmal ein Punkt $(y_0', y_1' \ldots y_n')$ ergeben, welcher mit dem Punkte $(y_0, y_1 \ldots y_n)$ zusammenfällt. Speziell betrachte man alle diejenigen Bewegungen, bei denen ein fest gewählter Punkt in Ruhe bleibt. Wenn die Koordinaten des ruhenden Punktes sind $(x_0', x_1' \ldots x_n')$, so mufs für die entsprechenden Bewegungsgleichungen sein:

$$(11)\quad x_i' = \varphi_i(x_0', x_1' \ldots x_n') \qquad (i = 0, 1, \ldots n).$$

Nun möge derselbe Punkt auch durch $x_0'', x_1'' \ldots x_n''$ dargestellt werden; dann werden alle Bewegungsgleichungen, welche der Bedingung (11) genügen, auch befriedigt werden für

$$x_i'' = \varphi_i(x_0'', x_1'' \ldots x_n'').$$

Das ist aber sowohl für $k^2 = \infty$ wie für $k^2 < 0$ unmöglich. Legt man z. B. für $k^2 = \infty$ und für zwei Dimensionen die Gleichungen zu Grunde:

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1 - a_1)\cos\varphi - (x_2 - a_2)\sin\varphi + a_1 \\ y_2 &= (x_1 - a_1)\sin\varphi + (x_2 - a_2)\cos\varphi + a_2, \end{aligned}$$

so wird hierdurch eine Bewegung bestimmt. Soll in diesen Gleichungen $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ sein, so mufs für $\cos\varphi < 1$ notwendig $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ sein. Ebenso kann man bei drei Dimensionen zwei Bewegungen durch die Gleichungen charakterisieren:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= (x_2 - a_2)\cos\varphi - (x_3 - a_3)\sin\varphi + a_2 \\ y_3 &= (x_2 - a_2)\sin\varphi + (x_3 - a_3)\cos\varphi + a_3 \end{aligned}$$

und durch:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1 - a_1)\cos\psi - (x_3 - a_3)\sin\psi + a_1, \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= (x_1 - a_1)\sin\psi + (x_3 - a_3)\cos\psi + a_3. \end{aligned}$$

Bei der ersten Bewegung bleiben alle Wertsysteme $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$ ungeändert, und nur diese; bei der zweiten $x_1 = a_1$, $x_3 = a_3$. Sollte also der Punkt (a_1, a_2, a_3), der bei beiden Bewegungen in Ruhe bleibt, auch noch die Koordinaten (b_1, b_2, b_3) haben, so müfsten beide Gleichungssysteme auch für $y_\iota = x_\iota = b_\iota$ erfüllt werden, was unmöglich ist.

Ebenso denke man sich für ein negatives k^2 bei drei Dimensionen von einem Punkte aus zwei gerade Linien gezogen und um jede von diesen eine Drehung ausgeführt. Die beiden Systeme von Bewegungsgleichungen lassen nur ein einziges Quadrupel von Koordinaten ungeändert; da jedem Quadrupel, wie wir bereits wissen, ein einziger Punkt entspricht, für verschiedene Quadrupel, die zu demselben Punkte gehören, alle Bewegungsgleichungen dieselben Werte liefern müssen, so ist die Beziehung zwischen den Koordinaten und den Punkten eindeutig. Ähnliche Betrachtungen können für jede Zahl von Dimensionen angestellt werden.

Wenn bei einem negativen k^2 die Bewegungsgleichungen $y_\iota = \varphi_\iota(x_0, x_1 \ldots x_n)$ für $y_\iota = x_\iota = x_\iota'$ befriedigt werden, so genügt man diesen Gleichungen auch für $y_\iota = x_\iota = -x_\iota'$; aber bei einem negativen Werte von x_0 stellen $x_0, x_1 \ldots x_n$ keinen reellen Punkt dar. Anders ist es bei einem positiven Werte von k^2; hier darf man also annehmen, (was auch schon früher bewiesen ist), dafs die Punkte $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ und $(-x_0, -x_1 \ldots -x_n)$ identisch sind. In der That erhält man in der Gleichung (10) statt $y_0, y_1 \ldots y_n$ jedesmal $-y_0, -y_1 \ldots -y_n$, wenn man $x_0, x_1 \ldots x_n$ durch $-x_0, -x_1 \ldots -x_n$ ersetzt. Aber andere Möglichkeiten sind nicht vorhanden. Wir gelangen also zu folgendem Resultate:

»Es giebt nur vier Raumformen, welche als Ganze alle Bewegungen eines festen Körpers fortsetzen können, nämlich die Euklidische, die Lobatschewskysche, die Riemannsche und die Kleinsche Raumform.«

In schärferer Form läfst sich dies Resultat folgendermafsen aussprechen:

»Wenn ein Körper bewegt wird, so wird dadurch auch für jeden andern Körper, der mit ihm vermittelst weiterer Körper verbunden ist, eine einzige Bewegung bestimmt. Die auf diese

Weise dem zweiten Körper vermittelte Bewegung ist nur in den vier genannten Raumformen von den die Verbindung herbeiführenden Körpern unabhängig.«

§ 6.

Über die Bestimmung der Clifford-Kleinschen Raumformen auf analytischem Wege.

Nachdem uns der vorige Paragraph alle diejenigen Raumformen geliefert hat, welche als Ganze, wie wir uns kurz ausdrücken, alle Bewegungen eines starren Körpers ausführen können, wollen wir jetzt zu denjenigen Raumformen übergehen, bei denen dies nicht möglich ist, oder bei denen einer Bewegung eines festen Körpers für einen zweiten Körper verschiedene Bewegungen zugeordnet werden können, je nach der Verbindung, welche man zwischen den beiden Körpern herstellt. Diese Raumformen, von denen eine bereits von Clifford kurz erwähnt war, während Herr Klein ihre Berechtigung zuerst allgemein bewiesen hat, mögen als Clifford-Kleinsche bezeichnet werden.[39]) Wir wollen versuchen, ein analytisches Problem aufzustellen, dessen Lösung uns alle diese Raumformen liefert. Dabei wird die Berechtigung der neuen Raumformen wieder deutlich hervortreten.

Wir gehen zu den Entwicklungen des vorigen Paragraphen zurück. Für ein gewisses Gebiet, das allseitig begrenzt ist, läfst man alle Voraussetzungen Euklids bestehen; man beweist für einen solchen Bereich die Gültigkeit der trigonometrischen Formeln und gründet darauf ein Weierstrafssches Koordinatensystem. Alsdann erweitert man das Gebiet unbegrenzt und zeigt, dafs man auch den neu gewonnenen Punkten Koordinaten $x_0, x_1 \dots x_n$ zuordnen kann, zwischen denen die Beziehung besteht:

$$(1)\quad k^2 x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = k^2.$$

Umgekehrt ergiebt sich, dafs jedem Wertsystem, das dieser Gleichung genügt (und worin für $k^2 < 0$ der Wert von x_0 positiv ist), ein einziger Punkt entspricht. Jeder stetige Übergang von einem Wertsystem $(x_0, x_1 \dots x_n)$ zu einem andern $(y_0, y_1 \dots y_n)$ stellt auch geometrisch einen Weg dar, der die durch die beiden Wertsysteme dargestellten Punkte verbindet. Vermittelt man die Verbindung zwischen zwei Körpern in einer Weise, welche dem Übergange der zugehörigen Koordinatenwerte entspricht, und stellt man irgend eine Bewegung des ersten Körpers durch Gleichungen dar, so gelten dieselben Gleichungen auch für die durch die angegebene Verbindung vermittelte Bewegung.

Aus diesen Sätzen, die im vorigen Paragraphen ausführlich bewiesen sind, folgt schon, dafs nur in den frei beweglichen Raumformen jedem Punkte ein einziges Wertsystem der Koordinaten oder doch nur ein einziges System der Verhältnisse der $n+1$ Gröfsen $x_0, x_1, \dots x_n$ entsprechen kann. Sollen also die Clifford-Kleinschen Raumformen Berechtigung haben, so mufs es möglich sein, jedem Punkte verschiedene Werte der Koordinaten zuzuordnen.

Wir wollen jetzt annehmen, derselbe Punkt werde durch die Koordinaten $(x_0, x_1 \dots x_n)$ und $(y_0, y_1 \dots y_n)$ dargestellt. Beschränken wir uns für die Wertsysteme $(x_0, x_1 \dots x_n)$ auf einen Bereich, wie wir ihn immer zu Grunde gelegt haben, so sollen auch die Werte $(y_0, y_1 \dots y_n)$ auf denselben Bereich eingeschränkt sein. Dabei können wir setzen:

$$y_\varkappa = \psi_\varkappa(x_0, x_1 \dots x_n) \qquad \text{für } \varkappa = 0, 1 \dots n.$$

Wird dem Wertsystem x' durch die Gleichungen $y_\varkappa' = \psi_\varkappa(x')$ das Wertsystem y' zugeordnet, so mufs der Abstand der Punkte x und x' derselbe sein, wie der Abstand der Punkte y und y' Demnach mufs, wie auch die Punkte x und x' in dem angenommenen Gebiet gewählt sind, stets die Beziehung bestehen:

$$k^2 y_0 y_0' + y_1 y_1' + \dots + y_n y_n' = k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \dots x_n x_n'.$$

Daraus folgt:

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} y_0 = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + \dots + a_{0n} x_n \\ y_1 = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n, \end{array} \right.$$

wo die Koeffizienten den Bedingungen genügen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} k^2 a_{00}^2 + a_{10}^2 + \dots + a_{n0}^2 = k^2 \\ k^2 a_{0\varkappa}^2 + a_{1\varkappa}^2 + \dots + a_{n\varkappa}^2 = 1 \\ k^2 a_{00} a_{0\varkappa} + a_{10} a_{1\varkappa} + \dots + a_{n0} a_{n\varkappa} = 0 \\ k^2 a_{0\varkappa} a_{0\lambda} + a_{1\varkappa} a_{1\lambda} + \dots + a_{n\varkappa} a_{n\lambda} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{für } \varkappa, \lambda = 1 \dots n, \ \lambda \gtrless \varkappa.$$

Das sind dieselben Beziehungen, welche für die Umwandlung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein anderes rechtwinkliges bestehen.

Aus den Entwicklungen des § 4 folgt aber, dafs man die Koordinaten y aus den x durch stetige Umänderung erhalten kann. Dort ist nämlich gezeigt worden, dafs es möglich sein mufs, mit einem Körper K_1 weitere Körper K_2, $K_3 \dots K_{t-1}$, von denen je zwei auf einanderfolgende zusammenhangen und deren letzter mit K_1 selbst wieder in Zusammenhang steht, so zu verbinden, dafs die hierduch für K_1 vermittelte Bewegung von der ihm beigelegten verschieden ist. Verfolgt man jetzt die Koordinaten durch die einzelnen Körper hindurch, so mufs man für K_1 Koordinaten $y_0, y_1 \dots y_n$ erhalten, welche von den $x_0, x_1 \dots x_n$ verschieden sind. Wären nämlich die y mit den x identisch, so würde die vermittelte Bewegung der erteilten notwendig gleich sein. Der bezeichnete Weg liefert aber einen stetigen Übergang von den Werten x zu den y. Dazu ist aber noch notwendig, dafs die Determinante

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

ist. Denn aus den Gleichungen (3) folgt, dafs das Quadrat dieser Determinante den Wert eins hat. Sollen aber die Werte $a_{\iota\varkappa}$ aus den Anfangswerten $a_{\iota\iota} = 1$, $a_{\iota\varkappa} = 0$ für $\iota \gtrless \varkappa$ unter steter Gültigkeit der Gleichungen (3) auf stetigem Wege erhalten werden, so kann ein Wechsel zwischen den beiden Werten $+1$ und -1 nicht eintreten.

Wir legen den Veränderlichen $x_0, x_1 \dots x_n$ feste Werte bei, die der Gleichung (1) genügen, und bestimmen die entsprechenden Werte von $y_0, y_1 \dots y_n$ durch die Gleichungen (2). Damit die Gröfsen

$$(5) \quad ax_0 + by_0,\ ax_1 + by_1 \dots ax_n + by_n$$

für konstante Werte von a und b wieder die Koordinaten eines Punktes sind, mufs infolge der Gleichung (1) die Bedingung erfüllt sein:

$$(6) \quad a^2 + 2ab \cos\frac{e}{k} + b^2 = 1,$$

wo ist:

$$(7)\quad k^2 \cos\frac{e}{k} = k^2 x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Alle Punkte, deren Koordinaten in der Form (5) dargestellt werden können, gehören einer geraden Linie an. Läfst man das Wertepaar (a, b) stetig von (1, 0) in (0, 1) übergehen, so wird das Wertsystem $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ in $(y_0, y_1 \ldots y_n)$ umgewandelt; der dargestellte Punkt bewegt sich in gerader Linie, legt auf ihr eine Strecke von der Länge e zurück und kehrt dadurch in seine Anfangslage zurück. Eine solche Länge darf aber in keinem festen Körper und damit auch in keinem Gebiete, das unserer Untersuchung von Anfang an zu Grunde gelegt werden konnte, vorkommen. Denn die gemachten Voraussetzungen fordern, dafs ein Punkt, der in jenem Gebiete verbleibt und eine gerade Strecke zurücklegt, nicht wieder durch seine Anfangslage hindurchgeht.

Diese Betrachtung gilt aber nicht blofs für die Punkte des zunächst ausgewählten Bereiches, sondern bleibt ganz allgemein gültig. Wir wissen schon, dafs jedes Wertsystem $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ einen Punkt darstellt, und zeigen durch einfache Erwägungen, dafs die Gleichungen (2), (3), (4) ganz allgemein das Zusammenfallen von Punkten darstellen, sobald sie dies für die Punkte eines gewissen Bereiches thun. Geben wir also in der rechten Seite der Gleichung (7) den Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$ irgend welche der Gleichung (1) genügende Werte und ersetzen die Gröfsen y_0, $y_1 \ldots y_n$ durch ihre aus den Gleichungen (2) folgenden Werte, so erhalten wir eine Länge e, durch deren Zurücklegung ein Punkt wieder in seine Anfangslage auf geradlinigem Wege zurückkehren kann. Hiernach nimmt die Gleichung (7) die Form an:

$$(8)\quad k^2 \cos\frac{e}{k} = k^2 a_{00} x_0{}^2 + a_{11} x_1{}^2 + \ldots + a_{nn} x_n{}^2$$
$$+ (k^2 a_{01} + a_{10}) x_0 x_1 + \ldots + (a_{1n} + a_{n1}) x_1 x_n + \ldots$$

Bestimmt man die Gröfse von e aus dieser Gleichung für irgend ein reelles Wertsystem, so darf sie nie unter eine gewisse Grenze sinken; speziell darf die vorstehende Gleichung weder für $e = 0$ noch für einen beliebig kleinen Wert von e befriedigt werden. Hierdurch ist eine neue Bedingung gegeben, der die Transformations-Koeffizienten zu genügen haben.

Wenn die Koordinaten $(y_0 \ldots y_n)$ denselben Punkt bezeichnen, wie $(x_0 \ldots x_n)$, wofern die Gleichungen bestehen:

$$y_\varkappa = \psi_\varkappa(x_0 \ldots x_n),$$

so erhält man offenbar vermittelst der Gleichungen:

$$z_\varkappa = \psi_\varkappa(y_0 \ldots y_n)$$

neue Koordinaten $z_0 \ldots z_n$, die denselben Punkt darstellen. Setzt man aber in die letzten Gleichungen für $y_0 \ldots y_n$ die Werte $\psi_0(x) \ldots \psi_n(x)$ ein, so erhält man neue Gleichungen:

$$z_\varkappa = \chi_\varkappa(x_0 \ldots x_n),$$

durch welche ebenfalls ein Zusammenfallen von Punkten bezeichnet wird. Da die Funktionen $\psi_\varkappa(x)$ als linear homogen vorausgesetzt und zwischen den darin vorkommenden Koeffizienten die Beziehungen (3) und (4) angenommen werden, so gilt dasselbe von den Funktionen $\chi_\varkappa(x)$. Dagegen bedarf es einer besondern Untersuchung, ob auch die Gleichung (8), auf die neuen Transformations-Koeffizienten angewandt, weder einen verschwindenden noch einen beliebig kleinen Wert von e liefert.

In derselben Weise kann man aber weitere Koordinatenwerte herleiten, durch die derselbe Punkt dargestellt wird. Um den Weg, auf dem dies geschieht, recht deutlich zu übersehen, schreibe man x' statt y und setze:

$$x_\varkappa' = \sum_\varrho a_{\varkappa\varrho} x_\varrho = A_\varkappa'(x_0 \ldots x_n).$$

Jetzt bilde man in unbeschränkter Folge die Gleichungen:

$$x_\varkappa'' = A_\varkappa'(x_0' \ldots x_n') = A_\varkappa''(x_0 \ldots x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_\varkappa^{(m)} = A_\varkappa^{(m-1)}(x_0' \ldots x_n') = A_\varkappa^{(m)}(x_0 \ldots x_n).$$

Dann darf die durch die Gleichung:

$$k^2 \cos\frac{e_m}{k} = k^2 x_0 x_0^{(m)} + x_1 x_1^{(m)} + \ldots + x_n x_n^{(m)}$$

bestimmte Gröfse e_m nicht beliebig klein werden, wofern nicht etwa durch die Funktionen $A_\varkappa^{(m)}$ die identische Transformation dargestellt wird, also für $\varkappa = 0, 1 \ldots n$ jedesmal $x_\varkappa^{(m)} = x_\varkappa$ wird.

Wir können die linearen Funktionen $A_\varkappa^{(m)}$ auch leicht für einen negativen Wert von m definieren. Aber da die neue Gröfse $e_{-m} = e_m$ wird, genügt es die Werte von e_m für ein positives m zu betrachten.

Dadurch haben wir folgendes Resultat erhalten:

»Soll eine Transformation imstande sein, das Zusammenfallen von Punkten zu bezeichnen, so mufs sie

1. denselben Gesetzen genügen, wie diejenigen Transformationen, durch welche starre Bewegungen dargestellt werden;

2. die durch die Gleichung (8) definierte Gröfse e darf weder verschwinden noch beliebig klein werden, welche Werte x_0, $x_1 \dots x_n$ auch in die rechte Seite eingesetzt werden;

3. die zweite Bedingung mufs auch bei jeder nicht identischen Transformation erfüllt werden, welche man durch Wiederholung der gegebenen Transformation erhält.

Wenn umgekehrt diese drei Bedingungen erfüllt sind, so ist die Transformation geeignet, das Zusammenfallen von Punkten anzugeben.«

Die obigen Formeln (2)—(8) gelten zunächst nur für einen endlichen (positiven oder negativen) Wert von k^2; indessen sind die Änderungen bekannt, welche für einen unendlich grofsen Wert von k^2 an ihnen vorgenommen werden müssen.

Es wird gut sein, die vorstehenden Erwägungen in einer etwas veränderten Form zu wiederholen und einige Punkte besonders hervorzuheben, die in den angestellten Entwicklungen enthalten sind, aber mit Stillschweigen übergangen werden mufsten, damit die Beweisführung keine Unterbrechung erlitte.

Auch für die neuen Raumformen ist die Konstante k^2 von hervorragender Bedeutung. Denn bei der Herleitung der trigonometrischen Formeln kann man ein beliebig kleines Gebiet benutzen und findet drei Möglichkeiten, die durch den Wert der angegebenen Konstante unterschieden werden. Wie die frei beweglichen Raumformen nach ihrem Krümmungsmafs eingeteilt werden, hat man auch für die neuen Raumformen ein positives, verschwindendes und negatives Riemannsches Krümmungsmafs zu unterscheiden. Ebenso kann man im Anschlufs an die Entwicklungen des zweiten Abschnitts die Clifford-Kleinschen Raumformen als elliptische, parabolische und hyperbolische unterscheiden. Man braucht ja nur den Punkten einer geraden Strecke nach der dort angegebenen Methode Zahlen zuzuordnen und die Transformation zu bestimmen, durch welche die Bewegung dieser Strecke in sich dargestellt wird.

Ferner wissen wir, dafs jedem Wertsystem $(x_0 \dots x_n)$ ein einziger Punkt entspricht, dafs dagegen jedem Punkte mehrere Wertsysteme zugeordnet sind, deren Zahl auch unendlich sein kann. Betrachten wir aber die Wertsysteme $(x_0 \ldots x_n)$ als Koordinaten für eine frei bewegliche Raumform, so ist die letztere eine Euklidische oder Lobatschewskysche oder Riemannsche. Hierbei entspricht jedem Punkte der Clifford-Kleinschen Raumform ein einziger Punkt des frei beweglichen Raumes; die erstere ist also auf die letztere abgebildet. Dabei bleiben alle Längen und Winkel, und hiermit die Gröfsen von Flächen und Körpern ungeändert, genau in dem Sinne, wie dies für die Abwicklung eines Cylindermantels auf eine Ebene gilt. Wir können daher eine solche Abbildung wieder eine Abwicklung nennen, wofern wir bei diesem Ausdruck von dem darin liegenden geometrischen Begriffe absehen und nur den Charakter der Abbildung kurz ausdrücken wollen. Es besteht also der Satz:

»Jede Clifford-Kleinsche Raumform läfst sich entweder auf eine Euklidische oder auf eine Lobatschewskysche oder eine Riemannsche Raumform so abbilden, dafs alle Gröfsenbeziehungen ungeändert bleiben.«

Wenn jetzt einem Punkte A einer Clifford-Kleinschen Raumform zwei verschiedene Punkte A_0 und A_1 und ebenso einem Punkte B der ersteren zwei Punkte B_0 und B_1 einer frei beweglichen Raumform zugeordnet sind, und wenn jedes der beiden Punktepaare $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ in einem Gebiete liegt, das eindeutig auf die erste Raumform abgebildet werden kann, so mufs der Abstand der Punkte A und B gleich sein sowohl dem Abstand der Punkte A_0 und B_0 wie dem der Punkte A_1 und B_1. Hat also der Punkt A_0 die Koordinaten x, der Punkt B_0 die Koordinaten x', während zu den Punkten A_1 und B_1 die Koordinaten y und y' gehören, so mufs die Transformation, durch welche die Wertsysteme x in y, x' in y' übergehen, den Bedingungen (2) und (3) genügen. Nun denke man in der frei beweglichen Raumform zwei Körper K_1 und K_2 so gewählt, dafs sie demselben Körper K' im Clifford-Kleinschen Raume entsprechen, so werden sie durch die angegebene Transformation in einander übergehen. Also sind die beiden Körper K_1 und K_2 kongruent, oder zwischen den Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ besteht die Beziehung (4).

Wieder mögen bei der vorgenommenen Abbildung einem Punkte A der Clifford-Kleinschen Raumform die beiden Punkte A_0 und A_1 der frei beweglichen entsprechen. Durch die Punkte

A_0 und A_1 läſst sich eine gerade Linie legen. Man erhält also in der abgebildeten Raumform eine geradlinige Strecke, die vom Punkte A ausgeht und wieder in ihn zurückkehrt. Nun ist die Beziehung zwischen den Punkten der beiden Raumformen eindeutig, so lange man in dem ursprünglich angenommenen Gebiete bleibt. Es darf demnach nicht möglich sein, die obige Strecke in ein solches Gebiet zu legen; ihre Länge muſs also gröſser sein, als irgend eine in diesem Bereiche gezogene gerade Strecke. Jst A_μ irgend ein Punkt, der neben A_0 dem Punkte A entspricht, so darf, wofern nicht A_μ mit A_0 zusammenfällt, die Länge von A_0A_μ nicht unter eine gewisse Grenze sinken. Wenn aber die Punkte A_0 und A_μ identisch sind, ohne daſs jedem in der Umgebung gelegenen Punkt B_0 ein mit ihm zusammenfallender Punkt B_μ entspricht, so kann man diesen Punkt so wählen, daſs die Strecke B_0B_μ beliebig klein wird. Demnach darf weder bei der gegebenen Transformation noch bei jeder aus ihr durch Wiederholung gewonnenen ein Punkt ungeändert bleiben; auch darf der Abstand zwischen zwei zusammengehörigen Punkten nicht beliebig klein werden. Natürlich unterliegt es keinem Bedenken, daſs sich durch Wiederholung einer Transformation die identische Transformation ergiebt, bei der jeder Punkt ungeändert bleibt.

Eine Transformation der Form (2), durch die das Zusammenfallen von Punkten bestimmt wird, möge mit S bezeichnet werden. Aus dieser Substitution erhält man durch (m — 1)-malige Wiederholung eine Substitution S^m, und zu dieser reziprok sei die Substitution S^{-m}. Nun kann der Fall eintreten, daſs auſser der Substitution S und den daraus abgeleiteten S^μ eine neue Substitution T eine Beziehung zwischen Koordinatenwerten angiebt, die zu demselben Punkte gehören. Dann gilt dasselbe von jeder durch Wiederholung von T erlangten Substitution, sowie von jeder, die man durch beliebig oft wiederholte Verbindung der beiden Substitutionen erhält, also für

$$(9) \ldots T^\delta S^\gamma T^\beta S^\alpha,$$

bei ganzzahligen Werten von α, β, γ, δ. Umgekehrt, wenn S und T beides Substitutionen der Form (2) mit den Bedingungen (3) und (4) sind und wenn bei keiner Substitution (9) die durch die Gleichung (7) bestimmte Gröſse e unter eine gewisse feste

Grenze sinkt, so wird durch diese beiden Substitutionen eine gewisse Clifford-Kleinsche Raumform definiert.

In ähnlicher Weise kann man bei drei und mehr Substitutionen verfahren. Man kann aber auch, was auf dasselbe hinauskommt, in den Gleichungen (2) die Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$, welche den Bedingungen (3) und (4) genügen, von r ganzen Zahlen $\mu_1 \dots \mu_r$ abhängig machen, in dem Sinne, dafs man jedesmal eine Substitution der bezeichneten Art erhält, wenn man in die Gleichungen:

$$y_\varkappa = \psi_\varkappa(x_0 x_1 \dots x_n;\ \mu_1 \dots \mu_r)$$

für $\mu_1, \dots \mu_r$ beliebige ganze Zahlen einsetzt. Verbindet man zwei solche Transformationen mit einander, so mufs man eine Transformation erhalten, welche sich von den frühern nur dadurch unterscheidet, dafs an Stelle von $\mu_1 \dots \mu_r$ andere ganze Zahlen gewählt sind; d. h. wenn ist

$$y_\varkappa = \psi_\varkappa(x_0, x_1 \dots x_n;\ \mu_1 \dots \mu_r)$$
$$z_\varkappa = \psi_\varkappa(y_0, y_1 \dots y_n;\ \mu_1' \dots \mu_r'),$$
$$(\varkappa = 0,\ 1 \dots n)$$

und wenn man in die letzten Gleichungen die aus den ersten folgenden Werte für $y_0 \dots y_n$ einsetzt, so mufs man die $n+1$ Gleichungen erhalten:

$$z_\varkappa = \psi_\varkappa(x_0, x_1 \dots x_n;\ \mu_1'' \dots \mu_r''),$$

wo die ganzen Zahlen $\mu_1'' \dots \mu_r''$ sich aus $\mu_1 \dots \mu_r$ und $\mu_1' \dots \mu_r'$ bestimmen lassen. Eine solche Schar von Transformationen, welche ein geschlossenes System bilden, heifst eine Gruppe, und zwar, da zwischen den Transformationen kein stetiger Übergang besteht, eine diskontinuierliche Gruppe. Jetzt müssen alle Transformationen der Gruppe den Bedingungen (2), (3) und (4) genügen; zugleich darf die durch die Gleichung (7) definierte Gröfse e nicht unter eine gewisse Gröfse sinken. Demnach ist das Problem, alle in Betracht kommenden Raumformen aufzufinden, auf folgende analytische Aufgabe zurückgeführt:

»Man suche alle diskontinuierlichen r-gliedrigen Gruppen von Transformationen der Form (2), welche den Bedingungen (3) und (4) genügen und zudem die weitere Forderung erfüllen, dafs mit Ausschlufs der identischen Transformation keine Transformation der Gruppe ein Wertsystem an sein transformiertes beliebig nahe heranbringt.«

Indem man wieder auf die mehrfach erwähnte Abbildung zurückgeht, kann man das Problem auch in folgender Weise aussprechen:

Man ordne jedem Punkte einer Euklidischen, Lobatschewskyschen oder Riemannschen Raumform einen Punkt zu durch eine Transformation, welche den Bedingungen einer starren Bewegung genügt. Die Koeffizienten in dieser Transformation mache man abhängig von r ganzen Zahlen $\mu_1 \ldots \mu_r$, so dafs durch jede Zusammenstellung eine einzige Substitution bestimmt ist. Verbindet man zwei beliebige derartige Substitutionen mit einander, so mufs man wieder eine Substitution der Schar erhalten. Wenn bei der durch die Marken $\mu_1 \ldots \mu_r$ bezeichneten Substitution dem Punkte x der Punkt $x^{(\mu_1 \cdots \mu_r)}$ entspricht, so darf der Punkt x (aufser bei der identischen Substitution) niemals mit dem Punkte $x^{(\mu_1 \cdots \mu_r)}$ zusammenfallen; es darf aber auch der Abstand von zwei solchen Punkten nicht beliebig klein werden.

Auf dies analytische Problem ist jetzt die Aufgabe zurückgeführt, alle Clifford-Kleinschen Raumformen zu bestimmen.

Dabei ist jedoch stillschweigend vorausgesetzt, dafs die Rückkehr für den Körper als Ganzes stattfinden müsse und sich nicht auf ein demselben angehörendes Grenzgebilde beschränken könne. Indem wir wieder von dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze Gebrauch machen, dafs zu jedem Wertsystem $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ ein Punkt gehört, haben wir die beiden Fragen zu beantworten:

1. Ist es möglich, dafs im allgemeinen zu verschiedenen Koordinatenwerten auch jedesmal verschiedene Punkte gehören, dafs aber doch derselbe Punkt durch ungleiche Koordinatenwerte bezeichnet wird, wofern zwischen den Koordinaten gewisse Relationen bestehen?

2. Wenn eine (diskontinuierliche) Gruppe von Transformationen das Zusammenfallen von Punkten bezeichnet, können dann nicht für gewisse Mannigfaltigkeiten von einer geringeren Zahl von Dimensionen noch andere Beziehungen hinzutreten, bei deren Erfüllung die Punkte ebenfalls als identisch zu betrachten sind?

Die Antwort auf diese beiden Fragen werden wir sofort geben können, wenn wir auf die Beispiele von Cylinderflächen blicken, welche wir am Schlufs von § 1 angeführt haben. Dort wählten wir einmal die Leitlinie so, daſs sie ins Unendliche verläuft, aber zugleich Doppelpunkte besitzt. Die hierdurch erhaltene Fläche durfte aber ebenfalls als Raumform betrachtet werden. Es kommt dies darauf hinaus anzunehmen, daſs für Cartesische Koordinaten der Punkt ($x = a$, y) mit dem Punkte ($x = -a$, y) für jeden Wert von y zusammenfällt, während für einen von $\pm a$ verschiedenen Wert von x jedesmal durch ungleiche Wertsysteme (x, y) und (x', y') auch verschiedene Punkte bezeichnet werden. Dies Beispiel ist aber ganz speziell; man kann ebenso gut auch eine gröſsere Zahl von Geraden als zusammenfallend betrachten. Diese Zahl kann sogar unendlich groſs gewählt werden; als einfachstes Beispiel setzen wir fest, das für jedes ganzzahlige μ die Gerade $x = \mu a$ mit der Geraden $x = -\mu a$ identisch sein soll.

Es ist nicht schwer, weitere Beispiele zu bilden, wenn dieselben auch nicht durch Flächen zur Anschauung gebracht werden können. So können wir annehmen, die Gerade $x = a$ sei mit der Geraden $x = -a$ identisch, es falle aber der Punkt (a, y) mit dem Punkte ($-a$, $-y$) für jeden Wert von y zusammen.

Endlich möge ein Winkel α so gewählt sein, daſs er mit π inkommensurabel ist. Zudem sollen a und c irgend zwei feste Längen bezeichnen und μ soll der Reihe nach alle ganzzahligen Werte annehmen. Dann möge die Gerade $x = c \operatorname{tg} \mu\alpha$ mit der Geraden $x = -c \operatorname{tg} \mu\alpha$ zusammenfallen und zwar soll der Punkt ($-c \operatorname{tg} \mu\alpha$, y) mit dem Punkte ($c \operatorname{tg} \mu\alpha$, $y + \mu a$) identisch sein. In diesem Falle erhalten wir unendlich viele geschlossene Gerade, von denen keine zwei zusammenfallen und welche die Längen a, $2a$, $3a \ldots$ besitzen.

Das sind Beispiele von zweidimensionalen Raumformen, bei denen im allgemeinen keine zwei Punkte mit ungleichen Koordinaten zusammenfallen, sondern das Zusammenfallen auf einzelne Linien, (deren Zahl allerdings unendlich groſs sein kann), beschränkt ist. Die Cylinderfläche, deren Leitlinie eine Lemniskate oder überhaupt eine geschlossene, sich selbst durchschneidende Kurve ist, läſst uns aber erkennen, daſs neben den allgemeinen Beziehungen, durch welche das Zusammenfallen von Punkten bezeichnet wird, für einzelne Gebilde noch spezielle Beziehungen bestehen können, bei deren Erfüllung bereits ein früheres Zusammenfallen eintritt. Nehmen wir z. B. an, daſs für alle Werte von (x, y) der Punkt (x, y) mit dem Punkte (x + 2a, y) identisch ist, so dürfen wir aufserdem noch festsetzen, dafs für jedes y die Punkte (0, y) und (a, y) zusammenfallen. Bei dieser Annahme giebt es einfach unendlich viele geschlossene Gerade; alle diese haben die Länge 2a; aber wenn man von einem gewissen Punkte einer solchen Geraden ausgeht, so gelangt man bereits nach Zurücklegung einer Strecke gleich a wieder in den Ausgangspunkt zurück.

Ähnliche Beispiele lassen sich leicht für den mehrdimensionalen Raum bilden; sie lehren uns, dafs die beiden oben gestellten Fragen mit ja beantwortet werden müssen. Die Bedingungen, denen derartige Transformationen zu genügen haben, unterscheiden sich nicht von den Bedingungen, welche wir oben bereits gefunden haben. Die Formen aber, zu denen wir jetzt gelangen, sind so mannigfaltiger Art, dafs wir von einer erschöpfenden Darstellung Abstand nehmen müssen. Vielleicht läfst sich die übergrofse Zahl von Einzelfällen auf wenige Klassen zurückführen. So lange das nicht möglich ist, glauben wir uns auf diese wenigen Andeutungen beschränken zu sollen.

Die prinzipielle Berechtigung dieser Raumformen hätte im Anfange von § 5 im Anschlufs an die dort durchgeführten allgemeinen Erwägungen bewiesen werden müssen; dann wären aber die dort angestellten, immerhin schon recht abstrakten Untersuchungen noch komplizierter geworden. Deshalb mufsten wir dort davon absehen. Auch im folgenden soll auf die hier erörterten Möglichkeiten nicht näher eingegangen werden. Nur beim Ausspruch der Lehrsätze mufs auch die hier erörterte Möglichkeit berücksichtigt werden.

§ 7.

Über die zweidimensionalen Raumformen.

Die Anwendung der im vorigen Paragraphen aufgestellten Vorschrift auf die zweidimensionalen Räume verschwindender Krümmung liefert uns sofort die möglichen Formen. Wir haben die Transformation zu Grunde zu legen:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b.$$

Dann darf für kein endliches Wertepaar $x' = x$, $y' = y$ sein. Demnach dürfen die Gleichungen:

$$(1 - \cos\alpha) + y\sin\alpha = a$$
$$- x\sin\alpha + y(1 - \cos\alpha) = b$$

durch kein Wertepaar befriedigt werden. Da aber die Determinante aus den Koeffizienten von x und y, gleich:

$$(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha$$

nur verschwindet, wenn $\cos\alpha = 1$, also $\sin\alpha = 0$ ist, so müssen die Transformationsgleichungen sein:

$$(1)\quad x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Dann ist die im vorigen Paragraphen eingeführte Gröſse $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, also stets endlich. Diese Gröſse e wird aber nur mit einer ganzen Zahl multipliziert, wenn man die Transformation mehrmals wiederholt. Somit genügt jede Transformation von der Form (1) den angegebenen Bedingungen.

Läſst man nur eine derartige Transformation zu, so erhält man diejenige Raumform, welche wir am Schluſs des ersten und im Anfange des zweiten Paragraphen betrachtet haben; die Raumform kann durch einen Cylinder dargestellt werden.

Wir fügen eine zweite Transformation

$$x'' = x + a',\ y'' = y + b'$$

hinzu und beweisen, daſs hier nicht die Beziehung bestehen darf:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Bestände diese Beziehung, so wären zwei Fälle möglich: entweder wäre das Verhältnis rational oder irrational. Im ersten Falle möge es durch den Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ angegeben werden, wo μ und ν keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Dann kann man zwei ganze Zahlen p und q so bestimmen, daſs $\mu p - \nu q = 1$ ist. Macht man also die erste Transformation p-mal und die zur zweiten reziproke q-mal, so geht der Punkt (x, y) über in

$(x + pa - qa',\ y + pb - qb')$, oder wenn man

$a = \mu a_0,\ a' = \nu a_0,\ b = \mu b_0,\ b' = \nu b_0$

setzt, in $(x + a_0,\ y + b_0)$. Wiederholt man aber diese neue Transformation $(\mu - 1)$-mal, so erhält man die erste, und durch $(\nu - 1)$-malige Wiederholung die zweite Transformation. Folglich kommen die beiden gegebenen Transformationen auf eine einzige hinaus.

Ist aber das Verhältnis $a' : a = b' : b$ irrational, so kann man es für jede beliebige ganze Zahl ν zwischen die Werte $\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu + 1}{\nu}$ einschliefsen. Wiederholt man also die eine Transformation $(\mu - 1)$-mal, die reziproke der andern $(\nu - 1)$-mal, so gelangt man von demselben Punkte aus zu Punkten, deren Abstand kleiner ist als $\frac{1}{\nu}\sqrt{a^2 + b^2}$, was unmöglich ist.

Demnach liegen die drei Punkte (x, y), (x', y') und (x'', y'') nicht in gerader Linie. Wir erhalten die zweite in § 2 betrachtete Möglichkeit. Jetzt zeigen wir aber sehr einfach, dafs eine dritte, von den beiden vorigen unabhängige Transformation nicht zulässig ist. Wir haben also nur noch den Fall zu untersuchen, dafs entweder nur einzelne Linien oder Punkte der euklidischen Ebene mehrfach abgebildet werden oder dafs zu den angegebenen allgemeinen Zuordnungen noch solche hinzutreten, die nur für einzelne Linien oder Punkte gelten. Demnach erhalten wir den Satz:

»Die Clifford-Kleinschen Raumformen von zwei Dimensionen und von verschwindender Krümmung lassen sich auf eine euklidische Ebene analytisch so abwickeln, dafs sie entweder die ganze Ebene oder einen von zwei Parallelen begrenzten Streifen oder ein Parallelogramm anfüllen. Im ersten Falle müssen einzelne Linien oder Punkte sich mehrdeutig abbilden, was im zweiten und dritten Falle nicht notwendig, aber auch nicht ausgeschlossen ist.«

Wir nehmen jetzt an, die Raumform habe ein positives Krümmungsmafs, welches wir bei passender Wahl der Längeneinheit gleich eins setzen können. Dann können wir die Transformation, durch welche das Zusammenfallen von Punkten bezeichnet wird, in der Form voraussetzen:

$$
(2) \quad \begin{aligned}
y_0 &= \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 \\
y_1 &= \alpha' x_0 + \beta' x_1 + \gamma' x_2 \\
y_2 &= \alpha'' x_0 + \beta'' x_1 + \gamma'' x_2 ,
\end{aligned}
$$

wo die Bedingungen bestehen:

$$
(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}=1.
\end{array}\right.
$$

Hier giebt es ein Wertsystem, für welches $y_\iota = x_\iota$ ist; denn die Determinante

$$
\begin{vmatrix}\alpha-1 & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta'-1 & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''-1\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}
-(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')-\ldots+\alpha+\beta'+\gamma''-1
$$

wird stets verschwinden. Dieser Fall mufs aber ausgeschlossen werden.

Nun könnte man aber annehmen, jeder Punkt (x) fiele mit dem Punkte (—x) zusammen. Dann würde unter Bestehen der Bedingungen (3) es möglich sein, die Gleichungen (2) durch die folgenden zu ersetzen:

$$
-y_0=\alpha x_0+\beta x_1+\gamma x_2
$$
$$
\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

Dann würden die drei Gleichungen: $x_\iota = y_\iota$ im allgemeinen keine Lösung haben, aber wohl die Gleichungen: $x_\iota = -y_\iota$, was unter der gemachten Voraussetzung ebenfalls unzulässig ist.

Somit ergiebt sich der Satz:

»Eine elliptische Raumform von zwei Dimensionen ist entweder als Ganzes beweglich oder sie ist doch mit Ausschlufs einzelner Linien oder Punkte eindeutig auf eine Riemannsche Ebene oder deren Polarform abwickelbar.»

Für einen negativen Wert von k^2 können wir die Längeneinheit so wählen, dafs $k^2 = -1$ wird. Wenn dann beim Bestehen der Gleichungen (2) die Punkte (x_0, x_1, x_2) und (y_0, y_1, y_2) als zusammenfallend vorausgesetzt werden, so mufs sein:

$$
(4)\quad \begin{array}{l}
\alpha^2-\alpha'^2-\alpha''^2=1,\ \beta^2-\beta'^2-\beta''^2=-1,\ \gamma^2-\gamma'^2-\gamma''^2=-1,\\
\alpha\beta-\alpha'\beta'-\alpha''\beta''=0,\ \alpha\gamma-\alpha'\gamma'-\alpha''\gamma''=0,\ \beta\gamma-\beta'\gamma'-\beta''\gamma''=0
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}=1.
$$

Wir betrachten das System der Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{aligned} (\alpha - 1)\xi_0 + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 &= 0 \\ \alpha'\xi_0 + (\beta' - 1)\xi_1 + \gamma'\xi_2 &= 0 \\ \alpha''\xi_0 + \beta''\xi_1 + (\gamma'' - 1)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Da die aus den Koeffizienten gebildete Determinante gleich null ist, so erhalten wir ein reelles Verhältnis $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2$, welches diesen Gleichungen genügt. Ist für dieses Verhältnis

$$(6)\quad \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 > 0,$$

so können wir ξ_0, ξ_1, ξ_2 mit einem solchen Koeffizienten multiplizieren, dafs ξ_0 positiv und $\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 1$ ist. Somit erhalten wir einen im Endlichen gelegenen (»eigentlichen«) Punkt, der sich selbst entspricht. Dieser Fall ist nach § 6 auszuschliefsen.

Wenn aber

$$(7)\quad \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$$

ist, so läfst sich zeigen, dafs die im vorigen Paragraphen eingeführte Länge e jeden noch so kleinen Wert wirklich erreicht. Dieser Nachweis kann aus den in I § 10 S. 22 ff. angegebenen Eigenschaften der parallelen Linien hergeleitet werden. Wir wollen ihn aber hier auf analytischem Wege führen.

Unter der Bedingung (7) werden die Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{aligned} y_0 &= (1 + \tfrac{1}{2}\xi_0)x_0 + (\xi_2 - \tfrac{1}{2}\xi_0\xi_1)x_1 - (\xi_1 + \tfrac{1}{2}\xi_0\xi_2)x_2 \\ y_1 &= (\xi_2 + \tfrac{1}{2}\xi_0\xi_1)x_0 + (1 - \tfrac{1}{2}\xi_1^2)x_1 - (\xi_0 + \tfrac{1}{2}\xi_1\xi_2)x_2 \\ y_2 &= -(\xi_1 - \tfrac{1}{2}\xi_0\xi_2)x_0 + (\xi_0 - \tfrac{1}{2}\xi_1\xi_2)x_1 + (1 - \tfrac{1}{2}\xi_2^2)x_2 \end{aligned}$$

für $y_\iota = x_\iota = \xi_\iota$ erfüllt. Zudem genügen die Koeffizienten den Gleichungen (4). Umgekehrt wird die allgemeinste den Bedingungen (4) genügende Transformation, welche die Forderung $y_\iota = x_\iota = \xi_\iota$ beim Bestehen der Gleichung (7) befriedigt, aus (8) erhalten, indem man in (8) die ξ_0, ξ_1, ξ_2 mit einem beliebigen reellen Faktor multipliziert.

Die kürzeste Strecke e, welche einen Punkt (x) in seine Anfangslage zurückführt, wird erhalten, indem man in die Gleichung:

$$\mathrm{Ch}\, e = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2$$

für y_0, y_1, y_2 die Werte aus (8) einsetzt. Demnach erhält man durch eine sehr einfache Rechnung:

$$\mathrm{Ch}\, e = 1 + \tfrac{1}{2}(\xi_0x_0 - \xi_1x_1 - \xi_2x_2)^2,$$

oder wegen $\mathrm{Ch}\, e = 1 + 2\,\mathrm{Sh}^2\frac{e}{2}$:

$$(9)\quad 2\,\mathrm{Sh}\frac{e}{2} = \pm(\xi_0x_0 - \xi_1x_1 - \xi_2x_2).$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck kann aber jeden beliebig kleinen Wert erhalten. So möge durch (z_0, z_1, z_2) ein fester reeller Punkt bezeichnet werden. Dann liegen für

$$x_0 = \varkappa \xi_0 + \lambda z_0, \; x_1 = \varkappa \xi_1 + \lambda z_1, \; x_2 = \lambda \xi_2 + \lambda z_2$$

alle Punkte (x_0, x_1, x_2) auf einer geraden Linie, wofern die Gleichung besteht:

$$2\varkappa\lambda(\xi_0 z_0 - \xi_1 z_1 - \xi_2 z_2) + \lambda^2 = 1.$$

Setzt man diese Werte von x_0, x_1, x_2 in die Gleichung (9) ein, so folgt:

$$2\,\mathrm{Sh}\frac{e}{2} = \pm\lambda(\xi_0 z_0 - \xi_1 z_1 - \xi_2 z_2).$$

Während der Klammerausdruck einen festen Wert hat, kann man λ und demnach auch e beliebig klein machen. Somit ist der durch die Gleichung (7) bezeichnete Fall auszuschliefsen.

Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, dafs für jedes Wertsystem, welches den Gleichungen (5) genügt, die Relation besteht:

$$(10) \quad \xi_0{}^2 - \xi_1{}^2 - \xi_2{}^2 > 0.$$

Dann können wir die drei Gröfsen mit einer solchen reellen Gröfse multiplizieren, dafs

$$\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 - \xi_0{}^2 = 1$$

ist. Demnach stellt jetzt nach I § 16 die Gleichung

$$(11) \quad \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$$

eine Gerade dar. Drücken wir aber vermittelst Umkehrung der Gleichungen (2) die x_0, x_1, x_2 durch y_0, y_1, y_2 aus, so kommt dies infolge der Beziehungen (4) darauf hinaus, auf ξ_0, ξ_1, ξ_2 in der Gleichung (11) die Gleichung (2) selbst anzuwenden. Da aber diese Gröfsen ungeändert bleiben, so wird auch die Gleichung (11) nicht geändert; die angegebene Transformation kommt also auf eine Verschiebung längs der Geraden (11) hinaus. Alle Punkte dieser Geraden erleiden dieselbe und alle übrigen Punkte eine gröfsere Verschiebung. Wiederholt man diese Bewegung beliebig oft, so bleibt die Gerade (11) ungeändert und die Gröfse der neuen Verschiebung wird aus der frühern durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl erhalten. Demnach genügt diese Transformation allen im vorigen Paragraphen aufgestellten Forderungen, und wir erhalten den Satz:

»Jede Bewegung, durch welche in einer zweidimensionalen Clifford-Kleinschen Raumform konstanter negativer Krümmung ein Teil in seine Anfangslage zurückgeführt werden kann, kommt auf eine Verschiebung längs einer geraden Linie hinaus.«

Wir untersuchen eine Raumform, bei welcher das Zusammenfallen von Punkten nur durch eine Transformation und deren Wiederholung bezeichnet wird. Als solche wählen wir:

$$y_0 = x_0 \operatorname{Ch} a + x_1 \operatorname{Sh} a,\ y_1 = x_0 \operatorname{Sh} a + x_1 \operatorname{Ch} a,\ y_2 = x_2.$$

Die einzige Bewegung, bei welcher die Raumform stets in sich verbleibt, besteht in der Verschiebung längs der Geraden $x_2 = 0$. Diese Linie ist auch die einzige geschlossene Gerade. Zwar gehen durch jeden Punkt (η_0, η_1, η_2) unendlich viele gerade Linien mehrmals hindurch, nämlich diejenigen, deren Gleichungen sind:

$$x_1 \eta_2 \left(\eta_0 \operatorname{Sh} \frac{\mu a}{2} + \eta_1 \operatorname{Ch} \frac{\mu a}{2}\right) + x_2 (\eta_0^2 - \eta_1^2) \operatorname{Ch} \frac{\mu a}{2}$$
$$- x_0 \eta_2 \left(\eta_1 \operatorname{Sh} \frac{\mu a}{2} + \eta_0 \operatorname{Ch} \frac{\mu a}{2}\right) = 0$$

für ein beliebiges ganzzahliges μ; denn diese Gleichung wird sowohl für $x_0 = \eta_0$, $x_1 = \eta_1$, $x_2 = \eta_2$, wie für

$$x_0 = \eta_0 \operatorname{Ch} \mu a + \eta_1 \operatorname{Sh} \mu a,\ x_1 = \eta_0 \operatorname{Sh} \mu a + \eta_1 \operatorname{Sh} \mu a,\ x_2 = y_2$$

erfüllt. Aber jede solche Gerade durchschneidet sich in dem Punkte und erstreckt sich von da an nach beiden Seiten ins Unendliche. Alle Geraden von dieser Eigenschaft können die ausgezeichnete Gerade $x_2 = 0$ nicht schneiden. Andere Gerade kommen dieser Geraden $x_2 = 0$ unbegrenzt nahe, andere schneiden sie und entfernen sich vom Schnittpunkt an unbegrenzt von ihr. Bei der Abbildung auf die Lobatschewskysche Ebene hat man vor allem zu untersuchen, ob eine Gerade die Linie $x_2 = 0$ schneidet, ihr parallel ist oder einen festen kleinsten Abstand von ihr hat; unter den Geraden der letzten Art giebt es unendlich viele, denen in der Clifford-Kleinschen Raumform sich selbst durchschneidende Gerade entsprechen.

Die zweidimensionale Raumform, welche wir hier betrachtet haben, läſst sich darstellen durch eine Fläche im dreidimensionalen Lobatschewskyschen Raume. Diese Fläche wird gebildet durch die Gesamtheit der Geraden, welche in den Punkten einer Kreislinie auf ihrer Ebene senkrecht stehen; ihre Gleichung läfst sich in der Form darstellen:

$$x_0^2(a^2 - 1) = a^2(x_1^2 + x_2^2).$$

Wir haben jetzt die Frage zu stellen, ob sich Verschiebungen längs verschiedener Geraden zu einer diskontinuierlichen Gruppe vereinigen lassen, welche nur solche Verschiebungen enthält. Um die Frage schärfer zu formulieren, machen wir eine Transformation von der Form (2) abhängig von r ganzen Zahlen $\mu_1, \ldots \mu_r$ und setzen

$$y_\varkappa = \psi_\varkappa(x_0, x_1, x_2, \mu_1 \ldots \mu_r) \qquad \text{für } \varkappa = 0, 1, 2.$$

Dann soll jedem Wertsysteme $\mu_1 \ldots \mu_r$ eine Verschiebung längs einer Geraden entsprechen, und alle diese Transformationen müssen eine Gruppe bilden, der jede Transformation angehört, welche man durch Verbindung irgend zweier ihrer Transformationen erhält. Die vollständige Lösung dieser Aufgabe würde uns hier zu weit führen; wir wollen nur darauf hinweisen, dafs sich die Funktionentheorie in der letzten Zeit mehrfach mit einer Aufgabe befafst hat, die etwas allgemeiner ist, als die hier gestellte, und deren Lösungen auch für den vorliegenden Zweck benutzt werden können.[40])

Nur eine Bemerkung mufs hier noch angebracht werden. Wenn für die Raumform mehrere von einander unabhängige Transformationen bestehen, so ist es überhaupt unmöglich, sie als Ganzes in sich zu bewegen. Die Geraden, längs derer eine Verschiebung möglich ist, müssen nämlich eine diskontinuierliche Schar bilden. Es läfst sich aber keine stetige Bewegung der Lobatschewskyschen Ebene in sich angeben, bei der dies System von Geraden fortwährend in sich verbleibt. Während also bei den früher gefundenen Raumformen wenigstens spezielle Bewegungen gestatteten, auf die Raumformen als Ganze übertragen zu werden, ist das bei diesen Raumformen überhaupt nicht möglich.

§ 8.

Dreidimensionale Raumformen verschwindender Krümmung.

Bei einem dreidimensionalen euklidischen Raume hat man drei Arten von gleichförmigen Bewegungen zu unterscheiden: die erste besteht in einer mit einer Verschiebung verbundenen

Drehung um eine Gerade, die zweite in einer blofsen Drehung um eine Gerade, die dritte in einer Parallelverschiebung. Die erste Bewegung ist die allgemeine; aus ihr wird die zweite erhalten, wenn man die Verschiebung, und die dritte, wenn man die Drehung verschwinden läfst. Die Drehung um eine Gerade kann offenbar nicht das Zusammenfallen von Punkten in einer Clifford-Kleinschen Raumform bezeichnen, da hier alle Punkte einer Geraden sich selbst entsprechen und in deren Umgebung ein geradliniger Weg von jeder beliebigen Kleinheit wieder in die Anfangslage zurückführen würde. Dagegen genügen die beiden andern Bewegungen allen Anforderungen, welche wir in § 6 aufgestellt haben.

Die Parallelverschiebung ist in § 3 bereits untersucht worden; es wird nicht nötig sein, den dort angestellten Untersuchungen etwas weiteres hinzuzufügen.

Eine weitere Klasse von Raumformen wird dadurch definiert, dafs jeder Punkt in seine Anfangslage zurückkehrt, wenn man eine Verschiebung längs einer Geraden ausführt und diese mit einer Drehung um dieselbe Gerade verbindet. Nur die Umkehr und die Wiederholung dieser Operation soll das Zusammenfallen von Punkten bezeichnen; dagegen soll keine andere gleichförmige Bewegung imstande sein, einen Körper in seine Anfangslage zu bringen, mit der selbstverständlichen Ausnahme einer vollen Umdrehung um eine Gerade. Unter dieser Voraussetzung hat der Punkt (x, y, z) auch die Koordinaten

$$(1)\quad x + \mu a,\ y \cos \mu\alpha - z \sin \mu\alpha,\ y \sin \mu\alpha + z \cos \mu\alpha$$

für jedes ganzzahlige μ, wo a und α festgewählte Gröfsen sind.

Um eine gerade Linie analytisch darzustellen, wähle man einen Punkt (ξ, η, ζ) beliebig, dann drei Gröfsen p, q, r, zwischen denen die Beziehung besteht:

$$(2)\quad p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$

lasse A alle reellen Werte durchlaufen und setze:

$$(3)\quad x = \xi + pA,\ y = \eta + qA,\ z = \zeta + rA.$$

Wenn die Gerade durch den Punkt (ξ, η, ζ) nochmals hindurchgeht, so müssen die Gleichungen (3) erfüllt werden, wenn man statt x, y, z einsetzt

$$\xi + \mu a,\ \eta \cos \mu a - \zeta \sin \mu\alpha,\ \eta \sin \mu\alpha + \zeta \cos \mu\alpha.$$

Dann mufs sein:

$$(4)\ \mu a = A'p,\ \eta(\cos\mu\alpha - 1) - \zeta\sin\mu\alpha = A'q,\ \eta\sin\mu\alpha + \zeta(\cos\mu\alpha - 1) = A'r.$$

Da durch entgegengesetzt gleiche Werte (p, q, r) und (— p, — q, — r) dieselbe Gerade bezeichnet wird, so ergiebt sich nur eine gerade Linie, sobald ξ, η, ζ und μ gegeben sind. Die Länge, welche man auf der Geraden vom Punkte (ξ, η, ζ) aus zurücklegen mufs, um den Punkt wieder zu erreichen, beträgt

$$(5)\ A' = \sqrt{\mu^2 a^2 + 4(\eta^2 + \xi^2)\sin^2\frac{\mu\alpha}{2}}.$$

Soll die Gerade geschlossen sein, so müssen die Gleichungen (4) für dieselben Werte von η, ζ, p, q, r bei entgegengesetzt gleichen Werten von μ und A' befriedigt werden. Diese (notwendige, aber nicht hinreichende) Bedingung zieht bereits die Forderungen nach sich:

$$\eta(1 - \cos\mu\alpha) = 0,\ \zeta(1 - \cos\mu\alpha) = 0.$$

Daraus folgt $q = r = 0$. Der Annahme nach mufs $\cos\alpha < 1$ sein. Somit ergiebt sich folgender Satz:

»Die Gerade $y = z = 0$ ist die einzige geschlossene Gerade von der Länge a; sie soll als die ausgezeichnete Gerade der Raumform bezeichnet werden. Wenn der Winkel α mit 2π inkommensurabel ist, so ist sie die einzige geschlossene Gerade. Ist aber $\varrho\alpha = 2\sigma\pi$ für ganzzahlige Werte von ϱ und σ, so geht durch jeden Punkt eine einzige geschlossene Gerade, welche zur ausgezeichneten Geraden parallel ist; alle diese Geraden haben die Länge ϱa. Wie aber auch α gewählt ist, gehen durch jeden Punkt, der nicht in der ausgezeichneten Geraden liegt, unendlich viele Gerade zum zweitenmale hindurch.«

Die beiden letzten Gleichungen (4) gestatten, $\cos\mu\alpha$ und $\sin\mu\alpha$ eindeutig durch q, r, η, ζ, A' auszudrücken. Dann liefert die zwischen dem Sinus und Cosinus bestehende Beziehung die Gleichung:

$$A' = -\frac{2(\eta q + \zeta r)}{q^2 + r^2},$$

und indem man diesen Wert in die erste Gleichung (4) einsetzt, folgt:

$$(6)\ (q^2 + r^2)\mu a + 2p(\eta q + \zeta r) = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn p, q, r und μ gegeben sind, und ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes bedeuten, eine Ebene dar. Ist also die Richtung einer Geraden bestimmt, so kann der Punkt (ξ, η, ζ), durch welchen eine solche Gerade zweimal hindurchgeht, nur in einer Ebene liegen, deren Gleichung aus (6) dadurch erhalten wird, dafs man für μ die Werte $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ der Reihe nach einsetzt. Alle diese Ebenen sind unter einander und zu der Geraden $y = z = 0$ parallel. Sobald festgesetzt ist, in welcher von diesen Ebenen der Punkt liegt, ist μ und damit A' bestimmt. Dann liefern die Gleichungen (4) im allgemeinen nur einen einzigen Wert von η und ζ. Die vorstehenden Erwägungen lassen sich aber nicht anstellen, wenn $q = r = 0$ ist, weil dann die Gleichung (6) identisch erfüllt wird. Für $p = 1$ wird aber kein endlicher Wert von η und ζ der Gleichung (6) genügen; jede Gerade also, welche mit der ausgezeichneten Geraden einen rechten Winkel bildet, mag sie von ihr geschnitten werden oder windschief zu ihr sein, kann nicht in einen früheren Punkt zurückkehren. Daraus folgt der Satz:

»Jede Gerade, welche zu der ausgezeichneten Geraden parallel ist, enthält keinen Doppelpunkt; sie ist geschlossen, wenn α und π kommensurabel sind. Wenn die Gerade zu der ausgezeichneten Geraden unter einem rechten Winkel geneigt ist, so verläuft sie beiderseits ins Unendliche, ohne sich zu durchschneiden. Dagegen giebt es in jeder andern Richtung Gerade, welche sich selbst durchschneiden; wenn die Richtung gegeben ist, so füllen die Doppelpunkte eine diskontinuierliche Schar von Geraden an, welche zu der ausgezeichneten Geraden parallel sind. Alle Geraden von der gegebenen Richtung, welche keine dieser Geraden treffen, sind weder geschlossen noch durchschneiden sie sich.«

Wir wollen jetzt untersuchen, ob sich nicht eine Gerade mehrmals durchschneiden kann, etwa in zwei Punkten (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ'). Zu dem Ende gehen wir von den Gleichungen aus:

$$(7)\quad \begin{aligned} (\xi - \xi')y &= (\eta - \eta')x + \xi\eta' - \xi'\eta \\ (\xi - \xi')z &= (\zeta - \zeta')x + \xi\zeta' - \xi'\zeta. \end{aligned}$$

Sollen diese zwei Gleichungen auch erfüllt sein für

$$x = \xi + \mu a,\quad y = \eta \cos \mu\alpha - \zeta \sin \mu\alpha,\quad z = \eta \sin \mu\alpha + \zeta \cos \mu\alpha,$$

so müssen die beiden Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} (\eta - \eta')\mu a &= (\xi - \xi')[\eta(\cos \mu\alpha - 1) - \zeta \sin \mu\alpha] \\ (\zeta - \zeta')\mu a &= (\xi - \xi')[\eta \sin \mu\alpha + \zeta(\cos \mu\alpha - 1)]. \end{aligned}$$

Vertauscht man hierin ξ mit ξ', η mit η', ζ mit ζ', μ mit μ', so erhält man die Bedingungen dafür, dafs auch die Gleichungen (7) für $\xi' + \mu' \mathrm{a}$, $\eta' \cos \mu'\alpha - \zeta' \sin \mu'\alpha$, $\eta' \sin \mu\alpha + \zeta \cos \mu'\alpha$ befriedigt werden. Setzt man in die beiden letzten Gleichungen die Werte von η' und ζ' aus den beiden vorangehenden ein, so folgen die beiden Bedingungen:

$$\mathrm{P}\eta - \mathrm{Q}\zeta = 0, \quad \mathrm{Q}\eta + \mathrm{P}\zeta = 0,$$

wo ist

$$\mathrm{P} = \mu'(\cos \mu\alpha - 1) - \mu(\cos \mu'\alpha - 1)$$
$$+ \frac{\xi - \xi'}{\mathrm{a}}(1 + \cos(\mu + \mu')\alpha - \cos \mu\alpha - \cos \mu'\alpha)$$

$$\mathrm{Q} = \mu' \sin \mu\alpha - \mu \sin \mu'\alpha + \frac{\xi - \xi'}{\mathrm{a}}(\sin(\mu + \mu')\alpha - \sin \mu\alpha - \sin \mu'\alpha).$$

Diese beiden Gleichungen können, wofern η und ζ nicht beide verschwinden, nur erfüllt werden für $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$. Jede Gleichung liefert einen Wert für $\xi - \xi'$; indem wir beide Werte gleich setzen, folgt die Bedingung:

$$(8) \quad \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\mu\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\mu'\alpha}{2}}.$$

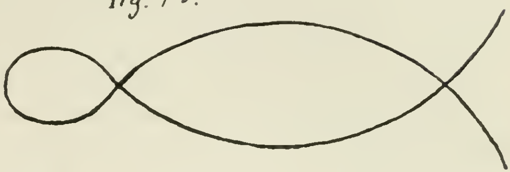
Sobald diese Gleichung für ganzzahlige Werte von μ und μ' erfüllt wird, kann man die Werte von ξ, η, ζ ganz willkürlich wählen und daraus ξ', η', ζ' im allgemeinen eindeutig berechnen. Somit wird jede Gerade, welche für einen solchen Zahlwert μ in sich zurückkehrt, von einem andern Punkte aus für μ' sich schneiden. Auch verhalten sich die Längen, welche von (ξ, η, ζ) und von (ξ', η', ζ') je zu diesem Punkte zurückkehren, wie μ zu μ'.

Für $\mu' = 1$ und $\operatorname{tg} \frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{x}$ geht die Gleichung (8) über in

$$\binom{\mu + 1}{3} - 2\binom{\mu + 1}{5}\mathrm{x}^2 + 3\binom{\mu + 1}{7}\mathrm{x}^4 \ldots = 0.$$

Setzen wir also $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{5}$, so ist $\mu = 4$, und demnach wird bei dem entsprechenden Werte von α jede Gerade, welche für $\mu = 1$ zum zweitenmale durch einen Punkt geht, sich auch für $\mu = 4$ schneiden; zugleich ist die eine Länge viermal so grofs als die andere; der Verlauf der Linie wird also durch die Figur 40 angedeutet.

Fig. 40.



Die Gleichung (8) wird jedesmal befriedigt, wenn $\mu\alpha$ und $\mu'\alpha$ ungerade Vielfache von π sind. Dann folgt:

$$(9)\quad \xi' = \xi + \frac{\mu - \mu'}{2}\,a,\quad \eta' = \frac{\mu'}{\mu}\,\eta,\quad \zeta' = \frac{\mu'}{\mu}\,\zeta.$$

Zugleich fällt der Wert von μ' ganz aus der Gleichung (7) heraus. Ist also $\mu\alpha = (2\varrho + 1)\pi$ für ein ganzzahliges ϱ, und zieht man von einem beliebigen Punkt aus eine Gerade, welche für diesen Wert von μ ein zweitesmal durch diesen Punkt geht, so enthält die Gerade auch jeden Punkt (ξ', η', ζ'), welcher sich aus (9) für $\mu' = (2\varrho' + 1)\frac{\pi}{\alpha}$ bei ganzzahligem ϱ' ergiebt, und jeder solche Punkt ist ebenfalls Doppelpunkt. Jede derartige Gerade hat also unendlich viele Doppelpunkte. Setzt man z. B. $\alpha = \frac{\pi}{4}$, so kann man $\mu' = 4(2\sigma + 1)$ bei ganzzahligem Werte von σ setzen.

Soll die durch die Gleichungen (3) und (4) bestimmte Gerade ganz in der Ebene:

$$(10)\quad Kx + Ly + Mz = N$$

liegen, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$K\xi + L\eta + M\zeta = N,$$

$$K\mu a + L[\eta(\cos\mu\alpha - 1) - \zeta\sin\mu\alpha] + M[\eta\sin\mu\alpha + \zeta(\cos\mu\alpha - 1)] = 0.$$

Sobald ξ, η, ζ diesen beiden Bedingungen genügen, gehört die Gerade der Ebene an. Im allgemeinen wird also jede Ebene für jeden Wert von μ eine einfach ausgedehnte Schar von Geraden mit Doppelpunkten enthalten. Nur für $\cos\mu\alpha = 1$ $\sin\mu\alpha = 0$ verlangt die zweite Gleichung: $K = 0$, und dann wird jeder Punkt der Ebene $Ly + Mz = N$ einer geschlossenen Geraden angehören; dagegen wird wiederum jeder Punkt einer gewissen Geraden Doppelpunkt für eine in der Ebene enthaltene und einem andern Werte von μ entsprechende Gerade sein. Nur für $L = M = 0$ können die beiden Gleichungen nicht zugleich erfüllt werden; in jeder Ebene, welche auf der ausgezeichneten Geraden senkrecht steht, liegen, wie wir bereits oben sahen, nur solche Gerade, welche unendlich sind und sich nicht durchschneiden. Die Ebenen der vorliegenden Raumform zerfallen also in drei Klassen: a) solche, in denen weder geschlossene noch sich schneidende Gerade liegen, b) solche, in denen keine geschlossene Gerade enthalten sind, und c) solche, in denen Gerade der verschiedensten Art vorkommen. Die Ebenen der ersten Klasse stehen auf der ausgezeichneten Geraden senkrecht, die der dritten Klasse gehen durch dieselbe hindurch oder sind zu ihr parallel; dagegen gehört jede Ebene, von welcher die ausgezeichnete Gerade unter einem schiefen Winkel geschnitten wird, der zweiten Klasse an. Ist eine solche Ebene gegeben, so kann die Zahl μ noch beliebig angenommen werden, jedoch mit der Beschränkung, dafs nicht $\mu\alpha$ ein Vielfaches von 2π ist; die zu jedem μ gehörigen Doppelpunkte füllen eine gerade Linie an.

Es darf nicht auffallen, dafs die hier erhaltenen Ebenen zum Teil ganz verschieden sind von den zweidimensionalen Raumformen, welche wir früher bei verschwindendem Krümmungsmafs erhalten haben. Diese Ebenen gehören eben zu den am Schlusse von § 6 charakterisierten Raumformen, welche nur in gesonderten Linien, (deren Zahl allerdings unendlich grofs sein kann), wieder zusammenstofsen und die wir in § 7 vollständig ausgeschlossen haben.

Auf weitere Untersuchungen, welche für den hier betrachteten Raum noch angestellt werden müssen, soll nur hingewiesen werden. Dieselben betreffen die Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden, die der Schnittlinien zweier Ebenen, die Senkrechten, welche von einem Punkte auf eine Ebene oder Gerade gefällt werden können u. dgl. Um die Art der Behandlung anzudeuten, erinnern wir daran, dafs der Fufspunkt der vom Punkt (ξ, η, ζ) auf die Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ gefällten Senkrechten die Koordinaten $\xi - MA$, $\eta - MB$, $\zeta - MC$ hat, wenn $M = \frac{A\xi + B\eta + C\zeta + D}{A^2 + B^2 + C^2}$ ist. Setzt man hierin für ξ, η, ζ die aus (1) folgenden Werte, so erhält man Punkte, welche im allgemeinen nicht zusammenfallen.

Obwohl wir uns nicht die Aufgabe gestellt haben, alle Raumformen zu finden, welche in einem endlichen Bereiche den

Voraussetzungen Euklids genügen, wollen wir doch noch eine weitere Raumform hier beifügen und einige ihrer Eigenschaften entwickeln. λ, μ, ν seien beliebige positive oder negative ganze Zahlen mit Einschlufs von null, a, b, c seien drei feste Längen; dann soll der Punkt (x, y, z) zusammenfallen mit den Punkten:

$$x(-1)^{\lambda} + \mu a, \; y(-1)^{\lambda} + \nu b, \; z + \lambda c.$$

Läfst man also die Koordinaten bei ganzzahligem λ, μ, ν um μa, νb, $2\lambda c$ wachsen, so erhält man wieder denselben Punkt. Auf diese Weise erhält man, wie in § 3 und entsprechend den in § 2 für zwei Dimensionen getroffenen Festsetzungen, von jedem Punkte aus unendlich viele, diskontinuierlich gelegene, geschlossene gerade Linien. Diese Linien werden im allgemeinen keinen Doppelpunkt besitzen. Dagegen kommen auch solche Gerade vor, welche bereits für die halbe Länge in sich zurückkehren; unendlich viele geschlossene Gerade durchschneiden sich auch selbst, haben also in ihrem Verlauf Ähnlichkeit mit der Lemniskate. Endlich giebt es Gerade, welche sich in einem Punkte durchschneiden, aber von da ab nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufen.

§ 9.

Raumformen von nicht-verschwindender Krümmung.

Bei Raumformen von konstanter negativer Krümmung $1:k^2$ wenden wir folgende, allgemein gebräuchliche Ausdrücke an. Wir nennen jedes reelle Verhältnis $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ einen Punkt, unterscheiden aber einen reellen, einen unendlich fernen und einen idealen Punkt, jenachdem $k^2 x_0{}^2 + x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$ einen negativen, verschwindenden oder einen positiven Wert hat. Ebenso nennen wir jede einfach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Punkten eine Gerade; eine solche enthält entweder gar keine reellen und keine unendlich fernen Punkte, oder sie enthält aufser einem unendlich fernen nur noch ideale Punkte, oder auf ihr liegen alle drei Arten von Punkten; eine Gerade der letzten Klasse soll als reelle Gerade bezeichnet werden, während wir sagen, eine Gerade der zweiten Klasse berührt das Unendlichferne, und während die Gerade der ersten Art als ideale Linie bezeichnet wird. Vergleicht man die Lage zweier Körper mit einander, so werden bei den entsprechenden analytischen Gleichungen im allgemeinen zwei Gerade in sich verbleiben, von denen die eine dem reellen, die andere dem idealen Gebiet angehört. Die gleichförmige Bewegung ist also im allgemeinen eine Verschiebung längs einer reellen Geraden, verbunden mit einer Drehung um dieselbe Gerade. Ein Spezialfall ist eine blofse Drehung, ein anderer eine blofse Verschiebung. Dazu tritt noch der Fall, dafs eine Gerade in sich verbleibt, welche das unendlich ferne Gebiet berührt. Die allgemeine Bewegung entspricht offenbar allen Anforderungen, denen eine Bewegung genügen mufs, wenn sie imstande sein soll, einen Körper in seine Anfangslage zurückzuführen; dasselbe gilt von der Verschiebung längs einer reellen Geraden. Dagegen müssen die beiden andern Klassen der Bewegung ausgeschlossen werden, die Drehung um eine Gerade nach den allgemeinen Prinzipien, die andere Bewegung entsprechend den in § 7 (S. 329) durchgeführten Entwicklungen. Wie die möglichen Bewegungen mit einander verbunden werden können, soll uns nicht weiter beschäftigen.

Sehr einfach gestaltet sich die Herleitung aller Clifford-Kleinschen Raumformen konstanter positiver Krümmung, wofern wir von den am Schlusse von § 6 erwähnten Raumformen absehen. Wir wissen, dafs jede elliptische Raumform auf einen Riemannschen Raum analytisch »abgewickelt« werden kann; im folgenden beschränken wir uns auf solche Raumformen, bei denen bereits die »Abwicklung« auf einen Kleinschen Raum möglich ist. Die Herleitung der übrigen bietet dann keine Schwierigkeit.

Nach den in I § 19 gefundenen Sätzen kann jede gleichförmige Bewegung in einer solchen Raumform auf die gleichzeitige Verschiebung längs zweier Geraden, welche reziproke Polaren von einander sind, zurückgeführt werden. Dann werden entweder nur diese beiden Geraden in sich verschoben, oder alle Geraden, welche ihnen in dem durch die Verschiebung angegebenen Sinne parallel sind, bleiben in Deckung mit ihrer Anfangslage. Der erste Fall tritt ein, wenn die Verschiebungen längs der beiden ersten Geraden ungleiche Gröfse haben; im zweiten Falle werden die beiden ersten Geraden, und mit ihnen die Parallelen, um dieselbe Strecke in sich verschoben.

Jetzt denken wir uns, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit gestattet ist, die Bewegung, durch welche ein Körper in seine Anfangslage gebracht wird, sei gleichförmig. Eine Gerade g werde dabei in sich verschoben, und zwar sei L die kleinste

Verschiebung, welche imstande wäre, längs dieser Geraden den Körper in seine Anfangslage zu bringen. Zugleich werde die reziproke Polare g_1 um eine Strecke L_1 verschoben; hierbei sei (was sich durch Vertauschung von g mit g_1 immer erreichen läfst) die Anordnung getroffen, dafs jedenfalls L_1 nicht gröfser ist als L. Dann wird natürlich eine beliebig oft vorgenommene Wiederholung der Bewegung den Körper jedesmal wieder in seine Anfangslage zurückführen, also auch eine Bewegung, durch welche g um μL, g_1 um μL_1 für ein ganzzahliges μ in sich verschoben werden. Wir geben hier μ den ersten Wert, für den $\mu L > \pi k$ ist. Sind wir vom Punkte P der Geraden g ausgegangen, so haben wir durch μ-malige Wiederholung die Linie einmal beschrieben, und die neue Lage P' von P fällt über P hinaus. Jetzt fällt der vorangehende Endpunkt von L entweder noch vor den Punkt P oder auf denselben. Im ersten Falle ist die Strecke $PP' < L$. Da aber jetzt der Punkt P' ebenfalls mit P identisch sein mufs, so wäre L nicht die kleinste Strecke von der angegebenen Eigenschaft. Wir haben also diesen Fall auszuschliefsen, und indem wir $\mu = p + 1$ setzen, folgt: $L = \frac{1}{p}\pi k$, wo p eine ganze Zahl ist.

In der Kleinschen Raumform, auf die wir die zu bestimmende Raumform abgebildet haben, hat jeder Punkt der Linie g durch $(p-1)$-malige Wiederholung der angegebenen Bewegung seine Anfangslage wieder erhalten. Die Transformation, welche die hierdurch gewonnene mit der im Anfang eingenommenen Lage in Beziehung setzt, mufs also nach den Forderungen des sechsten Paragraphen die identische sein (resp. jedes x_ι in $-x_\iota$ umwandeln); speziell mufs also auch jeder Punkt der reziproken Polare g_1 seine Anfangslage wieder einnehmen. Die Verschiebung L_1 längs dieser zweiten Geraden mufs also $= \frac{r k \pi}{p}$ sein, wo r eine ganze Zahl ist. Da aber der Annahme nach L_1 nicht gröfser sein soll als L, und L_1 offenbar nicht gleich null sein kann, so mufs $L_1 = \frac{k\pi}{p}$ sein. Die Bewegung, durch die ein Körper wieder in seine Anfangslage zurückgeführt wird, verschiebt also alle (Cliffordschen) Parallelen einer gewissen Schar in sich.

Um dies ohne Rücksicht auf den angezogenen allgemeinen Satz zu erkennen, beachte man, dafs die Verschiebung längs g_1 einer Drehung um g entspricht, dafs man demnach sagen kann: Man denke eine Verschiebung L längs einer Geraden g ausgeführt und diese mit einer Drehung $\varDelta$ um dieselbe Gerade verbunden. Statt die Drehung und die Verschiebung gleichzeitig auszuführen, kann man sie auch nach einander vor sich gehen lassen. So führe man auch jetzt erst die blofse Verschiebung aus, d. h. eine Bewegung, bei der die Gerade und jede hindurchgelegte Ebene in sich verbleibt, und wiederhole sie $(p-1)$-mal. Dann erlangt, wie wir vorhin bewiesen haben, jeder Punkt der Geraden g seine entgegengesetzt gleichen Koordinaten. Für die Punkte jeder hindurchgelegten Ebene ist dies aber nicht der Fall, sondern jeder Punkt nimmt gegen die Gerade g eine symmetrische Lage an. Hieraus erkennen wir schon, dafs eine blofse Verschiebung den Anforderungen nicht genügt und dafs eine Drehung hinzukommen mufs. Wiederholt man jetzt $(p-1)$-mal die mit der Verschiebung L verbundene Drehung $\varDelta$, so mufs diese für sich jeden Punkt in seine symmetrische Lage gegen g bringen; daher mufs $\varDelta = \frac{\pi}{p}$ oder ein ungerades Vielfaches dieser Zahl sein. Der letztere Fall ist aber nach der über die Gröfse von L und L_1 getroffenen Festsetzung auszuschliefsen. Wir sehen also, dafs die Verschiebung $\frac{k\pi}{p}$ mit einer Drehung $\frac{\pi}{p}$ verbunden sein mufs. Bei einer solchen Bewegung bleiben aber alle Parallelen der einen Schar in Deckung mit ihrer Anfangslage.

Diese Bewegung entspricht aufs schönste der Parallel-Verschiebung in einem parabolischen Raume, indem alle Punkte sich in geraden Linien bewegen und gleiche Strecken zurücklegen. Der Raum wird in beiden Fällen mit Geraden angefüllt, von denen jede in sich verschoben wird. Die auf die angegebene Weise gewonnene Zurückführung eines Körpers in seine Anfangslage steht also in vollem Einklange mit derjenigen, welche wir im dritten Paragraphen für einen parabolischen Raum mitgeteilt haben. Demnach darf man auch hier diese eine Bewegung mit gleichartigen vereinigen, ganz wie wir dort Parallelverschiebungen nach verschiedenen Richtungen vorgenommen haben.

In der That sei g′ eine zweite Gerade, welche nicht zu dem vorher benutzten System von Parallelen gehört; längs dieser Geraden sei eine Verschiebung $\frac{1}{q}\pi k$ und zugleich um sie eine Drehung $\frac{\pi}{q}$ ausgeführt. Dann wird hierdurch eine Schar von Parallelen bestimmt, welche sämtlich dieselbe Verschiebung erleiden. Soll die aus beiden Parallelverschiebungen zusammengesetzte Bewegung wieder eine Schar von Parallelen in sich bewegen, so muſs nach I. § 19 die Schar der im zweiten Falle erhaltenen Parallelen denselben Sinn haben wie im ersten; mit andern Worten: Bewegt man den Körper so, daſs die Gerade g′ mit g zusammenfällt und die Richtung L′ mit L identisch wird, so muſs auch der Sinn der Drehung Δ' mit dem der Drehung Δ übereinstimmen. Unter derselben Bedingung darf man längs einer dritten Schar von Parallelen um die Länge $\frac{1}{r}\pi k$ bewegen und hierdurch wieder ein Zusammenfallen von Körpern bestimmen. Eine derartige Festsetzung entspricht der in § 3 getroffenen auch insofern, als irgend zwei Substitutionen der Gruppe jedesmal mit einander vertauscht werden können.

Die für eine zwei- und dreidimensionale elliptische Raumform gewonnenen Resultate können leicht auf eine höhere Zahl von Dimensionen übertragen werden. Zum Beweise ist es nur notwendig, die Sätze aus I § 19 über die gegenseitige Lage von geraden Linien auf eine höhere Zahl von Dimensionen zu übertragen. Wenn das auch unsere Absicht nicht sein kann, so können wir uns doch nicht versagen, das Resultat selbst hier mitzuteilen; dasselbe lautet:

»Für eine gerade Zahl von Dimensionen wird eine elliptische Raumform entweder bei jeder starren Bewegung eines Teiles auch als Ganzes in sich bewegt oder sie läſst sich doch mit Ausschluſs gewisser Grenzgebilde eindeutig auf eine frei bewegliche Raumform abbilden. Dagegen giebt es bei einer ungeraden Zahl von Dimensionen auch elliptische Raumformen, die so auf eine der beiden frei beweglichen Raumformen abgebildet werden können, daſs jedem ihrer Punkte eine endliche Anzahl von Punkten der Riemannschen oder Kleinschen Raumform entspricht; wenn das

Krümmungsmafs $= 1 : k^2$, die Zahl der Dimensionen gleich n, und p eine ganze Zahl ist, so kann man einen Körper dadurch in seine Anfangslage zurückführen, dafs man ihn längs (Cliffordscher) paralleler Linien um eine Strecke $\frac{k\pi}{p}$ oder $\frac{2k\pi}{p}$ bewegt; solcher Bewegungen kann man n von einander unabhängige zu einer Gruppe vereinigen.«

§ 10.

Rückblick.

Die vorstehend betrachteten Raumformen sind erst seit kurzem bekannt. Ein Vortrag Cliffords über eine derartige Raumform ist nicht gedruckt, eine kurze Bemerkung, die er hierüber in einer gedruckten Arbeit gemacht hat, wohl allgemein übersehen worden. Erst durch eine Arbeit des Herrn Klein, deren Inhalt weit über das von Clifford Gefundene hinausging, wurden weitere Kreise auf diese Raumformen aufmerksam gemacht. Aber sie verdienen ebenfalls volle Beachtung; bilden sie doch das letzte Glied in der Entwicklung, die uns zu den älteren Raumformen geführt hat.

Auf den ersten Blick begegnen die Clifford-Kleinschen Raumformen, wie wir sie am besten nennen, den schwersten Bedenken. Wer blofs einige ihrer Eigenschaften kennen lernt, ohne in die Begründung einzudringen, wird unbedingt glauben, die Berechtigung von vornherein verneinen zu müssen. Dafs z. B. die geraden Linien nicht sämtlich von gleicher Länge sind, dafs es z. B. für einen parabolischen Raum neben geschlossenen auch noch unendliche Gerade geben soll, dürfte auf den ersten Blick ganz unzulässig erscheinen. Man wird scheinbar mit Recht sagen: Alle geraden Linien müssen kongruent sein, also auch dieselbe Länge besitzen. Ebenso versteht es sich doch von selbst, dafs der Raum überall gleichförmig sein mufs; und doch scheinen die hier gefundenen Raumformen dieser Forderung nicht zu genügen. Die in den drei ersten Paragraphen aufgestellten Raumformen zeigen wenigstens für die sämtlichen Punkte volle Gleichförmigkeit; man kann sie auch als Ganze so bewegen, dafs jeder Punkt mit jedem andern zur Deckung gelangt; demnach wird zu jeder Linie, welche von einem Punkte ausgeht, eine völlig übereinstimmende

Linie gefunden werden können, die von irgend einem andern Punkte ausgeht. Aber betrachtet man nur z. B. die sämtlichen Geraden, welche von demselben Punkte ausgehen, so werden diese in ihrem Verlaufe nicht voll übereinstimmen; so geht in den betrachteten Raumformen von jedem Punkte mindestens eine geschlossene Gerade aus; sind mehrere Gerade geschlossen, so werden sie keineswegs sämtlich die gleiche Länge besitzen; zudem gehen von jedem Punkte auch unendliche Gerade aus. Aber selbst die Gleichförmigkeit des Raumes in Bezug auf die einzelnen Punkte besteht nicht allgemein. Wir lernten (§ 8 S. 333) unter der Annahme, dafs die Winkelsumme eines jeden geradlinigen Dreiecks zwei Rechte beträgt, eine Raumform kennen, bei welcher eine einzige gerade Linie vor allen andern bevorzugt ist. Alle diese Eigenschaften sind auf den ersten Blick höchst befremdlich und fordern jeden, der sich die Mühe einer genauen Prüfung nicht geben mag, fast zur Ablehnung heraus.

Ganz anders aber mufs das Urteil lauten, wenn man sich diese Mühe nicht verdriefsen läfst. Gewifs, die neuen Raumformen können nicht durch jede Bewegung, welcher ein fester Körper unterworfen werden kann, in sich als Ganze bewegt werden. Aber das kann unmöglich ein Grund sein, ihre Berechtigung zu leugnen. Der Raum kann ja überhaupt nicht bewegt werden; wenn der Ausdruck: Bewegung des Raumes bisher oft gebraucht ist (und gewifs auch ferner noch oft benutzt wird), so findet jeder, der genauer über die Sache nachdenkt, hierin nur einen kurzen Ausdruck für diejenigen Sätze, welche wir in § 4 (S. 291) entwickelt haben.

Sobald man sich aber klar macht, was dieser an sich unerlaubte Ausdruck besagt, erkennt man sofort, dafs die neuen Raumformen berechtigt sind. Bewegung kann nur einem Körper beigelegt werden; sobald zwei feste Körper starr mit einander verbunden sind, wird die Bewegung des einen auch notwendig eine gewisse Bewegung des andern nach sich ziehen. Die feste Verbindung beider kann aber auf ganz verschiedene Weise und durch verschiedene Körper bewirkt werden. Jetzt ist aber die Voraussetzung, dafs die für den zweiten Körper vermittelte Bewegung von den verknüpfenden Körpern unabhängig ist, an sich gleichberechtigt mit der Annahme, dafs die vermittelte Bewegung verschieden sein kann, wenn die Verknüpfung auf verschiedenem Wege erfolgt. Dafs die erste Voraussetzung berechtigt ist, zeigen die Untersuchungen der drei ersten Abschnitte, in denen diese Voraussetzung stets stillschweigend gemacht worden ist; dafs sie aber nicht notwendig ist, hat die vorangehende Untersuchung gelehrt.

Auch die Gleichförmigkeit des Raumes, die ja selbstverständlich gefordert werden mufs, bleibt in vollem Mafse bestehen, so lange man nur einen gewissen endlichen Bereich um jeden einzelnen Punkt betrachtet. Aber nur in diesem Sinne kann die Gleichförmigkeit von vornherein gefordert werden. Einen Beweis, dafs der Raum auch als Ganzes gleichförmig sein mufs, wird man schwerlich liefern können; deshalb ist man genötigt, die Berechtigung der neuen Raumformen so lange anzuerkennen, bis ein solcher Beweis erbracht ist. Die Annahme, dafs alle Geraden auch als Ganze kongruent sein müssen, ist nur eine Folgerung daraus, dafs der Raum auch als Ganzes gleichförmig sei, also ebenfalls durchaus nicht in sich berechtigt.

So versuche man zu beweisen, dafs der Erfahrungsraum, selbst unter der Annahme, dafs die Winkelsumme eines Dreiecks zwei Rechte beträgt, nicht unter die in den §§ 3 und 8 angegebenen Formen fallen kann. Nur bleibe man bei wirklichen Gründen und hüte sich, diejenigen Eigenschaften, deren Vorhandensein man beweisen will, von vornherein ohne Beweis als notwendig zu verlangen. Handelt man nach dieser Vorschrift, so wird man sich ohne Zweifel vergebens bemühen.

Zwar wird mancher sagen, die neuen Raumformen seien nicht so schön, wie z. B. die euklidische; aber darum handelt es sich nicht, was dem Geschmack des einzelnen zusagt, sondern nur darum, was wahr ist. Gewifs, im Ausspruch der Sätze für den euklidischen Raum zeigt sich eine gröfsere Gleichförmigkeit; wenn ein allgemeiner Satz gewisse Ausnahmen zuläfst, so kann man diese Ausnahmen sogar durch Einführung uneigentlicher Gebilde vollständig beseitigen. Namentlich möchte ich hinweisen auf den Satz, dafs in der euklidischen Geometrie stets zwei verschiedene Lagen desselben festen Körpers erhalten werden können durch Drehung um eine gerade Linie und durch Verschiebung längs derselben Geraden. Dieser Satz gründet sich wesentlich auf die Eindeutigkeit in der Fortsetzung der Bewegungen, mufs also in den neuen Raumformen wesentliche Modifikationen erleiden. Aber dafür besitzen die Clifford-Kleinschen Raumformen, wie unsere kurze Charakterisierung einzelner Formen gezeigt hat, wieder manche Vorzüge, die bei den frei beweglichen Raumformen wegfallen.

Nur ein einziges Bedenken kann meines Erachtens mit einiger Berechtigung gegen die neuen Raumformen geltend gemacht werden. Die Mechanik mufs von der Voraussetzung ausgehen, dafs nur die gegenseitige Lage der Körper für ihre gegenseitige Einwirkung von Einflufs ist, nicht aber die Lage im Raume selbst. Betrachtet man z. B. die Einwirkung, welche zwei Massenpunkte infolge der Fernwirkung auf einander ausüben, so darf es nicht auf die Richtung der Verbindungsgeraden, sondern nur auf ihre Länge ankommen. Im vorliegenden Falle scheint aber die Einwirkung je nach der Richtung der Geraden verschieden zu sein, so dafs sie sich zu ändern scheint, wenn man den Punkten unter Beibehaltung der Entfernung eine andere Lage giebt. Indessen ähnliche Bedenken stellen sich jeder neuen Theorie entgegen; sie berechtigen nicht zur Verwerfung, sondern gestatten höchstens, das endgültige Urteil vorläufig hinauszuschieben. Die Mechanik ist eben für die neuen Raumformen noch nicht entwickelt; sobald das geschieht, wird man um so bestimmter erwarten können, dafs die erwähnten Bedenken wegfallen, weil die reine Geometrie auch die Grundlage für die Mechanik bildet und von geometrischer Seite die Berechtigung nicht bezweifelt werden kann. Zudem handelt es sich hier um Fernwirkungen, deren Annahme an sich den schwersten Bedenken unterliegt und welche von dem grofsen Entdecker des Gravitationsgesetzes nur als Ersatz für das Resultat unmittelbarer, jedoch unbekannter Nahewirkungen betrachtet wurden.

Die Abschnitte I, II und IV suchen die Frage zu beantworten: Welche Gesetze gelten für den Raum (im eigentlichen Sinne)? Bei der Beantwortung dieser Frage können wir von der Erfahrungs-Thatsache ausgehen, dafs diejenigen Gesetze, welche Euklid aus wenigen Voraussetzungen hergeleitet hat, entweder in voller Strenge gelten oder dafs doch die Abweichung für jedes Gebiet, das unserer direkten Messung zugänglich ist, innerhalb derjenigen Fehlergrenzen bleibt, welche selbst bei Anwendung der vorzüglichsten Apparate nicht vermieden werden können. Daraus haben wir in den beiden ersten Abschnitten den Satz hergeleitet, dafs für ein solches Gebiet drei Möglichkeiten bestehen. Dementsprechend unterschieden wir Raumformen von positivem, verschwindendem und negativem Krümmungsmafs oder von einem andern Gesichtspunkte aus elliptische, parabolische und hyperbolische Raumformen. Zwar haben wir zuweilen im ersten Abschnitt, namentlich in den §§ 9—21, bereits den Raum als Ganzes betrachtet; aber das geschah, um das erste Eindringen in ein noch unbekanntes Gebiet zu erleichtern.

Nehmen wir jetzt an, es sei entschieden, welche Gesetze für ein allseitig begrenztes Gebiet des Raumes gelten, es sei also ausgemacht, ob er elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sei, so wissen wir doch noch nicht, wie sich die einzelnen Teile des Raumes zu einem Ganzen vereinigen. Schon im ersten Abschnitt fanden wir zwei elliptische Raumformen, die Riemannsche und ihre Polarform. Der vorliegende Abschnitt zeigt uns aber, dafs nach dieser Richtung hin eine aufserordentlich grofse Mannigfaltigkeit besteht. Um die verschiedenen Fälle übersehen und gruppieren zu können, ist es am einfachsten, von der Bewegung eines starren Körpers auszugehen. Erteilen wir einem solchen Körper eine Bewegung, so wird für jeden mit ihm durch weitere Körper verbundenen neuen Körper eine gewisse Bewegung vermittelt. Die neue Bewegung hängt ab von der Lage der beiden Körper im Raume und von der Bewegung, welche der erste Körper macht. Es fragt sich aber, ob sie nicht auch von der Art der Verbindung abhängt, die zwischen den beiden Körpern besteht. Unter der Voraussetzung, dafs es auf diese Verbindung nicht ankommt, erhalten wir nur eine parabolische, eine hyperbolische und zwei elliptische Raumformen. Prüfen wir aber die Möglichkeit, dafs auch die Art der Verbindung auf die neue Bewegung von Einflufs ist, so stofsen wir auf keinen innern Widerspruch; wir finden vielmehr eine grofse Reihe neuer Raumformen, von denen wir auf den vorangehenden Seiten nur einige wenige erwähnt haben. Sie einzeln aufzuzählen, war uns nicht möglich; um so wichtiger schien es uns, das Prinzip anzugeben, aus dem sich alle herleiten lassen.

Damit erachten wir die Aufgabe für gelöst, die wir uns in dem vorliegenden ersten Bande gestellt haben. Wir sind zum Schlufs wieder zu dem herrlichen Werke zurückgekehrt, von dem wir ausgegangen sind. Ein kleiner Mangel in den Elementen Euklids, den der Verfasser sicherlich selbst empfunden und genugsam hervorgehoben hat, gab uns Veranlassung, seine Parallelen-Theorie zu prüfen, und führte an erster Stelle zur Lobatschewskyschen Geometrie. Schrittweise hat sich das Gebiet erweitert: zu der Euklidischen und Lobatschewskyschen traten die Riemannsche und die Kleinsche Raumform; endlich haben wir eine grofse Zahl weiterer Formen gefunden, die wir glaubten nach Clifford und Klein benennen zu sollen. Aber alle besitzen dieselbe einfache Grundlage, die aus der von Euklid aufgestellten durch eine ganz leichte Änderung gewonnen werden kann. Statt nämlich mit dem griechischen Geometer unmittelbar den Raum als Ganzes zu untersuchen, beschränken wir uns zunächst auf ein allseitig begrenztes Gebiet; für diesen Bereich gehen wir aber von denselben Voraussetzungen aus, die Euklid gemacht hat, und schliefsen der Natur der Sache nach nur diejenigen aus, welche durch ihren Inhalt verlangen, über jenes Gebiet hinauszugehen. Demnach sind wir genötigt, dem griechischen Mathematiker die höchste Bewunderung zu zollen, da er es verstanden hat, ein so mächtiges Lehrgebäude auf wenigen einfachen Prinzipien zu errichten, die zwar im Laufe der Jahrtausende eine kleine Beschränkung erfahren haben, aber durch die eingehendsten Untersuchungen in allen wesentlichen Punkten als richtig erwiesen sind.

Litteratur-Nachweis.

[1]) I § 1. S. 1. Die Elemente Euklids werden im vorliegenden Werke stets nach der Ausgabe von Heiberg (Leipzig 1883—1886) citiert.

Eine ganz vorzügliche Würdigung der verschiedenen Versuche, das Parallel-Axiom zu beweisen, giebt Sohnke in Ersch und Grubers Realencyklopädie in dem Artikel: Parallel. Am liebsten hätte ich einfach auf diesen Artikel verwiesen; aber einerseits ist dies Werk nicht jedem Leser zugänglich, zweitens sind diejenigen Versuche, deren Besprechung bei Sohnke den meisten Raum beansprucht, heute ganz vergessen. Ich habe daher in den §§ 2—5 solche Beweisversuche kurz gewürdigt, die auch heute noch in Lehrbüchern mitgeteilt werden.

[2]) I § 2. S. 5. Von wem die einzelnen in diesem § mitgeteilten Versuche herrühren, dürfte sich kaum noch ermitteln lassen. Die Voraussetzung. durch jeden Punkt innerhalb eines Winkelfeldes lasse sich mindestens eine Gerade ziehen, welche beide Schenkel trifft, wurde von Legendre gemacht, als seine in § 5 anzugebenden Versuche zu keiner Entscheidung führten. Die im Text nur ausgesprochene, aber nicht bewiesene Behauptung, die Legendresche Annahme gelte für jeden Winkel, wenn sie für einen einzigen richtig sei, läfst sich in folgender Weise erhärten: Wenn innerhalb eines einzigen Winkelfeldes sich eine gerade Linie ziehen läfst, die keinen Schenkel trifft, so folgt die Lobatschewskysche Geometrie, wie sie in den §§ 9—16 dargelegt wird; alsdann kann aber in jedem Winkelfelde eine Gerade gezogen werden, die keinen der beiden Schenkel trifft.

Auf die Annahme, dafs ein Winkelfeld niemals das Feld eines gröfseren Winkels in sich schliefsen könne, gründet Crelle die Parallelentheorie in seinem Lehrbuch der Geometrie. Der Kürze wegen habe ich die prinzipielle Seite der Frage gar nicht berührt.

[3]) I § 3. S. 6. Göttinger Nachrichten 1816, 20. April; Gaufs' Werke IV. S. 365. Gaufs gebraucht das Wort »Lage« in dem Sinne, den man heute gewöhnlich mit dem Ausdruck »Richtung« verbindet.

[4]) I § 4. S. 9. Thibauts Verfahren findet sich in seinem Lehrbuch der Geometrie 1818. Eine genaue Prüfung giebt Hr. Günther im Programm von Ansbach 1877. Man vergl. auch eine kleine Note in Hoffmanns Zeitschrift VIII S. 220.

[5]) I § 5. S. 11. Legendres Untersuchungen sind in den Mémoires de Paris t. XII S. 369 (v. J. 1833) und in den älteren Ausgaben seiner Geometrie mitgeteilt, auch in einige spätere Lehrbücher, namentlich in Baltzers

Elemente aufgenommen. Eine neue Herleitung der Sätze giebt Hoüel in seinem Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géometrie (Paris 1867) S. 72.

[6]) I § 6. S. 13. Betreffs der in diesem § mitgeteilten Sätze vergleiche man vor allem die Arbeiten des Hrn Beltrami:

Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea, Giornale di Matematica, v. VI. 1868 (französische Übersetzung: Annales de l'Ecole normale t. VI).

Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica S. II. T. II (französische Übersetzung: Annales de l'Ecole normale t. VI).

Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficii pseudosferici, Giornale di Mat. v. X.

Hier füge ich folgende Bemerkung bei: Der Zweck des Litteratur-Nachweises ist nicht, einen Überblick über die Entwicklung der verschiedenen Theorieen zu geben und die Verdienste der einzelnen Forscher zu schildern. Wenn das meine Absicht wäre, so müfste z. B. Hr. Beltrami an vielen Stellen meines Buches ausdrücklich erwähnt werden.

[7]) I § 7. S. 17. Die durchgeführte Betrachtung kommt auf den zuerst von Hrn Cayley bewiesenen Satz hinaus, dafs die Lobatschewskysche Ebene projektivisch auf das Innere eines Kegelschnitts abgebildet werden kann. Man vergl.

Sixt memoir upon Quantics, Phil. Transactions t. 149. 1859.

On the Non-Euclidean Geometry, math. Annalen, B. V.

Der Inhalt dieses § wird im Anschlufs an die Entdeckungen des Hrn Klein im zweiten Abschnitt eine genauere Entwicklung finden.

[8]) I § 9. S. 19. Die hier behandelte Raumform wurde zuerst in einem Vortrage und mehreren Notizen Lobatschewskys (1826—1828) kurz charakterisiert und darauf in zahlreichen Werken eingehend von ihm behandelt. Eine vollständige Ausgabe der geometrischen Werke Lobatschewskys hat die physiko-mathematische Gesellschaft in Kasan veranstaltet. Mit derselben Raumform befafst sich Joh. Bolyai in: Appendix, scientiam spacii absolute veram exhibens, welcher 1832 dem Werke seines Vaters beigefügt war: Tentamen iuventutem in elementa matheseos introducendi.

Übrigens hat sich Gaufs mit dieser Sache weit früher befafst und in zwei Recensionen v. J. 1816 und 1823 genugsam angedeutet, wie tief er bereits in die Theorie eingedrungen war.

Über die weitere Litteratur vergl. man das schon erwähnte Werk: Frischauf, Einleitung in die absolute Geometrie, Leipzig 1876.

Die in den §§ 9—13 durchgeführte Begründung der Lobatschewskyschen Geometrie dürfte der Anlage und der Mehrzahl der Beweise nach mein Eigentum sein; einige Beweise (z. B. § 11, d) sind vollständig, andere mit leichten Änderungen übernommen.

[9]) I § 15. S. 46. Lobatschewsky, géometrie imaginaire, Crelles Journal B. XVII, (wieder abgedruckt im zweiten Bande der ges. Werke). Ich habe eine andere Bezeichnung angewandt, bin von drei andern Relationen

ausgegangen und habe auch sonst kleine Änderungen vorgenommen. Die analytische Herleitung der Kreisfunktionen ist elementaren Lehrbüchern entlehnt.

[10]) I § 16. S. 49. Das benutzte Koordinaten-System ist im Anschlufs an eine Bemerkung Beltramis von Hrn Weierstrafs aufgestellt und hat in meinen Arbeiten viele Verwendung gefunden.

[11]) I § 18. S. 54. Die Theorie des »endlichen Raumes« wurde i. J. 1854 von Riemann kurz entwickelt in der Arbeit: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, (Göttinger Abhandlungen 1867. Werke S. 254 ff.) Darauf folgten mehrere Arbeiten des Hrn v. Helmholtz: Verh. d. naturh.-med. Vereins zu Heidelberg, B. IV und V; Göttinger gel. Nachrichten 1868; Mind 1878 (wieder abgedruckt im B. II der ges. Werke S. 610—660); populäre wissensch. Vorlesungen, Heft III, sowie die oben genannten Abhandlungen des Hrn Beltrami, in denen zuerst diese Raumformen eine eingehende Untersuchung gefunden haben. Alle diese Herleitungen sind analytisch; wenn auch später einzelne Sätze synthetisch bewiesen sind, so fehlte doch bisher eine rein synthetische Begründung dieser Raumformen.

[12]) I § 18. S. 57. Klein, Über die sog. nicht-euklidische Geometrie, math. Annalen B. IV, VI, sowie dessen Anzeige von Frischaufs Elementen in den Fortschritten der Mathematik B. X.

Newcomb, elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature, Borchardts Journ. B. 83.

Killing, über zwei Raumformen von konstanter positiver Krümmung, Borchardts Journal B. 86.

[13]) I § 19. S. 64. Die gegenseitige Lage zweier Geraden ist im wesentlichen bereits entwickelt in: Lindemann, über unendlich-kleine Bewegungen bei allgemeiner projektivischer Mafsbestimmung, math. Annalen B. VII; einzelne Sätze auch bei Newcomb (l. c.). Eine vollständige Theorie gab Clifford: Sketch of Biquaternions (Proc. of the L. math. Soc. Vol. IV, sowie math. Papers S. 181) und in mehreren hinterlassenen Arbeiten.

[14]) I § 20. S. 69. Die Beziehung der Riemannschen Raumform zu ihrer Polarform wurde zuerst in meiner unter [12]) angegebenen Arbeit dargelegt. Auf die Einwendungen, welche Hr. Klein (math. Annalen B. XXXVII) gegen die Bezeichnung »Polarform« erhoben hat, glaube ich nicht eingehen zu sollen; sie erledigen sich von selbst, sobald man beachtet, dafs der Kleinsche Raum sowohl die Polarform des Riemannschen Raumes als auch seine eigene Polarform ist. Auf das Programm des Hrn M. Simon (Lyceum, Strafsburg 1891) werden wir im zweiten Bande näher eingehen.

[15]) I § 23. S. 77. Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky. Nota del socio E. Beltrami, Rendiconti della R. accademia dei lincei 1889.

[16]) I § 23. S. 79. Stolz, Über das letzte Axiom der Geometrie, Berichte des naturw.-mediz. Vereins in Innsbruck 1886.

[17]) I § 24. S. 80. Zuerst mitgeteilt in meiner Abh.: Die Rechnung in den nicht-euklidischen Raumformen, Borchardts Journal B. 89; weitläufiger dargestellt in dem Buche: Die nicht-euklidischen Raumformen (Leipzig 1885).

[18]) II § 1. S. 98. Staudt, Geometrie der Lage (1847) und Beiträge zur Geometrie der Lage (1856—1860). Klein, über die sog. nicht-euklidische Geometrie, math. Annalen B. IV, VI, VII, XVII. Darboux, math. Annalen B. XVII, Schur, math. Annalen B. XVII. Pasch, neuere Geometrie (Leipzig 1882).

[19]) II § 1. S. 99. In den folgenden §§ sind die Konstruktionen so einzurichten, dafs man ganz in dem einmal angenommenen Bereiche bleibt. Über die Art und Weise, wie das zu bewerkstelligen sei, vergl. man aufser dem unter [18]) genannten Werke des Hrn Pasch Mitteilungen der Herren Reyes y Prosper und Pasch im 29. und 32. B. der math. Annalen. Noch weiter geht Hr. Schur im 39. B. der Annalen. Über die in diesen Arbeiten eingeführten idealen Gebilde möchte ich folgende Bemerkung beifügen. Bleibt man ganz auf dem Boden der Projektivität und will man die am Schlusse von II § 1 gemachten Annahmen in voller Allgemeinheit zu Grunde legen, so unterliegt die Einführung der idealen Gebilde keinem Bedenken. Will man aber zur Metrik übergehen oder will man die verschiedenen Möglichkeiten übersehen, nach denen das angenommene Gebiet erweitert werden kann, so sind besondere Vorsichts-Mafsregeln anzubringen, die noch nicht genügend gewürdigt sein dürften.

[20]) II § 2. S. 101. Die Herleitung schliefst sich an die älteren Arbeiten (Staudt, Klein) an; an einigen Stellen ist das erwähnte Werk des Hrn Pasch benutzt. Eine etwas abweichende Darlegung findet man in dem Werke des Hrn Lindemann: Vorlesungen über Geometrie, mit Benutzung der Vorträge von Clebsch, B. II (Leipzig 1891).

[21]) II § 3. S. 107. Die hier gegebene Zuordnung ist bereits durchgeführt in meinen »nicht-euklidischen Raumformen« (Leipzig 1885), nachdem früher nur im allgemeinen die Möglichkeit einer solchen Zuordnung gezeigt war. Später haben die Herren Lindemann (l. c.) und Klein (math. Annalen B. 37) eine nur wenig abweichende Art der Zuordnung angegeben.

[22]) II § 3. S. 116. Staudt in den Beiträgen zur Geometrie der Lage. Lüroth, das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, math. Annalen B. 8.

[23]) II § 5. S. 119. Die Benutzung der Doppelverhältnisse zu Koordinaten rührt bekanntlich von Hrn Fiedler her; der hier eingeschlagene Weg machte es notwendig, einige Änderungen anzubringen.

[24]) II § 5. S. 125. Man vergl. die unter [22]) angeführte Arbeit des Hrn Lüroth.

[25]) II § 10. S. 151. Die Zurückführung der Metrik auf die Projektivität ist zuerst von Hrn Klein (s. die unter [18]) angegebenen Arbeiten) und zwar auf dem hier mitgeteilten Wege bewirkt. Hr. Lindemann (l. c.) legt das »unendlich ferne Gebilde« seinen Ausführungen zu Grunde.

[26]) II § 11. S. 160. Der ausgesprochene Satz beruht darauf, dafs die angegebene siebengliedrige Gruppe keine andere reelle sechsgliedrige Untergruppe hat, als diejenige, welche die Bewegungen in einem dreidimensionalen parabolischen Raume darstellt. Um dies zu zeigen, benutzen wir die symbolische Bezeichnung des Hrn Lie und setzen:

$$X_1 = p,\ X_2 = q,\ X_3 = r,\ X_4 = yr - zq,\ X_5 = zp - xr,$$
$$X_6 = xq - yp,\ X_7 = xp + yq + zr.$$

Während die Transformationen X_1, X_2, X_3 mit einander vertauschbar sind, ist:

$$(X_1 X_4) = 0,\ (X_1 X_5) = -X_3,\ (X_1 X_6) = X_2 \text{ u. s. w.}$$
$$(X_4 X_5) = -X_6,\ (X_5 X_6) = -X_4,\ (X_6 X_4) = -X_5$$
$$(X_1 X_7) = X_1, \ldots (X_4 X_7) = \ldots = 0.$$

Die sämtlichen Transformationen $(X_\alpha X_\beta)$ für $\alpha, \beta = 1 \ldots 7$ gehören also einer sechsgliedrigen Gruppe an, welche durch $X_1 \ldots X_6$ bestimmt wird. Wir wollen beweisen, dafs es keine andere reelle sechsgliedrige Untergruppe giebt.

Kommt nämlich in einer solchen Untergruppe eine inf. Transformation $Z_6 = \Sigma \eta_\iota X_\iota$ für $\iota = 1 \ldots 7$ vor, wo η_7 von null verschieden ist, so kann man die übrigen inf. Transformationen $Z_1 \ldots Z_5$, durch die die Untergruppe bestimmt wird, so wählen, dafs in ihrem Ausdruck die Transformation X_7 nicht vorkommt. Dann darf man die inf. Transformationen $Z_1 \ldots Z_5$ entweder in der Form

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ Z_4 = \alpha X_4 + \beta X_5 + \gamma X_6,\ Z_5 = \alpha' X_4 + \beta' X_5 + \gamma' X_6$$

oder in der Form

$$Z_1 = \varkappa X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3,\ Z_2 = \varkappa' X_1 + \lambda' X_2 + \mu' X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6$$

voraussetzen. Im ersten Falle mufs auch die durch die Operation $(Z_4 Z_5)$ erhaltene Transformation der Gruppe angehören, und da hierin nur X_4, X_5, X_6 vorkommen, mufs sie linear aus Z_4 und Z_5 zusammengesetzt sein. Man kann also geradezu $(Z_4 Z_5) = \omega Z_5$ setzen. Dann müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\alpha' \omega + \beta' \gamma - \beta \gamma' = 0$$
$$-\alpha' \gamma + \beta' \omega + \alpha \gamma' = 0$$
$$\alpha' \beta - \alpha \beta' + \gamma' \omega = 0,$$

oder es mufs sein:

$$\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

was unmöglich ist.

Im zweiten Falle mufs die durch Kombination von Z_1 mit X_6 erhaltene Transformation $\varkappa X_2 - \lambda X_1$, sowie die Transformation $\varkappa X_1$, welche man durch Kombinierung der letzten mit X_5 erhält, in der Gruppe enthalten sein. Verfährt man ebenso mit Z_2, so ergiebt sich, dafs in der Untergruppe die Transformation X_1 enthalten ist, wofern nicht die Koeffizienten $\varkappa$ und $\varkappa'$ beide verschwinden. Dann dürfen aber auch die Transformationen $X_2 = (X_1 X_6)$ und $X_3 = -(X_1 X_5)$ nicht fehlen.

Der am Schlusse des § angegebene Weg, von der Projektivität zur Metrik überzugehen, dürfte im 43. B. der Annalen (Zur projektiven Geometrie § 2) seine Veröffentlichung finden.

[27]) III § 2. S. 172. G. Cantor, Borchardts' Journal B. 84. Netto, daselbst B. 86. Peano, math. Annalen B. 36. Hilbert, Annalen B. 38.

[28]) III § 3. S. 173. Weierstrafs' Brief an P. du Bois-Reymond (Borchardts Journal. B. 79, S. 29). W., Abhandl. zur Funktionenlehre (Berlin 1886). Wiener, Borchardts Journ. B. 90. Cellerier, Bulletin des sciences math. 1890.

[29]) III § 4. S. 176. Neben mehreren Arbeiten von Zöllner vergl. Helmholtz, pop.-wissensch. Vorträge (B. III), V. Schlegel, naturwissensch. Wochenschrift 1888.

[30]) III § 5. S. 176. Die Arbeit ist in der zweiten Auflage (1878) der »Ausdehnungslehre von 1844« wiederabgedruckt. Für ein eingehenderes Studium mufs auf die Ausdehnungslehre von 1844 und von 1862, sowie auf Arbeiten des Hrn Schlegel verwiesen werden.

[31]) III § 6. S. 181. Das zweite Beispiel ist der Einleitung zu der Preisschrift des Hrn Poincaré (Acta math. B. 23) entnommen. Welche Vorteile die Analysis aus der Fiktion eines mehrdimensionalen Raumes ziehen kann, zeigt Hr. Lie in seinem Werke über Transformations-Gruppen; leider dürfte sich aus dieser Theorie kein Beispiel entnehmen lassen, das unmittelbar verständlich wäre.

[32]) III § 7. S. 182. Die Zahl der Arbeiten, die sich mit der verallgemeinerten projektiven Geometrie befassen, ist zu grofs, als dafs sie hiei angeführt werden könnten. Für den im Text gegebenen Überblick dürfte das kaum nötig sein; denn die mitgeteilten Sätze sind bei ihrer Einfachheit wohl gelegentlich in Abhandlungen erwähnt, aber schwerlich eigens behandelt.

[33]) III § 8. S. 192. Einen einfachen und klaren Überblick über die ersten Sätze des mehrdimensionalen euklidischen Raumes giebt Hr. Hoppe im 79. B. seines Archivs. Die am Schlusse des § mitgeteilte Theorie der elliptischen Koordinaten ist eines der ältesten Beispiele für die Übertragung eines geometrischen Problems auf die Analysis und schon von Jacobi in seinen Vorlesungen über Mechanik (1842/43) mitgeteilt. Die zahlreichen weiteren Arbeiten über den mehrdimensionalen euklidischen Raum wenden sich fast ausschliefslich schwierigeren Problemen zu und brauchen deshalb nicht angeführt zu werden.

Es könnte auffallen, dafs die Entwicklung der einfachsten Beziehungen so viel Raum beansprucht hat. Dieser Umstand hängt mit der Art der Behandlung zusammen. Ich erachte es für notwendig, die Berechtigung einer jeden Definition allseitig zu beweisen, während man sich meistens damit begnügt, die für $n = 3$ geltenden Ausdrücke auf jedes beliebige n zu übertragen. Wenn durch dies Verfahren bei der Erweiterung der euklidischen Geometrie meines Wissens bisher keine Fehler entstanden sind, so kann es doch nicht als streng richtig anerkannt werden.

Betreffs S. 197 und 200 vergl. v. Lilienthal, math. Annalen B. 42 S. 496.

[34]) III § 9. S. 205. Für den Inhalt und die Litteratur darf ich wohl auf meine »nicht-euklidischen Raumformen« (Leipzig 1885) verweisen. Da mir jedoch damals die Arbeiten des Hrn d'Ovidio unbekannt geblieben waren. möchte ich sie hier soweit mitteilen, als sie auf die nicht-euklidische Geometrie Bezug haben. Es sind: Le funzioni metriche fondamentali di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante, memorie dell' accademia dei lincei 1877.

Studii sulla geometria proiettiva, Annali di mat. VI.

J complessi e le congruenze lineari in Geometria proiettiva, Annali VII.

Nota sui complessi nella metrica proiettiva, Rend. dell' Istituto Lombardo, 1881, XIV.

Sopra alcuni luoghi ed inviluppi in geom. proi., Rend. dell' accademia delle Scienze; fasc. VII, 1875.

Le proiezioni ortogonali ..., Acc. di Torino XI, 1876.

Hieran schliefsen sich weitere Arbeiten, namentlich über lineare Komplexe in den Atti dell' acc. dei Lincei 1876.

Meine eigenen Untersuchungen sind übrigens in der Anlage und in den Ergebnissen von denen des Hrn. d'Ovidio wesentlich verschieden.

[35]) III § 10. S. 214. Riemann, Über die Hypothesen ... Göttinger Abh. 1867. Werke, S. 254.

Riemann, Commentatio mathematica ... Werke S. 370. Christoffel, Borch. Journal B. 70. Lipschitz, Borchardts Journ. B. 71. 72. 74. Dedekind in Riemanns Werken S. 384. Schur, math. Annalen B. 27. Die weitere Litteratur kommt für den Inhalt des § nicht in Betracht.

[36]) III § 13. S. 255. Es dürfte kaum möglich sein, die Litteratur über mehrdimensionale Polyeder vollständig zu citieren. Hoffentlich bietet die folgende Aufzählung keine wesentliche Lücke.

Hoppe, zahlreiche Arbeiten in seinem Archiv.

Scheffler, die polydimensionalen Gröfsen, Braunschweig 1880.

Rudel, Elemente und Grundgebilde 1877. Vom Körper höherer Dimension, 1883. Über eine Gattung von Körpern höherer Dimension, 1887.

Schlegel, homogen zusammengesetzte Raumgebilde, Halle 1883, zahlreiche spätere Aufsätze, sowie Projektions-Modelle (Darmstadt bei Brill). Durège, Wiener Berichte B. 83. Puchta, Wiener Ber. B. 89 und 90. Biermann, Wiener Ber. B. 90 und 95. E. Hess, Marburger Ber. 1885, sowie math. Annalen B. 28. Schubert, Hamburger Mitt. Nr. 4.

[37]) III § 15. S. 266. Hr. Beez hatte früher den Satz aufgestellt, im n-dimensionalen Raume könne für $n > 3$ kein $(n-1)$-dimensionales Gebilde so deformiert werden, dafs alle darin liegenden Linien ihre Länge beibehalten. Wäre das richtig, so würde zwischen den Forderungen der Geometrie und denen der Analysis ein Widerspruch bestehen. Nun zeigte ich in meinen »nicht-euklidischen Raumformen«, dafs man für $n > 3$ geometrisch zunächst nur beweisen könne, diejenigen $(n-1)$-dimensionalen Gebilde könnten in der angegebenen Weise deformiert werden, welche eine Schar von $(n-2)$-dimensionalen Ebenen enthalten; dasselbe Resultat liefert aber auch die Analysis. Darauf antwortet Hr. Beez (Programm des Gymnasiums und Realgymnasiums zu Plauen i. V. 1888), diese Ausnahme sei ihm und Hrn Lipschitz schon früher bekannt gewesen; sie ändere aber an der Sache nichts, da es geometrisch evident sei, dafs jedes $(n-1)$-dimensionale Gebilde in einem n-dimensionalen Raume unter Beibehaltung aller Gröfsenbeziehungen deformiert werden könne. Leider bleibt er den Nachweis für seine Behauptung schuldig. Hier von geometrischer Evidenz zu sprechen, mufs um so gröfseren Bedenken unterliegen, da man selbst bei den Flächen des dreidimensionalen Raumes ganz auf die Analysis angewiesen ist und es nicht gelingen will,

rein geometrische Beweise zu finden. So hat man bisher geometrisch noch nicht einmal bewiesen, dafs jede Fläche unter Beibehaltung der Gröfsenbeziehungen deformiert werden kann; noch weniger ist es gelungen, geometrisch die Bedingungen anzugeben, unter denen zwei Flächen auf einander abgewickelt werden können.

[38]) III § 15. S. 270. Während eine Zeit lang selbst angesehene Naturforscher lebhaft für die spiritistischen Versuche eintraten, ist jetzt die Begeisterung für dieselben bedeutend abgekühlt. Jedenfalls wird aber auch der eifrigste Anhänger gestehen müssen, dafs die Grundlagen und der ganze Verlauf der Versuche nicht klar zu Tage liegen, und das genügt für mich, um ihnen jede Beweiskraft abzusprechen.

Beispiele für die Auflösbarkeit von Knoten in einem vierdimensionalen Raume findet man in Hoppes Archiv B. 64, 1879.

[39]) IV § 6. S. 314. Die erste Anregung zu den hier betrachteten Raumformen gab Clifford 1873 in einem ungedruckten Vortrage: On a surface of zero curvature and finite extent, sowie durch eine beiläufige Bemerkung in der Arbeit: Preliminary sketch of biquaternions. Hr. Klein machte eingehende Mitteilungen über Cliffords Anschauungen mit genauem Litteratur-Nachweis und begründete die Theorie tiefer in seiner Arbeit: Zur nicht-euklidischen Geometrie, Annalen B. 37. Daran schlofs sich eine Arbeit von mir im 39. B. der Annalen, in der diese Raumformen in derjenigen Weise begründet sind, welche hier in weiterer Ausführung wieder mitgeteilt ist. Man findet dort auch einige weitere Beispiele, welche ich hier nicht wieder aufgenommen habe. Die am Schlusse von § 6 erwähnten Raumformen waren bisher nicht beachtet worden.

[40]) IV. § 7. S. 332. Hierauf weist Hr. Klein l. c. hin. Man vergl. die Arbeit des Hrn Poincaré in B. 1 S. 71 ff. der Acta math., an die sich zahlreiche weitere Arbeiten angeschlossen haben. Aus den dort charakterisierten (diskontinuierlichen) Gruppen hat man diejenigen auszuwählen, in denen keine parabolische und keine elliptische Transformation vorkommt.

Einführung

in die

Grundlagen der Geometrie.

Von

Dr. Wilhelm Killing,

Professor der Mathematik an der Akademie zu Münster i. W.

Zweiter Band.

Mit 8 Figuren im Text.

Paderborn.

Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.

1898.

Zweigniederlassungen in **Münster, Osnabrück** und **Mainz.**

Vorwort.

Nachdem der erste Band meiner »Einführung in die Grundlagen der Geometrie« im Herbst 1893 erschienen ist, wird es mir erst jetzt möglich, den zweiten Band folgen zu lassen und dadurch das Werk zum Abschlufs zu bringen. Ich kann aber versichern, dafs ich in der Zwischenzeit, soweit es eine anstrengende Lehrthätigkeit gestattete, nach Kräften bemüht gewesen bin, zur Klarstellung der einschlagenden Fragen beizutragen. Dennoch darf der Leser keineswegs erwarten, überall abschliefsende Untersuchungen zu finden. In dieser Hinsicht besteht zwischen den beiden Bänden ein wesentlicher Unterschied. Im ersten Bande kam es darauf an, die Berechtigung der nicht-euklidischen Raumformen (im engern Sinne) zu beweisen, über die verschiedenen Möglichkeiten einen Überblick zu gewinnen und die hiernach für drei Dimensionen erhaltenen Resultate auf eine beliebig hohe Zahl von Dimensionen zu übertragen; der Erledigung dieser Probleme stehen principielle Schwierigkeiten nicht mehr entgegen. Ganz anders steht es mit den Fragen, die im vorliegenden Bande erörtert werden. Nur die Projektivität ist sowohl in ihrem selbständigen Aufbau als auch in ihrer Beziehung zur Metrik als abgeschlossen zu betrachten. Im übrigen konnte es aber nur meine Aufgabe sein, einen Überblick über die bisherigen Untersuchungen zu geben, um den Leser in den Stand zu setzen, zwischen sicheren und zweifelhaften Resultaten zu unterscheiden und den Punkt zu erkennen, an dem weitere Forschungen anzusetzen haben, wenn sie einen endgültigen Erfolg in Aussicht stellen sollen.

Von welchen Grundlagen man in der Geometrie ausgehen will, wird in etwa stets Sache besonderer Vorliebe sein; nur mufs man verlangen, dafs nicht willkürlich Wissenszweige von einander getrennt werden, die ihrer Natur nach eng zusammengehören.

Mag manchem in meinen »Grundsätzen der Geometrie« die Rücksichtnahme auf die Erfahrung weniger gefallen, mag man es tadeln, dafs von ihnen aus der Aufbau nicht systematisch durchgeführt ist, jedenfalls wird man anerkennen müssen, dafs sie auf ein einheitliches Gebiet führen; in der That tritt die nahe Verwandtschaft aller einzelnen Zweige, die wir im weiteren Sinne als Raumformen bezeichnen, von mehr als einer Seite zu Tage. Unter ihnen sind aber drei von hervorragender Wichtigkeit: die parabolische, die hyperbolische und die elliptische Geometrie, von denen jede wieder auf eine grofse Reihe einzelner Raumformen führt. Diese drei Grundformen treten in unseren Untersuchungen stets gleichberechtigt auf, mag man (im ersten Abschnitt) von Euklids System oder (im zweiten und sechsten Abschnitt) von den projektiven Eigenschaften ausgehen. Ja, wenn wir im achten Abschnitte die eigentlichen Raumformen den allgemeinen gegenüber charakterisieren wollen, so gelangen wir immer wieder zu diesen drei Formen, ohne eine unter ihnen bevorzugen zu können. Wer es versuchen wollte, allgemeine Eigenschaften aufzustellen, die ihn durch blofse Rechnung etwa nur auf die euklidische Geometrie führen könnten, würde sich sicherlich vergebens bemühen. So schliefst das Ende meines Buches wieder an den Anfang an; die Gleichberechtigung der genannten drei Formen tritt uns auf den verschiedensten Wegen mit unabweislicher Notwendigkeit entgegen.

Möge das Werk auf dem vielleicht undankbaren, aber zweifellos wichtigen Gebiete, dem es gewidmet ist, zur Verbreitung der bereits gesicherten Kenntnisse beitragen und zu weiteren Forschungen anregen!

Münster, Weihnachten 1897.

Wilhelm Killing.

Inhalts-Verzeichnis.

Die angehängten Ziffern beziehen sich auf den Litteratur-Nachweis.

Fünfter Abschnitt. **Kongruenz und Messung.**

Sechster Abschnitt. **Abschlufs der projektiven Geometrie.**

Siebenter Abschnitt. **Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.**

Achter Abschnitt. **Anwendung der Transformations-Gruppen.**

Fünfter Abschnitt.

Kongruenz und Messung.

§ 1.

Die Gröſsensätze.

Nach der Heibergschen Ausgabe sind von denjenigen Sätzen, welche in den meisten Bearbeitungen von Euklids Elementen als Grundsätze (*κοιναὶ ἔννοιαι*) zusammengestellt werden, nur fünf als echt anzusehen, nämlich die folgenden:

1. Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind einander gleich.

2. Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Summen gleich.

3. Nimmt man von Gleichem Gleiches hinweg, so bleiben gleiche Reste.

4. Dinge, die mit einander zur Deckung gebracht werden können, sind einander gleich.

5. Das Ganze ist gröſser als sein Teil.

Die Gröſsensätze werden von Euklid sehr häufig angewandt; man hat aber zu unterscheiden, ob die Anwendung zum Wesen des Beweises gehört oder überflüssiges Beiwerk ist. In den Sätzen über die Flächengleichheit sind die Gröſsensätze für Euklid von wesentlicher Bedeutung. So hat man für den Hauptsatz dieser Theorie, nämlich für den Satz, daſs Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe gleichen Inhalt haben, von einer Figur kongruente Bestandteile abzutrennen und dann den dritten Grundsatz anzuwenden. Zuweilen beruhen auch geometrische Beweise vollständig auf Gesetzen der Algebra. Ich erinnere an den bekannten Beweis des Satzes, daſs der Peripheriewinkel im Kreise die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Centriwinkels ist; hier ist das Wesen des Beweises in der algebraischen Formel: $\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$, zu suchen. Aber Euklid benutzt die Gröfsensätze zuweilen auch, wenn ihre Anwendung durchaus überflüssig ist. Betrachten wir z. B. seinen Beweis für den Satz, dafs im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Basis gleich sind; wenn im Dreieck ABC die Seiten AB und AC gleich sind, so verlängert er diese Seiten um gleiche Strecken BD und CE und beweist zuerst die Kongruenz der Dreiecke ABE und ACD, dann die Kongruenz der Dreiecke BCD und CBE. Zwar liefert jetzt die Subtraktion gleicher Winkel das gewünschte Resultat; aber schon bei der ersten Kongruenz gelangen diejenigen Winkel zur Deckung, deren Gleichheit bewiesen werden soll.

In vielen Fällen endlich verdunkelt die Benutzung der Gröfsensätze geradezu das Wesen der Beweise. Es würde zu weitläufig sein, alle hierher gehörigen Sätze anzuführen; ich verweise nur auf die Propositionen 13, 14, 15 des ersten Buches, worin u. a. gezeigt wird, dafs die Summe zweier Nebenwinkel zwei Rechte beträgt. Abgesehen davon, dafs die Art der Beweisführung den Anfänger geradezu abstofsen mufs, tritt das Wesen der Beweise hinter überflüssigem Beiwerk ganz zurück.

§ 2.

Die Bewegung in der Geometrie der Alten.

1. Neben den eigentlichen Gröfsensätzen gebraucht Euklid das Princip der Deckung. Hierüber spricht er sich nicht näher aus; auch das stets gebrauchte Wort ἐφαρμόζειν, welches dem lateinischen *applicare* der Bedeutung nach wohl am nächsten steht, vermag an sich keine Klarheit zu gewähren. Wir müssen uns daher diejenigen Stellen näher ansehen, an denen Euklid die Deckung benutzt. Schon der vierte Grundsatz: »Dinge, die einander decken, sind einander gleich«, macht von der Deckung Gebrauch, und da die Deckung nur durch Bewegung herbeigeführt werden kann, hat man schon aus dieser Stelle schliefsen wollen, Euklid habe mit vollem Bewufstsein die Bewegung in der Geometrie benutzt. Wer diese Folgerung schon aus dem angeführten Axiom zieht, wird in seiner Auffassung ganz gewifs durch den

Beweis des ersten Kongruenzsatzes für das Dreieck, der vierten Proposition im ersten Buche, bestärkt. Bei der Wichtigkeit dieser Stelle glaube ich sie im Urtext mitteilen zu sollen; sie lautet:

Ἐφαρμοζομένου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ κ. λ.

Euklid giebt also dem Dreieck *ΑΒΓ* eine andere Lage und setzt voraus, dafs sich dadurch die Gröfse der Seiten, der Winkel und des Inhalts nicht ändert. Er gebraucht das Wort *τιθέναι,* will also eine wirkliche Bewegung vornehmen und bestimmt die neue Lage, welche durch die Bewegung erhalten wird, dadurch, dafs 1. der Punkt *Α* auf *Δ,* 2. die Gerade *ΑΒ* in die Richtung *ΔΕ* und 3. das Dreieck *ΑΒΓ* auf *ΔΕΖ* fällt.

Auch an einigen anderen Stellen wird die Bewegung benutzt; so wird im Beweise der 24. Proposition des dritten Buches ein Kreis und zuweilen in den letzten Büchern ein Körper bewegt.

2. Hiermit dürften alle diejenigen Fälle erschöpft sein, an denen Euklid die Bewegung ausdrücklich erwähnt; es könnte also scheinen, als ob sie in Euklids System nur von untergeordneter Bedeutung wäre. Ganz anders aber wird unser Urteil lauten, wenn wir die Rolle beachten, die die angeführten Sätze in den Elementen spielen. Aus dem ersten Kongruenzsatze werden die übrigen Bedingungen für die Kongruenz von Dreiecken hergeleitet. Diese Sätze dienen alsdann dazu, die Lehre von den parallelen Linien zu begründen; auch im weiteren Verlaufe des Werkes, bei der Lehre vom Parallelogramm, vom Kreise, selbst in der Stereometrie, wird die Kongruenz der Dreiecke aufserordentlich oft angewandt. Wollte man aus Euklids Elementen alle Sätze weglassen, deren Beweise entweder direkt oder durch Zwischenstufen den ersten Kongruenzsatz benutzen, so würde kaum etwas übrig bleiben. Nun stützt sich dieser Satz in seinem Beweise auf die Bewegung; also ist bei Euklid die Bewegung eine wesentliche Grundlage der Geometrie. Denn die Bedeutung eines Begriffes hängt nicht davon ab, ob derselbe in vielen Fällen mit klaren Worten angeführt wird, sondern ob er, wenn auch nur indirekt, einen wesentlichen Bestandteil der Beweise ausmacht.

3. Auch die übrigen griechischen Mathematiker haben keines-

wegs die Bewegung grundsätzlich aus der Geometrie verbannt. Es genüge, einige Beispiele anzuführen, auf die mich Herr M. Cantor, der doch die Geschichte der Mathematik wie kein zweiter beherrscht, freundlichst aufmerksam gemacht hat. (Ich verweise in den eingeklammerten Citaten auf die erste Auflage seiner Geschichte der Mathematik.) Plato bringt (I. 195) die Verdoppelung des Winkels durch Verschiebung eines gewissen Apparates hervor; Archimedes (I. 257) findet in ähnlicher Weise eine Sehne, deren Verlängerung bis zu einer festen Geraden eine gewisse Länge besitzt; das Mesolabium (I. 285) ist ein Werkzeug der Bewegungsgeometrie, ebenso das sich drehende Lineal Herons (I. 317). Mit Recht hebt ferner Herr Cantor mir gegenüber brieflich hervor, dafs der Kreis, der in den Konstruktionen eine so hervorragende Rolle spielt, nur durch Bewegung hervorgebracht wird; er erinnert an die Konchoide des Nikomedes, an die Spiralen und manche andere Kurve.

4. Dabei mufs es sehr auffallend erscheinen, dafs die griechischen Philosophen, soweit ich die Sache übersehen kann, darin übereinstimmen, die Bewegung aus der Geometrie vollständig zu verbannen. Überall wird versichert, die Geometrie befasse sich mit den Körpern, soweit sie als unbeweglich vorausgesetzt würden. Nur an solchen Stellen, wo man die Astronomie zu den mathematischen Wissenschaften rechnet, wird auch die Bewegung als Gegenstand der Mathematik erwähnt; jedesmal aber, wenn man die Astronomie ausschliefst und die Arithmetik und die Geometrie als die einzigen Zweige der Mathematik bezeichnet, heifst es, die Bewegung gehöre der Mathematik nicht an. In diesem Sinne sagt Aristoteles, die Mathematik habe es mit dem Unbeweglichen und Ruhenden zu thun, zwar nicht mit dem an und für sich Unbeweglichen, sondern nur insofern es an der Materie hafte. Derselbe Philosoph erblickt gerade hierin einen besondern Vorzug unserer Wissenschaft: nach der Metaphysik, die bei ihm am höchsten steht, weist er der Arithmetik den ersten Platz an, da sie sich mit der blofsen Zahl befasse; dann kommt für ihn die Geometrie als diejenige Wissenschaft, welche nur den Ort, die mefsbare Gröfse, berücksichtige und die Bewegung ausschliefse; den folgenden Platz weist er der Astronomie zu, in der die natürlichen Bewegungen untersucht werden.

5. Hiernach besteht ein Gegensatz zwischen der Auffassung der alten Philosophen und der Art, in der die griechischen Mathematiker die Geometrie behandelt haben. Wir wissen aber nicht, ob dieser Gegensatz zum Ausdruck gebracht oder auch nur in voller Klarheit erkannt ist. Die Mathematiker aus der Blütezeit der griechischen Geometrie gehen auf die vorliegende Frage in den uns hinterlassenen Schriften nirgends ein. Proklus bespricht allerdings die Beziehung der Bewegung zur Geometrie; aber einerseits kann er als vollwichtiger Zeuge nicht angesehen werden, andererseits beruft er sich nur auf Philosophen und nicht auf Mathematiker. Indessen sollte man denken, dafs er die abweichende Meinung eines Mathematikers mitgeteilt hätte, wofern sie ihm bekannt geworden wäre. Auch würden die alten Philosophen ohne Zweifel in ihren Schriften auf den Widerspruch eingegangen sein, der von den Mathematikern gegen ihre Ansicht erhoben wäre. Hiernach scheint es, als habe sich kein Mathematiker des Altertums gegen die angeführte Meinung der Philosophen ausgesprochen. Das wird man um so eher annehmen dürfen, da Ptolemäus in der Einleitung zum Almagest der von Aristoteles gegebenen Begrenzung der einzelnen Wissenschaften vollständig zustimmt; wenn er dabei der Mathematik auch die Lehre von den Bewegungen zuweist, so mufs man bedenken, dafs er die Astronomie als einen Zweig der Mathematik betrachtet.

6. Diese Sachlage legt es nahe, folgende Hypothese aufzustellen: Die Alten hatten die Ansicht, dafs die Bewegung der Geometrie fremd sei. Da es aber unmöglich war, die Bewegung beim Beweise der geometrischen Sätze zu entbehren, so suchte man ihre Anwendung möglichst einzuschränken. Vielleicht hoffte man, sie allmählich ganz verbannen zu können und dann das Ideal zu erreichen, das man der Geometrie gesteckt hatte.

Ob diese Annahme begründet ist, wage ich nicht zu entscheiden. Gewifs liefse sich manches zu ihrer Verteidigung sagen; aber man wird ebenso berechtigt sein, dem folgenden Gedanken beizustimmen: Bei der Art, in der die Alten die Geometrie behandelten, ist die Bewegung nicht zu entbehren; da sie aber im übrigen ein sehr tiefes Verständnis für die Grundlagen der Mathematik bekunden, ist kaum anzunehmen, dafs sie betreffs der Bewegung durch eine vorgefafste Meinung sollten im Irrtum gehalten sein.

7. Hier möge es gestattet sein, eine kleine pädagogische Bemerkung beizufügen. Indem die Alten, statt die Bewegung direkt zu benutzen, in ihren Beweisen, wo es irgend möglich war, auf den ersten Kongruenzsatz für Dreiecke zurückgingen, wurden die Beweise aufserordentlich kompliziert, und ihr Kernpunkt trat vielfach ganz hinter blofsem Beiwerk zurück. Dadurch dafs die neuere Zeit mit dieser Methode gebrochen hat, ist bereits eine wesentliche Vereinfachung der Beweise erreicht. Was die systematische Benutzung der Bewegung zu leisten vermag, ersieht man aus Petersens »Methoden und Theorieen zur Auflösung geometrischer Konstruktions-Aufgaben«. Indessen vererben leider manche Beweise ihre hergebrachte Form auch dann, wenn eine Vereinfachung recht gut möglich ist. Der Lehrer wird gut thun, nach dieser Richtung hin eine sorgfältige Prüfung vorzunehmen. Ich scheue mich nicht, meine Überzeugung dahin auszusprechen, dafs es kaum ein Mittel giebt, dem Schüler das Verständnis der geometrischen Sätze und ihrer Beweise zu erleichtern, als wenn man ihn zwingt, die zu Grunde liegenden Bewegungen wirklich auszuführen.

§ 3.

Riemanns Aufbau der Geometrie.

Hier scheint mir die geeignete Stelle zu sein, um die schon früher (III. § 10. B. 1. S. 210—217) erwähnte Arbeit Riemanns: »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«, einer kurzen Prüfung zu unterziehen. Zu dem Ende müssen wir kurz den Inhalt dieser Arbeit angeben.

Im ersten Abschnitt setzt Riemann einen Begriff voraus, der den beiden Bedingungen genügt: a) er läfst verschiedene Bestimmungsweisen zu, b) unter diesen Bestimmungsweisen findet von einer zur andern ein stetiger Übergang statt. Einen solchen Begriff bezeichnet Riemann als eine stetige Mannigfaltigkeit und nennt jede einzelne Bestimmungsweise einen Punkt. Geht man in irgend einer derartigen Mannigfaltigkeit von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer andern über, so wird die Gesamtheit der durchlaufenen Bestimmungsweisen als eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bezeichnet. Diese Mannigfaltigkeit läfst Riemann wieder in eine andere, völlig verschiedene übergehen und gelangt zur zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, sowie durch Fortsetzung zur n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit für irgend eine Zahl n. Ist aber umgekehrt das Gebiet einer Veränderlichkeit gegeben, so nimmt er darin eine stetige Funktion des Ortes an und zwar eine solche, die nicht für einen Teil der Mannigfaltigkeit konstant ist. Jedes System von Punkten, für welche die Funktion einen konstanten Wert hat, bildet dann eine stetige Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit n-fach ausgedehnt ist. So glaubt Riemann das wesentliche Kennzeichen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit darin zu sehen, dafs sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Gröfsenbestimmungen zurückführen läfst.

Der zweite Abschnitt handelt von den Mafsverhältnissen, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist. Riemann selbst bezeichnet diese Untersuchung als sehr unvollständig, hofft aber, dafs sie für seinen nächsten Zweck ausreichend sei. Er geht von der Voraussetzung aus, dafs jede Linie durch jede mefsbar sei. Irgend ein Punkt der Linie habe die Koordinaten $x_1 \ldots x_n$, ein anderer die Koordinaten $x_1 + h_1 \ldots x_n + h_n$. Nachdem der erste Punkt beliebig angenommen ist, kann man den zweiten so wählen, dafs die Gröfsen $h_1 \ldots h_n$ (die Änderungen der Koordinaten) sämtlich beliebig klein werden, etwa absolut genommen unter einer Gröfse δ bleiben. Zwischen den Punkten $(x_1 \ldots x_n)$ und $(x_1 + h_1 \ldots x_n + h_n)$ nehme man einen weiteren Punkt $(x_1 + h_1' \ldots x_n + h_n')$ an; dann sollen auch die Gröfsen $h_1' \ldots h_n'$ absolut genommen kleiner sein als δ. Jetzt betrachtet Riemann nur solche Linien, welche einer gewissen Beschränkung unterliegen. Nachdem die Gröfse δ passend gewählt ist, soll es bei jeder Wahl einer beliebig kleinen Gröfse ε möglich sein, jedes Verhältnis $h_1 : h_2 : \ldots : h_n$ dem entsprechenden Verhältnis $h_1' : h_2' : \ldots h_n'$ bis auf einen Unterschied ε gleich zu machen, wofern nur der dritte Punkt zwischen den beiden ersten gewählt wird. Diese Beschränkung kommt auf folgendes hinaus: man kann die Linie in Elemente zerlegen; wenn dann $x_1 \ldots x_n$ die Koordinaten für den Anfangspunkt eines Elementes, $x_1 + dx_1 \ldots x_n + dx_n$ die Koordinaten für irgend einen anderen Punkt in demselben Elemente sind, so sollen die Verhältnisse $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n$ für alle Punkte des Elementes (bis auf unendlich kleine Gröfsen) konstant sein. Für alle Linien, die dieser Voraussetzung genügen, wird das Linienelement ds eine Funktion von $x_1 \ldots x_n$ und dx_1, $dx_2 \ldots dx_n$ sein.

Die gemachte Voraussetzung ermöglicht es, die Gröfsen $dx_1 \ldots dx_n$ nach demselben Verhältnis wachsen zu lassen; demnach fordert Riemann, dafs auch die Länge ds des Elementes nach demselben Verhältnis wachse. Dieser Forderung genügt man durch die Festsetzung, dafs die m^{te} Potenz des Linienelementes eine stets positive Form m^{ten} Grades in den Gröfsen dx_1, $dx_2 \ldots dx_n$ ist, wo m eine gerade Zahl sein soll. Die einfachste Voraussetzung würde demnach sein:

$$ds^2 = \Sigma a_{ab}\, dx_a\, dx_b,$$

wo die Koefficienten a_{ab} entweder Konstante oder Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind und wo die rechte Seite nur verschwindet, wenn $dx_1 \ldots dx_n$ sämtlich gleich null sind, während sie für jede andere Wahl von $dx_1 \ldots dx_n$ positiv ist, welche Werte von $x_1 \ldots x_n$ man auch in die Koefficienten a_{ab} einsetzt.

Riemann behandelt nur diese einfachste Annahme und gelangt zu einem gewissen analytischen Ausdruck, den er als das Krümmungsmafs bezeichnet. Hierauf brauchen wir aber hier nicht näher einzugehen; es genüge, auf unsere früheren Darlegungen zu verweisen (B. 1. S. 213 ff.).

Die hier skizzierte Schrift ist für die Mathematik von weittragender Bedeutung geworden, indem die darin angedeuteten Gedanken zu ganz hervorragenden Arbeiten angeregt haben. Indessen liegt der Schwerpunkt dieser Arbeiten auf dem Gebiete der Analysis. Dabei darf die Wichtigkeit des Riemannschen Vortrages für die Geometrie nicht unterschätzt werden, da er erstens überaus anregend gewirkt hat und zweitens die Möglichkeit eines unbegrenzten, aber zugleich endlichen Raumes gezeigt und die Grundeigenschaften jener Raumform angegeben hat, die wir im vorliegenden Werke nach Riemann benennen. Diese hohen Vorzüge der Arbeit dürfen uns nicht hindern, die darin entwickelte Grundlage der Geometrie einer sorgfältigen Kritik zu unterziehen.

1. Auf das Schlufsergebnis des ersten Abschnittes, wonach das Wesen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit darin erblickt wird, dafs sich die Ortsbestimmung auf n Gröfsenbeziehungen zurückführen läfst, will ich nicht ausführlich eingehen. Ich verweise

auf den zweiten Paragraphen des dritten Abschnitts (B. 1. S. 168), wonach dies Resultat nicht richtig ist, wofern man nicht voraussetzt, dafs die Zuwendung stetig sein soll. Eingehender handelt von der Darstellung der Punkte einer Mannigfaltigkeit durch Wertsysteme (Koordinaten) eine soeben erschienene Arbeit des Herrn Burkhardt.[1])

2. Die Voraussetzung, welche Riemann an die Spitze des zweiten Abschnitts stellt, dafs jede Linie durch jede andere mefsbar sei, ist unzulässig. Denn, wie man aus den Darlegungen des dritten Paragraphen im dritten Abschnitt (B. 1. S. 172) folgern kann, giebt es in jeder zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit Linien, deren Länge nicht gemessen werden kann. Indessen hat dieser Umstand, der Riemann selbst wenigstens später bekannt gewesen ist, für die Arbeit selbst keinen Belang, da nur Linien betrachtet werden, die in ihrer analytischen Darstellung gewissen Bedingungen genügen und deshalb mefsbar sind. Dagegen scheint mir ein anderer Punkt von gröfserer Bedeutung zu sein. Riemann selbst sagt im ersten Abschnitt seiner Abhandlung (I, 1): »Das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Gröfsen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Gröfse als Mafsstab für die andere fortzutragen.« Hiernach ist das Messen keine Grundoperation der Geometrie, indem es eine andere Operation, nämlich die Bewegung, benutzt. Da Riemann diese Überzeugung hatte, durfte er auch nicht vom Ausdruck für das Linienelement ausgehen, sondern mufste allgemeine Gesetze für die Bewegung aufstellen, diese in eine analytische Form bringen und darauf seine weitere Entwicklung stützen. Bei dem Wege, den Riemann einschlägt, sind wir nicht sicher, dafs die an sich willkürlich angenommene Form des Linienelementes mit den Gesetzen der Bewegung vereinbar ist.

3. Riemann will den ganzen Inhalt der Geometrie aus dem Begriffe des Linienelementes herleiten, und es ist nachträglich vielfach als sein besonderes Verdienst gerühmt worden, dafs er die gesamte Geometrie auf ein einziges Princip zurückgeführt habe. Das ist aber etwas durchaus Unmögliches: denn die Analysis kann über einen ihr gegebenen Begriff nicht hinausgehen, die Geometrie bedarf aber noch weiterer Begriffe, welche von dem der Länge einer Linie wesentlich verschieden sind. Sie

mufs zwei-, drei- und mehrdimensionale Gebilde messen; sie mufs die Lage von Gebilden, die nicht zusammenfallen, mit einander vergleichen und bedarf zu dem Zweck u. a. des Winkels. Der Analysis fehlt jedes Mittel, diese Begriffe zu entwickeln oder in innern Zusammenhang mit dem Begriff der Länge zu bringen. Dennoch spricht Riemann selbst vom Flächeninhalt eines Dreiecks, andere geben z. B. Formeln für die Winkel; es ist klar, dafs das nur willkürliche Festsetzungen, nicht aber Folgerungen aus den gegebenen Prämissen sein können.

In der That sind es vorzüglich zwei Methoden, nach denen diese Formeln gewonnen werden. Gewöhnlich läfst man sich durch blofse Analogie leiten. Ein n-dimensionales Gebilde wird in einem $(n+m)$-fach ausgedehnten euklidischen Raume vorausgesetzt. Zur Untersuchung dieses Raumes benutzt man $n+m$ Gröfsen $y_1, y_2 \ldots y_{n-m}$, welche das Analogon der rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten bilden. In diesen Koordinaten kann man die Ausdrücke für Winkel, Inhalt u. s. w. dadurch erhalten, dafs man die bekannten für den dreidimensionalen euklidischen Raum geltenden Formeln auf $n+m$ Variabele überträgt. Um hieraus die entsprechenden Formeln für das n-dimensionale Gebilde zu erhalten, drückt man die Gröfsen $y_1 \ldots y_{n+m}$ durch n Variabele $x_1 \ldots x_n$ aus, setzt also $y_1 \ldots y_{n-m}$ als Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ voraus. Dann wird man auch die Formeln für den Inhalt, für Winkel u. dgl. durch die Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ darstellen, wenigstens so lange man sich auf unendlich kleine Gebiete beschränkt. Alle diese Ausdrücke treten in auffallend enge Beziehung zu der Form, welche das Linienelement für die n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ annimmt. Man hält sich deshalb für berechtigt, diese analytischen Formeln mit denjenigen geometrischen Begriffen, denen sie bei dem gewählten Ausgange entsprechen, ganz allgemein zu verbinden. Indessen kann auf diese Weise die Grundlage der Geometrie nicht gewonnen werden, da man einerseits bereits die Geometrie benutzt, um gewisse Formeln zu erhalten, andererseits die Ausdrücke durch blofse Analogie, nicht aber durch naturgemäfse Entwicklung erlangt werden. (Selbstverständlich hat es kein Bedenken, diese Methode zu befolgen, wenn es sich um rein analytische Entwicklungen handelt und man die Sprache der Geometrie nur als kurze Bezeichnung für gewisse Formeln benutzt.)

Natürlicher ist eine andere Methode, die auch wir im dritten Abschnitt eingeschlagen haben. Gewisse Differential-Ausdrücke stehen mit dem Ausdruck für das Linienelement in organischem Zusammenhange; ihnen allen mufs also auch eine von der analytischen Darstellung unabhängige Bedeutung zukommen, sie dürfen geradezu mit geometrischen Gebilden identifiziert werden. Bei gewissen Formen, die wir für das Linienelement aufstellen können, giebt es Scharen von Transformationen, bei denen jener Ausdruck ungeändert bleibt; alle diese Transformationen lassen aber noch weitere Ausdrücke ungeändert; demnach hält man sich für berechtigt, auch mit den neuen Formeln einen geometrischen Begriff zu verbinden. Aber auch hier geht man über das Linienelement hinaus; man betrachtet die Transformationen als das Ursprüngliche und stellt den Ausdruck für das Linienelement mit anderen Ausdrücken auf dieselbe Stufe. Dadurch verläfst man den von Riemann vorgezeichneten Weg und nähert sich derjenigen Methode, bei welcher die Bewegung zur Grundlage gemacht wird.

4. Wäre der Grundgedanke der Riemannschen Arbeit richtig, wäre der Ausdruck für das Linienelement wirklich das Charakteristische für jede Raumform, so müfste die bei der Darstellung dieses Ausdrucks benutzte Zahl m das erste und wichtigste Unterscheidungsmerkmal der Raumformen abgeben, wobei vorausgesetzt wird, dafs die m^{te} Potenz des Linienelementes als homogene Form m^{ten} Grades in den Differentialen der Variabeln sei. Indem man versucht, für irgend ein gerades m die weiteren Entwicklungen durchzuführen, mufs man unterscheiden zwischen denjenigen Folgerungen, welche aus dem aufgestellten Begriff in voller Strenge hergeleitet werden, und denjenigen Sätzen, welche erst nach Einführung neuer Begriffe gewonnen werden können. Wird das Quadrat des Linienelementes durch einen Differential-Ausdruck zweiten Grades dargestellt, so giebt die Geometrie selbst Anleitung, wie man die neuen Begriffe einführen müsse; dagegen wird bei höheren Potenzen die Willkür gröfser sein. Demnach scheint es geboten, sich auf diejenigen Sätze zu beschränken, zu deren Herleitung man nur das Linienelement zu benutzen hat.

Dann finden wir aber die auffallende Thatsache, dafs trotz der Verschiedenheit der Zahl m die geometrischen Sätze ungeändert bleiben.

Wir zeigen dies unter der Annahme, dafs die Koefficienten im Differential-Ausdruck konstant sind, und wählen speciell die Form:

$$(1)\quad ds^m = \Sigma dx_\varkappa^m \qquad \text{für ein gerades } m.$$

Die Gleichung der kürzesten Linie, welche zwischen zwei Punkten x' und x möglich ist, ergiebt sich aus der Bedingung, dafs die Variation des Integrals

$$\int_{x'}^{x} \sqrt[m]{\Sigma dx_\varkappa^m}$$

zwischen den festen Grenzen x' und x für beliebige Variationen $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ verschwindet. Die bekannten Principien der Variations-Rechnung liefern hierfür die Bedingungen:

$$d\frac{dx_1^{m-1}}{ds^{m-1}} = 0 \quad . \; . \; . \quad d\frac{dx_n^{m-1}}{ds^{m-1}} = 0,$$

und hieraus folgt:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = c_1 : c_2 : \ldots : c_n,$$

wo die Gröfsen $c_1, c_2 \ldots c_n$ für die ganze Linie konstante Werte haben. Demnach können wir setzen:

$$(2)\quad x_\varkappa = x_\varkappa' + (x_\varkappa - x_\varkappa')t \qquad \text{für } \varkappa = 1, \ldots n,$$

wo t unbeschränkt veränderlich ist.

Machen wir jetzt die Koordinaten abhängig von zwei veränderlichen Gröfsen u und v, indem wir setzen:

$$(3)\quad x_\varkappa = a_\varkappa + b_\varkappa u + c_\varkappa v,$$

wo die Gröfsen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ konstante Werte haben sollen, so hat die durch diese Gleichungen dargestellte Fläche die Eigenschaft, dafs jede kürzeste Linie, welche zwei ihrer Punkte mit einander verbindet, ganz der Fläche angehört. Ist nämlich für zwei Wertepaare (u', v') und (u'', v''):

$$x_\varkappa' = a_\varkappa + b_\varkappa u' + c_\varkappa v', \quad x_\varkappa'' = a_\varkappa + b_\varkappa u'' + c_\varkappa v'',$$

so wird die kürzeste Linie, welche durch diese beiden Punkte geht, durch die Gleichungen dargestellt:

$$x_\varkappa = a_\varkappa + b_\varkappa u' + c_\varkappa v' + [b_\varkappa (u'' - u') + c_\varkappa (v'' - v')]t;$$

diese Werte genügen den Gleichungen (3), wenn man setzt:

$$u = u' + (u'' - u')t, \quad v = v' + (v'' - v')t.$$

Allgemein setze man

(4) $x_\varkappa = a_\varkappa + a_\varkappa' u_1 + a_\varkappa'' u_2 + \ldots + a_\varkappa^{(r)} u_r$,

wo die Gröfsen u als variabel, die Gröfsen $a_\varkappa$, $a_\varkappa'$ . . . als konstant vorausgesetzt werden, und nehme an, dafs die (r+1)-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1' & a_2' & \ldots & a_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(r)} & a_2^{(r)} & \ldots & a_n^{(r)} \end{Vmatrix}$$

nicht sämtlich verschwinden. Dann gehört jede kürzeste Linie, welche zwei Punkte mit dem Gebilde (4) gemeinschaftlich hat, ganz demselben an. Ebenso fällt jedes zweidimensionale Gebilde, das den Gleichungen (3) genügt, ganz in das r-fach ausgedehnte Gebilde hinein, wofern es drei Punkte mit ihm gemeinschaftlich hat, die nicht derselben kürzesten Linie angehören. Entsprechende Sätze gelten für mehrdimensionale Gebilde, wie man auf dem in III § 8 (B. 1. S. 205 ff.) angegebenen Wege zeigt.

Indem wir jetzt die kürzesten Linien als Gerade, das durch die Gleichungen (4) dargestellte Gebilde als eine r-dimensionale Ebene bezeichnen, können wir folgende Sätze aufstellen:

»Durch zwei Punkte geht immer eine einzige Gerade hindurch.«

»Durch drei Punkte, die nicht in derselben geraden Linie liegen, läfst sich eine einzige zweidimensionale Ebene legen, und durch r + 1 Punkte, die nicht derselben Ebene von r — 1 Dimensionen angehören, ist eine einzige r-dimensionale Ebene bestimmt.«

»Eine Gerade fällt ganz in eine Ebene, sobald sie zwei Punkte mit ihr gemeinschaftlich hat.«

»Hat eine p-dimensionale Ebene für $p < r$ mit einer Ebene von r Dimensionen p + 1 Punkte gemeinschaftlich, die keiner (p — 1)-fach ausgedehnten Ebene angehören, so fällt sie ganz in die r-dimensionale Ebene hinein.«

»Durch eine r-dimensionale Ebene und einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt läfst sich eine, und zwar eine einzige Ebene von r + 1 Dimensionen legen.«

Ebenso folgen jetzt diejenigen Sätze, welche in III § 8 (B. 1. S. 191) über den Schnitt von Ebenen angegeben sind.

Auch der Begriff des Parallelismus kann wieder eingeführt werden, indem man sagt:

»Zwei Ebenen von p und von r Dimensionen heifsen für $p \leq r$ parallel, wenn sie in einer $(r+1)$-dimensionalen Ebene liegen und keinen Punkt gemeinschaftlich haben.«

Überhaupt können wir den gesamten Inhalt des achten Paragraphen im dritten Abschnitt, soweit er über Ebenen und Gerade handelt (B. 1. S. 191—205), auch von unsern Voraussetzungen aus herleiten. So denke man eine $(n-1)$-dimensionale Ebene durch die Gleichung bestimmt:

$$\Sigma a_\varkappa x_\varkappa = b,$$

und gehe dann zu den Ebenen von weniger Dimensionen über.

Ersetzen wir die Konstanten $c_\varkappa$ durch die aus (2) sich ergebenden Werte, so folgt für die Länge l der geraden Strecke zwischen den Punkten x' und x'' die Gleichung:

$$(5) \quad l = \sqrt[m]{\Sigma(x_\varkappa'' - x_\varkappa')^m}.$$

Man suche jetzt die kürzeste Linie, welche von einem festen Punkte x' nach den Punkten einer Ebene

$$(6) \quad \Sigma a_\varkappa x_\varkappa = b$$

gezogen werden kann. Dann soll der Wert von $\Sigma(x_\varkappa - x_\varkappa')^m$ ein Minimum werden für gegebene Werte von $x_\varkappa'$ und unter der Bedingung, dafs die $x_\varkappa$ der Gleichung (6) genügen. Berechnet man die Gröfse M aus der Gleichung:

$$(7) \quad b = \Sigma a_\varkappa x_\varkappa' + \sqrt[m-1]{\frac{M a_\varkappa^{m+1}}{m}},$$

so ergeben sich die entsprechenden Werte von $x_1 \ldots x_n$ aus den Gleichungen:

$$(8) \quad x_\varkappa = x_\varkappa' + \sqrt[m-1]{\frac{M a_\varkappa}{m}}.$$

Zugleich ist M eine eindeutige Funktion des Abstandes, d. h. der Länge der zwischen dem Punkte x' und der Ebene möglichen kürzesten Linie. Lassen wir demnach den Abstand (oder was dasselbe ist, die Gröfse M) und die Ebene (6) gegeben sein, so ergiebt sich aus (7) eine Gleichung für x', welche eine zur Ebene (6) parallele Ebene darstellt. Somit folgt:

»Alle Punkte, welche von einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene einen festen Abstand haben, liegen auf einer zu ihr parallelen Ebene.«

Speciell sind die Koordinaten $x_1 \dots x_n$ die kürzesten Abstände des zu bestimmenden Punktes von den n Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \dots x_n = 0$.

In den angegebenen Sätzen tritt die vollste Übereinstimmung mit der euklidischen Geometrie zu Tage. Wir möchten gern den Grund für diese Thatsache näher erörtern; indessen glauben wir darauf an dieser Stelle nicht eingehen zu dürfen.

§ 4.

Die Messung der krummen Linien.

1. Wenn in Euklids System die Benutzung der Gröfsensätze beträchtlich eingeschränkt, die Bewegung aber nicht entbehrt werden kann, so lohnt es sich ohne Zweifel, zu untersuchen, ob nicht vielleicht umgekehrt die Gröfsensätze aus der Kongruenz hergeleitet werden können. Dafs dieser Gedanke nicht neu ist, ergiebt sich aus einer Stelle bei Proklus, welcher erzählt, Apollonius habe geglaubt, einen Beweis für die Axiome Euklids liefern zu können, und zwar auf folgender Grundlage: »Da α dem β gleich ist, nimmt es denselben Raum ein wie dieses; und da β dem γ gleich ist, nimmt es ebenfalls denselben Raum ein; also nimmt α mit γ denselben Raum ein, ist ihm also gleich.« Dieser Gedanke genügt in der That, die Gröfsensätze für gerade Strecken, für Bogen desselben Kreises und für Winkel auf die Kongruenz zurückzuführen. Um aber ganz allgemein zum Ziel zu gelangen, bedarf es weiterer Erwägungen, die wir im folgenden darlegen wollen.[2])

Dabei müssen wir jedoch beachten, dafs eine Vergleichung zweier Gröfsen nach gleich, gröfser und kleiner nur in besonderen Fällen, z. B. bei geraden Strecken, unmittelbar möglich ist, dafs man aber im allgemeinen eine derartige Vergleichung erst anstellen kann, nachdem man sie durch dieselbe Einheit gemessen hat. Bei der Messung beliebiger Gebilde macht man aber (fast regelmäfsig) von der Messung der geraden Strecke Gebrauch. Demnach wollen wir, dem Charakter unserer Entwicklung entsprechend, die Methode, nach der gerade Strecken gemessen werden, als bekannt voraussetzen, ohne sie einer nähern Prüfung zu unterziehen, und nur die Messung der übrigen Raumgebilde besprechen.

2. Um eine krumme Linie zu messen, welche durch die beiden Punkte A und B begrenzt wird, schieben wir eine endliche Anzahl von Punkten (1, 1), (1, 2) . . . (1, m) auf dem Bogen AB zwischen die Punkte A und B derartig ein, dafs der von den Punkten A = (1, 0) und (1, ι) begrenzte Bogen alle Punkte (1, α) enthält, für welche die Marke α kleiner ist als ι, während auf dem von den Punkten (1, ι) und B = (1, m + 1) begrenzten Bogen diejenigen Punkte (1, β) liegen, für welche die Marke $\beta > \iota$ ist. Nun bezeichne ich die Länge der von den Punkten (1, $\varkappa$) und (1, $\varkappa + 1$) begrenzten Strecke durch $l_{1\varkappa}$ und setze die Summe $l_{10} + l_{11} + \ldots + l_{1m} = L_1$. Indem ich jetzt zwischen irgend zwei Punkte (1, ι) und (1, $\iota + 1$) weitere Punkte in endlicher Anzahl einschiebe und die neuen Punkte zu den früheren hinzunehme, bringe ich sie alle in die Reihe (2, 1), (2, 2) . . . (2, n) nach derselben Regel, welche für die Zahlen (1, α) aufgestellt wurde; auch bezeichne ich den Punkt A jetzt durch (2, 0), den Punkt B durch (2, n + 1). Dann möge die Länge der Strecke [(2, $\varkappa$), (2, $\varkappa + 1$)] gleich $l_{2\varkappa}$ und die Summe $l_{20} + l_{21} + l_{22} + \ldots + l_{2n} = L_2$ gesetzt werden. Durch Einschiebung weiterer Punkte gelange ich der Reihe nach zu weiteren Längen $L_3 \ldots L_\mu \ldots$ Wofern der zu messende Bogen keine geradlinigen Teile enthält, ist stets $L_{\mu+1} > L_\mu$. Demnach nähern sich die Gröfsen L_μ mit wachsendem μ entweder einem bestimmten Grenzwerte, oder sie werden unendlich grofs. Nähert sich die Gröfse L_μ bei jeder Wahl der Teilpunkte demselben endlichen Grenzwerte L, wofern nur die einzelnen Strecken $l_{\mu\varkappa}$ unbegrenzt abnehmen, so stellt die Gröfse L die Länge des Bogens dar.

3. Um zunächst den einfachsten Fall zu erledigen, nehmen wir an, die Kurve habe in allen zwischen A und B gelegenen Punkten Tangenten und Schmiegungsebenen. Dann können die Punkte (μ, $\varkappa$) so gewählt werden, dafs folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

a) die in irgend zwei Punkten (μ, $\varkappa$) und (μ, $\varkappa + 1$) an die Kurve gelegten Tangenten bilden einen Winkel mit einander, der einen fest gewählten, beliebig kleinen Winkel δ niemals übersteigt;

b) die Schmiegungsebenen der Kurve in den Punkten $(\mu, \varkappa)$ und $(\mu, \varkappa + 1)$ schneiden sich unter einem Winkel, der niemals gröfser ist als ein festgesetzter Winkel ε;

c) die in irgend einem Punkte des Bogens (μ, ι), $(\mu, \iota + 1)$ an die Kurve gelegte Tangente ist gegen jede der beiden Tangenten in (μ, ι) und $(\mu, \iota + 1)$ unter einem Winkel geneigt, der kleiner ist als δ;

d) auch die Schmiegungsebene, die in irgend einem solchen Punkte an die Kurve gelegt ist, bildet mit den Schmiegungsebenen in den Punkten (μ, ι) und $(\mu, \iota + 1)$ Winkel, die kleiner sind als ε.

Nun falle der Punkt (μ, ι) mit dem Punkte $(\mu + 1, \varkappa)$ und der Punkt $(\mu, \iota + 1)$ mit dem Punkte $(\mu + 1, \varkappa + \varrho + 1)$ zusammen. Dann projiziere man die Strecken $l_{\mu+1, \varkappa+\alpha}$ (für $\alpha = 0, 1 \ldots \varrho$) auf die Strecke $l_{\mu\iota}$. Die Summe dieser Projektionen bildet die Strecke $l_{\mu\iota}$ selbst, während der Cosinus des Winkels, den die projizierte Strecke mit der Strecke $l_{\mu\iota}$ bildet, stets gröfser ist als das Produkt $\cos\delta\cos\varepsilon$. Da wir aber für δ und ε feste Gröfsen gewählt haben, die von der Marke ι unabhängig sind, so folgt die Relation:

$$L_\mu < L_{\mu+1} < \frac{L_\mu}{\cos\delta\cos\varepsilon}.$$

Hiernach erhält man für L_μ einen endlichen Grenzwert, da die Winkel δ und ε beliebig klein gewählt werden können.

Dieser Grenzwert wird aber stets erhalten, von welchen Punkten man auch ausgehen mag. So sei man bei der Wahl irgend anderer Punkte zu einer Gröfse $L_{\nu'}$ gelangt, und die Punkte seien in diesem Falle so gewählt, dafs nach Festsetzung zweier beliebig klein gewählter Winkel δ_1 und ε_1 die Hinzunahme weiterer Punkte zu einer Gröfse $L_{\nu'+1}$ führt, für welche die Relation besteht:

$$L_{\nu'} < L_{\nu'+1} < \frac{L_{\nu'}}{\cos\delta_1 \cos\varepsilon_1}.$$

Dann kann man, um $L_{\mu+1}$ zu gewinnen, zu den für L_μ benutzten Punkten alle diejenigen Punkte hinzunehmen, bei deren Anwendung sich die Gröfse $L_{\nu'}$ ergiebt, und ebenso kann man für $L_{\nu'+1}$ zu den für $L_{\nu'}$ benutzten Punkten alle diejenigen Punkte hinzufügen, vermittelst deren man die Länge L_μ erhalten hat. Dadurch wird

$L_{\mu+1} = L_{\nu'+1}$. Man kann daher dieselbe Gröfse $L_{\mu+1}$ sowohl beliebig nahe an L_μ wie an L_ν' bringen; somit haben beide denselben Grenzwert.

4. Hier mögen zwei kurze Bemerkungen gestattet sein. Erstens: man übersieht sofort, dafs die vorstehende Entwicklung ungeändert bleibt, wenn die Kurve eine endliche Zahl von Punkten besitzt, in denen sich keine (festen) Tangenten und Schmiegungsebenen an sie legen lassen; man hat diese Punkte auszuschliefsen, indem man sie etwa zu Mittelpunkten von Kugeln wählt, nur für die aufserhalb der Kugeln gelegenen Segmente die Längen bestimmt und dann die Radien unbegrenzt abnehmen läfst.

Zweitens wolle man beachten, dafs die Benutzung des Cosinus und damit die Beschränkung auf eine parabolische Raumform nicht notwendig ist. Man kann geradezu die bei der Kreismessung gebräuchliche Methode ihres speciellen Charakters entkleiden und kommt dadurch zu Folgerungen, die für alle Raumformen gültig sind. Indessen glaubte ich die obige Darstellung bevorzugen zu sollen, weil sie sich durch Kürze auszeichnet und weil man unmittelbar übersieht, welche Änderungen angebracht werden müssen, wenn sie auf nicht-euklidische Raumformen übertragen werden soll (vgl. Stolz, math. Ann. B. 18. S. 271 Fufsnote).

5. Man kann, wie Scheeffer bewiesen hat, den Begriff der Länge auch in vielen Fällen aufstellen, wo die vorangehende Untersuchung nicht zum Ziele führen würde. Namentlich gilt unabhängig von der Annahme über die Existenz von Tangenten folgender Lehrsatz:

Wenn alle Gröfsen L_ν bei irgend einer Wahl der Teilpunkte unterhalb einer festen endlichen Gröfse G bleiben, so bleiben sie auch bei jeder andern Wahl der Teilpunkte unterhalb dieser Gröfse, und L_ν hat für $\nu = \infty$ den von der Wahl der Teilpunkte unabhängigen Grenzwert L.

Irgend einer Wahl der Teilpunkte möge die Reihe $L_1, L_2 \ldots$ entsprechen. Da alle in dieser Reihe vorkommenden Gröfsen kleiner sind als G, und $L_{\mu+1} \geqq L_\mu$ ist, so haben die Gröfsen L_μ eine obere Grenze, der sie sich unbegrenzt nähern, ohne sie zu überschreiten; diese Gröfse sei L.

Einer andern Wahl der Teilpunkte möge die Reihe $L_1', L_2' \ldots$

entsprechen; dann ist zu beweisen, dafs auch diese Reihe einen bestimmten Grenzwert L' besitzt, und dafs $L = L'$ ist.

Die Zahl der Teilpunkte, die zur Erlangung der Gröfse L_ν' benutzt werden, sei p, und sie mögen der Reihe nach mit 1, 2 ... p' bezeichnet werden. Jedem dieser Punkte $\varkappa' = 1 \ldots p'$ ordne man einen Bogen $s_\varkappa$ zu, der nur den Punkt $\varkappa'$, aber keinen andern Punkt aus dieser Reihe enthält, und der noch folgender Bedingung genügt: Ist die Länge δ beliebig gewählt und sind A, B, C irgend drei Punkte dieses Bogens, so soll stets $AB + BC - AC < \frac{\delta}{p}$ sein. Bei der ersten Reihe $L_1, L_2 \ldots$ mufs einmal, etwa für L_μ, eine Auswahl der Punkte erreicht werden, bei der in jedem so erhaltenen Bogen $s_\varkappa$ mindestens zwei Punkte (μ, α) und $(\mu, \alpha + 1)$ liegen. Indem wir jetzt in der Summe L_μ die Strecke, welche zwei Punkte des Bogens $s_\varkappa$ verbindet, durch die Summe der beiden Strecken ersetzt, welche den Punkt $\varkappa'$ mit jenen beiden Punkten verbindet, erhält L_μ einen Zuwachs, der kleiner ist als δ. Demnach ist

$$L_\mu + \delta > L_\nu'.$$

Umsomehr ist $L + \delta > L_\nu'$, oder da δ beliebig klein angenommen werden kann: $L \geqq L_\nu'$. Demnach nähern sich auch die Gröfsen L_ν' mit wachsendem ν einem bestimmten Grenzwert L', und dieser Wert kann nicht gröfser sein als L. Nun können wir aber in der vorhergehenden Betrachtung die gestrichenen und die ungestrichenen Buchstaben mit einander vertauschen; es ergiebt sich demnach, dafs auch L nicht gröfser ist als L' oder dafs ist: $L = L'$.

6. Scheeffer zeigt auch, dafs sich in vielen Fällen die Länge bestimmen läfst, wo die Anwendung der gewöhnlichen Regeln nicht ausreicht. Indem wir uns auf eine euklidische Ebene beschränken, legen wir ein rechtwinkliges Koordinaten-System in x und y zu Grunde und nehmen an, y sei zwischen den Grenzen x_0 und x_1 eine eindeutige Funktion f (x) von x. Für den vorliegenden Zweck ist es gut, den Begriff der derivierten Funktion zu erweitern. Nachdem eine positive Gröfse h beliebig angenommen ist, mufs die Gesamtheit der Gröfsen

$$\frac{f(x + h') - f(x)}{h'},$$

wo h' alle zwischen 0 und h liegenden Werte erhält, entweder zwischen zwei endlichen Grenzen verbleiben, oder eine oder beide Grenzen können unendlich grofs werden. Wir können die obere Grenze mit D_h, die untere mit D_h' bezeichnen, indem wir zulassen, dafs eine dieser Gröfsen oder beide unendlich grofs werden. Da nun für $h_1 < h$ stets $D_{h1} \leqq D_h$, und $D_{h'1} > D_h'$ ist, so sind die Grenzwerte

$$\lim_{h=0} D_h = D^+, \text{ und } \lim_{h=0} D_h' = D_+$$

vollständig bestimmt. Scheeffer nennt sie die »vordere obere« und die »vordere untere Derivierte« von f (x). Ebenso definiert er, indem er der Gröfse h einen negativen Wert beilegt, die »hintere obere Derivierte« D^- und die »hintere untere Derivierte« D_- von f (x).

Mit Anwendung dieser Bezeichnungen läfst sich folgender Lehrsatz beweisen:

Wenn die beiden vorderen (oder hinteren) Derivierten der stetigen Funktion f (x) für alle inneren Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ zwischen G und G' liegen, wo mindestens eine dieser beiden Zahlen endlich ist, so hat die Kurve $y = f(x)$ von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L.

Beim Beweise benutzen wir den bekannten Satz:

Wofern die beiden vorderen Derivierten der stetigen Funktion f (x) an keiner innern Stelle des Intervalls $x_0 x_1$ gröfser sind als die endliche Zahl H, so ist auch der Quotient

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

niemals gröfser als H, welche Punkte des Intervalls man auch für x und x' annehmen mag.

Demnach ist für $G > G'$:

$$G' < \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} < G.$$

Um zu erkennen, ob die Kurve eine Länge hat, müssen wir der obigen Vorschrift entsprechend die Gröfse bilden:

$$L_\nu = \sum_r \sqrt{(x_{\nu, r+1} - x_{\nu, r})^2 + (y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r})^2}.$$

Wir wählen H als eine endliche positive Gröfse, welche ganz willkürlich ist, wofern G und G' dasselbe Vorzeichen haben, aber in dem Falle, dafs G und G′ verschiedenes Vorzeichen besitzen, nicht kleiner sein darf als der kleinere absolute Wert von G und G′. Jetzt trennen wir die Glieder der Summe L_ν in zwei Gruppen, indem wir diejenigen zur ersten Gruppe rechnen, für welche der absolute Betrag des Quotienten

$$\frac{y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r}}{x_{\nu, r+1} - x_{\nu, r}}$$

höchstens gleich H ist, während wir die übrigen in die zweite Gruppe verweisen. Für die erste Gruppe wenden wir einen, für die zweite zwei obere Striche an. Dann ist:

$$L_\nu' < (x_1 - x_0)\sqrt{1 + H^2}, \text{ und}$$

$$- H\,(x_1 - x_0) \leq \Sigma'\,(y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r}) \leq H\,(x_1 - x_0).$$

Die Glieder

$$\Sigma''\,(y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r})$$

haben sämtlich dasselbe Zeichen; die Summe ist also gleich $y_1 - y_0 - \Sigma'\,(y_{\nu, r+1} - y_{\nu, r})$ und ihr absoluter Betrag jedenfalls nicht gröfser als

$$(y_1 - y_0) + H\,(x_1 - x_0).$$

Demnach wird

$$L_\nu'' \leq \{(y_1 - y_0) + H.\,(x_1 - x_0)\}\sqrt{\frac{1}{H^2} + 1}, \text{ und}$$

$$L_\nu = L_\nu' + L_\nu'' \leq \sqrt{1 + H^2}\left[2\,(x_1 - x_0) + \frac{(y_1 - y_0)}{H}\right].$$

Da hiernach L_ν stets endlich bleibt, so existiert ein fester Grenzwert L, die Länge der Kurve.

Um ein Beispiel zu bilden, denken wir die Gesamtheit der positiven rationalen Zahlen w_ϱ in folgender Weise angeordnet: Wenn ist $w_\varrho = \frac{p_\varrho}{q_\varrho}$, wo p_ϱ und q_ϱ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, so lasse man diejenigen Zahlen w_ϱ vorangehen, für welche $p_\varrho + q_\varrho = s_\varrho$ einen kleineren Wert hat; bei gleichem Werte von s_ϱ ordne man die Zahlen w_ϱ nach ihrer Gröfse (vergl. den Anfang des § 10). Nun setze man

$$c_\varrho = \frac{1}{(p_\varrho + q_\varrho)^3}$$

und bilde die Summe

$$f(x) = \Sigma c_\varrho\,(x - w_\varrho)^{\frac{1}{3}},$$

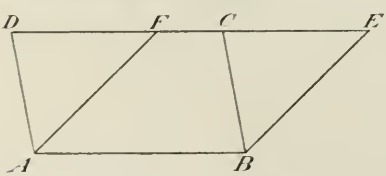
welche stets konvergiert. Diese Funktion ist stetig und nimmt mit wachsendem x beständig zu. Da demnach die vordere Derivierte stets zwischen 0 und $+\infty$ liegt, so hat die durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellte Kurve zwischen je zwei Punkten eine bestimmte Länge.

§ 5.

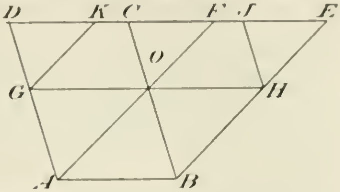
Die Messung der Flächen.

1. Wie sehr das allgemeine Streben dahin geht, die Gleichheit auf die Kongruenz zurückzuführen, geht aus den zahlreichen Konstruktionen hervor, die den Zweck haben, flächengleiche Polygone in kongruente Teile zu zerlegen.[3]) Zuerst dürfte W. Bolyai ein derartiges Verfahren angegeben haben, das leider wenig beachtet worden ist. Gerwien führte eine entsprechende Zerlegung bei beliebigen flächengleichen Dreiecken aus; sein Verfahren wurde von Göpel vereinfacht. Viel weiter geht Hr. Réthy, dessen Konstruktionen besonders einfach sind.

Wofern man nur die Möglichkeit einer derartigen Zerlegung übersehen will, ist es am einfachsten, vom Parallelogramm auszugehen, da man jedes Polygon in eine endliche Zahl von Dreiecken zerlegen und jedes Dreieck in ein Parallelogramm umwandeln kann. Um letzteres auszuführen, ziehe man durch den Eckpunkt A des Dreiecks ABC die Parallele zu BC und durch die Mitte M von AB die Parallele zu AC; trifft die zweite Parallele die Seite BC in D und die erste in E, so enthält das Parallelogramm AEDC nur Teile, die mit Teilen des Dreiecks kongruent sind. Nun lassen sich flächengleiche Parallelogramme stets auf einander beziehen durch Vermittlung von Parallelogrammen, die gleiche Grundlinie und Höhe haben. Demnach genügt es, den Satz zu erweisen: Wenn Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe haben, so lassen sie sich in kongruente Teile zerlegen, die in den beiden Figuren nur auf verschiedene Weisen angeordnet sind.



Zum Beweise lege man die beiden Parallelogramme mit der Grundlinie auf einander. Bei der in Figur 1 angegebenen Lage besteht ABCD aus ABCF und AFD, ABEF aus ABCF und BEC, also je aus kongruenten Stücken. Dagegen ziehe man in Fig. 2, wo sich AF und BC zwischen B und C in O treffen, durch O die Parallele zu AB, dann durch G die GK || OF, durch H die HI || OC. Dadurch zerlegt sich ABCD in ABO, AOG, GOCK und GKD; ebenso zerfällt ABEF in ABO, BOH, OHIC und IHE, so dafs die einzelnen Teile kongruent sind. Wenn sich GK und HI zwischen H und I schneiden, so wiederholt man die angegebene Zeichnung. Überhaupt trage man BO, so oft es angeht, auf BC ab; dadurch möge man zu den Punkten O_1 . . . O_n kommen, deren Anzahl endlich ist, und mache für jeden die angegebene Konstruktion.



Demnach kann man, wenn zwei beliebige Polygone gegeben sind, durch passende Zerlegung des einen und geeignete Anordnung der einzelnen Teile stets erreichen, dafs das neue Polygon dem andern selbst oder einem seiner Teile kongruent ist oder einen mit dem andern Polygon kongruenten Teil enthält. Hiernach ist die Flächengleichheit auf die Kongruenz zurückgeführt.

Bei einem derartigen Verfahren macht man jedoch eine Voraussetzung, die von den meisten Geometern gar nicht erwähnt wird und auf welche erst in der neuesten Zeit hingewiesen ist.[4]) Wir sprechen sie in folgender Weise aus:

Dadurch, dafs man eine Figur in Teile zerlegt und diese beliebig anordnet, können wir zwar die Gestalt auf mannigfache Weise verändern; dabei ist es aber nicht möglich, eine neue Figur zu bilden, von welcher die gegebene selbst nur ein Teil ist oder welche als Teil von der ersten Figur eingeschlossen ist.

Hr. Stolz drückt dieselbe Voraussetzung bei Beschränkung auf einen besonders wichtigen Fall in folgender Weise aus:

Zerlegt man ein Polygon B durch Gerade in mehrere Teile und läfst auch nur einen von ihnen weg, so kann man mit den übrigen das Polygon B nicht mehr bedecken.

Die Richtigkeit dieser Voraussetzung läfst sich in aller Strenge beweisen. Dazu dient ein Verfahren, welches geeignet ist, die Messung beliebiger ebenen Flächen auszuführen. Ich habe dasselbe bereits früher skizziert und will es im folgenden ausführlich darlegen. Ich beschränke mich aber auf die euklidische Geometrie und mache einige Annahmen, die geeignet sind, die Darlegung zu vereinfachen, ohne das Wesen des Beweises zu verändern. Demnach setzen wir von dem betrachteten ebenen Flächenstück 1. voraus, dafs es nur von einer einzigen geschlossenen Linie (dem Umfang) begrenzt wird, und nehmen 2. an, dafs der Umfang von jeder schneidenden Geraden nur in zwei Punkten getroffen wird.

2. Nun ziehen wir in der Ebene zwei Scharen von parallelen Geraden derartig, dafs zwei auf einander folgende Gerade derselben Schar jedesmal denselben Abstand haben, und dafs diese Abstände für beide Systeme gleich sind; zudem sollen die Linien der einen Schar auf denen der andern senkrecht stehen. Hiernach begrenzen zwei auf einander folgende Gerade der einen Schar in Verbindung mit zwei solchen Linien der andern Schar jedesmal ein Quadrat. Von diesen Quadraten betrachte ich an erster Stelle diejenigen, welche ganz innerhalb der gegebenen Fläche liegen, und nenne ihre Zahl a; dann zähle ich diejenigen, welche wenigstens einen Teil mit der Fläche gemeinschaftlich haben, und bezeichne ihre Anzahl mit b. Unter den letzten b Quadraten sind die a zuerst betrachteten jedenfalls enthalten; daher kann b nicht kleiner sein als a. In dem speciellen Falle, dafs der Umfang ganz aus Strecken besteht, die je einer der beiden Geradenscharen angehören, liegt jedes Quadrat entweder ganz innerhalb oder ganz aufserhalb der Fläche; alsdann ist $b = a$. Im allgemeinen wird aber der Umfang der Fläche von einzelnen Geraden des einen oder andern oder von Geraden beider Systeme geschnitten; dann giebt es Quadrate, die zum Teil innerhalb und zum Teil aufserhalb der Fläche liegen; alle diese gehören zu den b zweiten, aber nicht zu den a ersten Quadraten; es ist also jetzt $b > a$. Wählt man hierbei den Abstand zweier auf einander folgenden Parallelen gleich der Längeneinheit, so soll festgesetzt werden, dafs die Mafszahl der Fläche zwischen a und b liegt; ist aber dieser Abstand gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit und sind a_ν und b_ν die entsprechenden Zahlen, so soll die Mafszahl zwischen $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ liegen. (Wird im ersten Falle $a = b$, im zweiten $a_\nu = b_\nu$, so soll die Mafszahl gleich a, resp. gleich $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ sein.)

Dafs diese Festsetzungen nicht willkürlich getroffen, sondern in der Sache selbst begründet sind, bedarf keiner nähern Auseinandersetzung.

3. Wir weisen zunächst nach, dafs die angegebene Operation zu einer bestimmten Zahl führt, indem wir zeigen, dafs der Wert $\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2}$ dadurch beliebig klein gemacht werden kann, dafs man ν hinlänglich grofs werden läfst. Zu dem Ende betrachten wir die Anzahl derjenigen Geraden der beiden Systeme, welche den Umfang der Fläche schneiden. Bei der ersten Konstruktion, wo der Abstand gleich der Längeneinheit gewählt wird, mögen m Gerade der ersten und n Gerade der zweiten Schar den Umfang treffen (wo m und n natürlich auch gleich o sein können). Da nach unserer Annahme jede Schnittlinie zwei Punkte mit der begrenzenden Linie gemeinschaftlich hat, jeder Schnittpunkt aber, wofern er nicht mit einem Eckpunkt zusammenfällt, zwei Quadraten angehört und jedes Quadrat, in dessen Umfang ein Schnittpunkt liegt, zu den b einschliefsenden, aber nicht zu den a eingeschlossenen Quadraten zu rechnen ist, so ist die Differenz $b - a$ jedenfalls nicht gröfser als die Zahl der Schnittpunkte $2m + 2n$. Jetzt schiebt man in jeder Schar zwischen irgend zwei auf einander folgende Linien $\nu - 1$ zu ihnen parallele Gerade derartig ein, dafs in dem neuen System der Abstand zwischen je zwei auf einander folgenden Geraden gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist. Wenn jetzt die Zahl der schneidenden Linien in der einen Schar m′ und in der andern n′ beträgt, so gilt genau wie vorher die Relation:

$$b_\nu - a_\nu < 2m' + 2n'.$$

Um die Beziehung zu erkennen, die zwischen m und m′, n und n′ besteht, bezeichne man die m im ersten Falle schneidenden Linien der einen Schar der Reihe nach mit $L_1, L_2 \ldots L_m$, die vor L_1 vorangehende mit L_0 und die L_m folgende mit L_{m+1}. Dann mufs jede zu ihnen parallele Linie, die den Umfang schneidet, zwischen L_0 und L_{m+1} eingeschlossen sein. Von den Parallelen derselben Schar, die im zweiten Falle benutzt werden, liegen aber nur $\nu m + \nu - 1$ zwischen L_0 und L_{m+1}. Dieselbe Betrachtung kann für die zweite Schar angestellt werden. Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$\begin{aligned} m' &\leq \nu m + \nu - 1 \\ n' &\leq \nu n + \nu - 1. \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} < \frac{2m + 2n}{\nu} + \frac{4}{\nu} - \frac{4}{\nu^2}.$$

Da aber $m + n$ eine feste Zahl ist, so kann man ν so grofs wählen, dafs die rechte Seite beliebig klein wird. Somit nähern sich bei der gemachten Konstruktion die Werte $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ demselben Grenzwert F.

4. Um die Zahl F als Mafszahl bezeichnen zu dürfen, müssen wir nachweisen, dafs sie von der Wahl der beiden auf einander senkrecht stehenden Systeme von parallelen Linien unabhängig ist. Bei diesem Nachweis möchten wir der Kürze wegen das Wort Netz in einem Sinne gebrauchen, der von dem gewöhnlichen etwas abweicht. Wir gehen von zwei fest gewählten Geraden aus, die auf einander senkrecht stehen; zu jeder von ihnen ziehen wir auf beiden Seiten parallele Linien so, dafs der Abstand zwischen zwei auf einander folgenden Linien gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist. Die Gesamtheit der hierdurch erhaltenen Systeme von Linien für ein unbegrenzt wachsendes ν nennen wir ein Netz, und sagen kurz, das durch die beiden ersten Geraden bestimmte Netz habe für die Fläche die Mafszahl F geliefert. Wir haben also nachzuweisen, dafs wir stets dieselbe Mafszahl erhalten, welches Netz wir auch zu ihrer Bestimmung benutzen.

5. Dem allgemeinen Beweise schicken wir eine Anzahl von Hilfssätzen voraus:

a) Die Mafszahl F bleibt ungeändert, wenn das Netz unter Beibehaltung der Richtungen der Systeme von Parallelen beliebig verschoben wird.

Diesem Satze können wir auch folgenden Ausspruch geben:

Indem wir von zwei auf einander senkrecht stehenden Geraden M und N ausgehen und zu jeder von ihnen eine Schar von Parallelen ziehen in einem Abstande, der gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist, mögen wir bei unbegrenzter Vergröfserung von ν für die Fläche die Maßzahl F erhalten. Jetzt gehen wir von zwei anderen Linien M' und N' aus, von denen die erste zu M, die zweite zu N parallel ist; wenn wir dann die Maßzahl F' erhalten, so ist $F' = F$.

Für das erste Netz mögen a_ν und b_ν, für das zweite a_ν' und b_ν' die oben angegebene Bedeutung haben. In beiden Fällen werden $\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{b_\nu' - a_\nu'}{\nu^2}$ bei wachsendem ν unbegrenzt abnehmen. Zudem wird $a_\nu = a_\nu'$, $b_\nu = b_\nu$, wenn sowohl der Abstand von M und M' wie der von N und N' ein Vielfaches vom ν^{ten} Teile der Längeneinheit beträgt. Wir können also, so lange es sich um Vergleichung der angegebenen Zahlen handelt, annehmen, der Abstand von M und M', und der von N und N' betrüge weniger als $\frac{1}{\nu}$. Hierbei können einzelne der im ersten Falle den Umfang treffenden Quadrate nach außen oder nach innen zu liegen kommen, und einzelne vorher im Innern oder im Äußern gelegene Quadrate an den Umfang gelangen. Nun liegt F zwischen $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{a_\nu}{\nu^2}$, F' zwischen $\frac{b_\nu'}{\nu^2}$ und $\frac{a_\nu'}{\nu^2}$; der Unterschied beträgt aber nach unserer Entwicklung höchstens

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} + \frac{b_\nu' - a_\nu'}{\nu^2},$$

und diese Zahl kann beliebig klein gemacht werden.

b) Wenn zwei kongruente Flächen durch Parallelverschiebung in einander übergeführt werden können, so liefern sie für dasselbe Netz gleiche Maßzahlen.

Während in a) das Netz verschoben wird, wird hier die Fläche verschoben; das Ergebnis ist natürlich dasselbe.

c) Ist eine Fläche Φ in eine endliche Zahl von Teilen $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ zerlegt, so ist die für irgend ein Netz erhaltene Maßzahl von Φ gleich der Summe der für $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ durch dasselbe Netz erhaltenen Maßzahlen.

Für die Fläche Φ mögen a_ν und b_ν die oben angegebenen Werte bezeichnen; entsprechend mögen, wenn $\varkappa$ irgend eine Zahl aus der Reihe $1 \ldots m$ ist, für die Fläche $\Phi_\varkappa$ die Zahlen $a_{\nu\varkappa}$ und $b_{\nu\varkappa}$ gefunden sein. Da im allgemeinen einzelne der Linien, durch welche die Teile $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ gegen einander abgegrenzt werden, durch das Innere von Quadraten hindurchgehen, die innerhalb Φ liegen, so ist jedenfalls

$$a_\nu > \sum_\varkappa a_{\nu\varkappa},\ b_\nu < \sum_\varkappa b_{\nu\varkappa}, \text{ oder}$$

$$a_\nu = \Sigma\, a_{\nu\varkappa} + p_\nu,\ b_\nu = \Sigma\, b_{\nu\varkappa} - q_\nu,$$

wo p_ν und q_ν positive Zahlen mit Einschlufs der Null sind. Jetzt ist offenbar:

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} = \sum_\varkappa \frac{b_{\nu\varkappa} - a_{\nu\varkappa}}{\nu^2} - \frac{p_\nu + q_\nu}{\nu^2}.$$

In dieser Gleichung hat die linke Seite und jeder der ersten m Summanden auf der rechten Seite den Grenzpunkt Null, folglich auch der letzte Teil, oder da p_ν und q_ν nicht negativ sein können, die Quotienten $\frac{p_\nu}{\nu^2}$ und $\frac{q_\nu}{\nu^2}$ selbst. Stellt also F den Grenzwert von $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und $F_\varkappa$ den von $\frac{a_{\nu\varkappa}}{\nu^2}$ dar, so folgt: $F = \Sigma\, F_\varkappa$.

d) Wenn zwei Parallelogramme dieselbe Grundlinie besitzen und zwischen denselben Parallelen liegen, so kann man stets durch passende Teilung des ersten und geeignete Parallel-Verschiebung der einzelnen Teile erreichen, dafs die Teile in der neuen Lage das zweite Parallelogramm bilden.

Um diesen Satz und einige ähnliche recht einfach aussprechen zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein:

Zwei Polygone mögen parallel-kongruent heifsen, wenn ihre entsprechenden Seiten gleiche Länge, gleiche Richtung und gleichen Abstand besitzen, wenn also das eine durch blofse Parallel-Verschiebung zur Deckung mit dem andern gebracht werden kann.

Hiernach können wir sagen:

Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien, die zwischen denselben Parallelen liegen, können stets in parallel-kongruente Teile zerlegt werden.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Entwicklungen, die wir an die Figuren 1 und 2 geknüpft haben. Läfst man z. B in Fig. 2 ABO an seiner Stelle, verschiebt aber AGKCO in der Richtung AB um eine Länge gleich AB und GDK in derselben Richtung um die Länge 2AB, so erhält man das Parallelogramm ABEF. In ähnlicher Weise kann man stets verfahren.

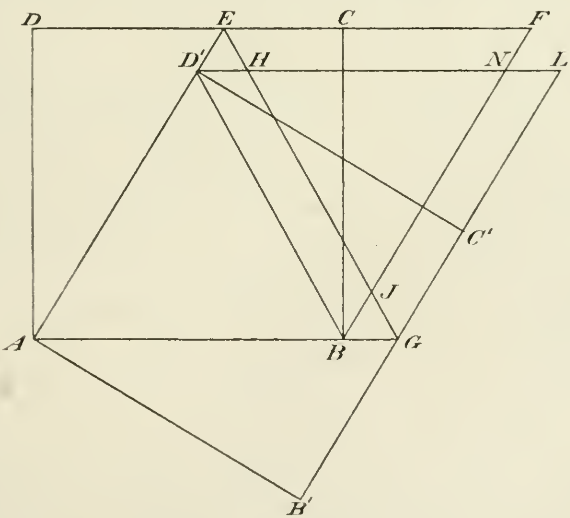
e) Liegen von m Parallelogrammen $P_1 \ldots P_m$ jedesmal zwei auf einander folgende mit gleichen Seiten zwischen denselben Parallelen, so können die Parallelogramme P_1 und P_m in dieselbe Zahl von parallel-kongruenten Teilen zerlegt werden.

Man hat jedesmal für zwei auf einander folgende Flächen die dem vorigen Satze entsprechende Teilung auszuführen und jede solche Zerlegung auch auf die vorhergehenden zu übertragen; dadurch erhält man für P_1 eine Zahl von Teilen, die durch bloſse Verschiebung in eine solche Lage gebracht werden können, daſs sie das Parallelogramm P_m bilden.

f) Zwei kongruente Quadrate, die beliebige Lage zu einander haben, können in parallel-kongruente Teile zerlegt werden; mit anderen Worten:

Wenn zwei Quadrate über gleichen Seiten errichtet sind, so kann man stets durch passende Teilung des ersten und geeignete Parallelverschiebung der einzelnen Teile erreichen, daſs die Teile in der neuen Lage das zweite Quadrat zusammensetzen.

Es genügt, den Satz unter der Annahme zu beweisen, daſs die Quadrate einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben. So seien



(Fig. 3) ABCD und AB'C'D' zwei Quadrate und AB = AB'. Die Geraden AD' und DC mögen einander in E, die Geraden AB und B'C' in G schneiden; die durch D' zu AB gezogene Parallele möge in L mit B'C' und die durch B zu AD' gezogene

Parallele in F mit DC zusammentreffen. Die Schnittpunkte von EG mit BF und mit D'L seien I und H, und in K mögen die Geraden BF und D'L einander schneiden. Da die Dreiecke ADE und AB'G kongruent sind, müssen BD' und GE parallel sein. Von den Parallelogrammen D'EFK, D'EIB, D'BGH und BGLK liegen je zwei auf einander folgende bei gleicher Grundlinie zwischen denselben Parallelen. Die Parallelogramme ABFE und AGHD' können also in parallel-kongruente Stücke zerlegt werden. Dasselbe gilt einerseits für ABCD und ABFE, andererseits für AB'C'D' und AGLD', also auch für die Quadrate ABCD und AB'C'D'.

g) Für ein Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, erhält man stets die Maſszahl eins.

Um die Maſszahl des Quadrats ABCD durch ein Netz zu bestimmen, in welchem die Parallelen der einen Schar mit AB' parallel sind, konstruiere man das kongruente Quadrat AB'C'D'. Da eine bloſse Parallelverschiebung des Netzes keine Änderung der Maſszahl herbeiführt, können wir das Netz zu Grunde legen, das durch die Geraden AB' und AD' bestimmt wird. Dann ist die Maſszahl von AB'C'D' offenbar gleich eins. Zerlegen wir jetzt nach f) die Quadrate ABCD und AB'C'D' so in n Teile $P_1 \ldots P_n$ resp. $Q_1 \ldots Q_n$, daſs jedesmal $P_\varkappa$ zu $Q_\varkappa$ parallel-kongruent ist, so liefern nach c) die Maſszahlen von $Q_1 \ldots Q_n$ die Summe eins. Nun hat nach b) für das gewählte Netz die Fläche $P_\varkappa$ dieselbe Maſszahl wie $Q_\varkappa$, und nach c) das Quadrat ABCD als Maſszahl die Summe der für $P_1 \ldots P_n$ enthaltenen Maſszahlen, woraus die Wahrheit der Behauptung hervorgeht.

h) Für ein Quadrat, dessen Seite gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit ist, erhält man stets als Maſszahl $\frac{1}{\nu^2}$.

Der Beweis dieses Satzes unterscheidet sich nicht von dem des vorangehenden.

6. Jetzt können wir zum Beweise des Satzes übergehen:

Die durch die obige Operation erhaltene Maſszahl einer ebenen Fläche ist von der Wahl des Netzes unabhängig.

In einem Netze habe man den Abstand zwischen je zwei auf einander folgenden Parallelen gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit gemacht und die Zahlen a_ν und b_ν erhalten. Ist jetzt

$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} = \delta$, so kann der Unterschied zwischen $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ und der durch dies Netz erhaltenen Maßzahl jedenfalls nicht größer als δ sein. Für ein zweites Netz nehme man den Abstand gleich dem $(\nu\varrho)^{\text{ten}}$ Teile der Längeneinheit. Von den hierbei erhaltenen Quadraten mögen mindestens c innerhalb eines jeden der vorher erhaltenen Quadrate liegen. Dann kann man nach 5. h) durch Vergrößerung von ϱ erreichen, daß $\frac{c}{(\nu\varrho)^2}$ beliebig nahe an $\frac{1}{\nu^2}$ kommt. Ist ε die größte Differenz, welche der Wert von $\frac{1}{\nu^2} - \frac{c}{(\nu\varrho)^2}$ bei einem der ersten Quadrate erreicht, so beträgt der Unterschied der durch beide Messungen erhaltenen Maßzahlen höchstens $a_\nu . \varepsilon$. Da man aber bei der zweiten Operation ϱ beliebig vergrößern und dadurch ε beliebig klein machen kann, so läßt sich erreichen, daß $a_\nu . \varepsilon$ kleiner wird als die zuerst gefundene Größe δ. Hiernach können sich die vermittelst der beiden Netze erhaltenen Maßzahlen höchstens um die Größe 2δ unterscheiden, und dieser Wert kann dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man ν hinreichend wachsen läßt. Hiernach ist der Beweis in aller Strenge erbracht.

7. Wir haben jetzt zu zeigen, in welcher Weise krumme Flächen gemessen werden können. Dabei wollen wir uns auf Flächen beschränken, die in jedem Punkte eine Tangentialebene besitzen, oder für welche diese Forderung wenigstens im allgemeinen erfüllt ist. Zunächst beschreiben wir in die das Flächenstück begrenzende Linie einen Sehnenzug und bezeichnen die Punkte, in denen zwei Sehnen zusammenstoßen, der Reihe nach mit $A_0, A_1, A_2 \ldots A_\varkappa \ldots$ Zu irgend zwei auf einander folgenden Punkten $A_\varkappa A_{\varkappa-1}$ bestimme ich auf der Fläche einen weiteren Punkt $A_\varkappa'$ so, daß die durch diese drei Punkte gelegte Ebene mit den drei in diesen Punkten an die Fläche gelegten Tangentialebenen Winkel bildet, die kleiner sind als ein fest gewählter Winkel δ. Zudem soll dasjenige Stück der Fläche, welches durch die Ebene $A_\varkappa A_{\varkappa-1} A_\varkappa'$ von der übrigen Fläche abgetrennt wird, die Eigenschaft haben, daß der Winkel zwischen den Tangentialebenen, die in irgend zwei Punkten dieses Teiles an die Fläche gelegt werden können, stets kleiner sind als δ. Ist in

ähnlicher Weise von $A_{\varkappa+1}$ und $A_{\varkappa+2}$ aus der Punkt $A'_{\varkappa+1}$ bestimmt, so wollen wir den Fall nicht ausschliefsen, dafs die Punkte $A_\varkappa$ und $A'_{\varkappa+1}$ zusammenfallen; wenn aber diese beiden Punkte verschieden sind, so soll das Dreieck $A_{\varkappa+1}\,A'_\varkappa\,A'_{\varkappa+1}$ allen jenen Bedingungen genügen, die wir für $A_\varkappa\,A_{\varkappa+1}\,A'_\varkappa$ aufgestellt haben. In ähnlicher Weise schliefsen wir weitere Dreiecke an, bis die ganze Fläche mit Dreiecken angefüllt ist. Der Grenzwert, den die Summe der Dreiecke für einen immer kleiner werdenden Winkel δ liefert, ist der Inhalt der krummen Fläche.

Der Beweis bedarf keiner nähern Ausführung, da es nur nötig ist, die Entwicklungen des vorigen Paragraphen zu übertragen. Auch wird es nicht nötig sein zu zeigen, dafs man stets den aufgestellten Forderungen genügen kann. Natürlich ist es nicht nötig, die einzelnen ebenen Flächen als Dreiecke vorauszusetzen; man darf beliebige Polygone wählen, wofern nur die oben bezeichneten Winkel hinlänglich klein sind.

8. An dieser Stelle möge es gestattet sein, auf einen Unterschied hinzuweisen, der, wie Hr. Schwarz[5]) gezeigt hat, zwischen krummen Linien und krummen Flächen besteht. Für den Beweis kommt es in beiden Fällen auf die Kleinheit der Winkel an; aber bei krummen Linien, die überall Tangenten besitzen, können die Winkel zwischen einer Sehne und den in ihren Endpunkten gezogenen Tangenten stets durch hinlängliche Verkleinerung der Sehnen beliebig klein gemacht werden; demgemäfs kann der Bogen einer krummen Linie definiert werden als der Grenzwert, dem sich die Länge des Sehnenzuges bei unbegrenzter Verkleinerung der einzelnen Sehnen nähert. Dagegen genügt die Festsetzung, dafs die sämtlichen Polygone, die in die krumme Fläche eingeschrieben werden, unendlich kleine Werte annehmen, selbst bei solchen Flächen nicht, die überall Tangentialebenen besitzen. Man kann eine Anordnung treffen, bei der die einzelnen Polygone unendlich klein werden, ohne dafs ihre Ebenen mit den in den Eckpunkten an die Fläche gelegten Tangentialebenen immer kleinere Winkel bilden; dann wird aber, wie Hr. Schwarz zeigt, die Summe der Polygone nicht mehr den Inhalt der Fläche darstellen, sondern unbegrenzt wachsen.

§ 6.

Die Messung der Körper.

1. Während flächengleiche ebene Polygone (wenigstens in der euklidischen Ebene) stets in kongruente Teile zerlegt werden können, gilt ein entsprechender Satz für Polyeder nicht oder hat wenigstens bis jetzt nicht erwiesen werden können. Eine allgemeine Erörterung der Bedingungen, unter denen es bisher gelungen ist, inhaltsgleiche Polyeder aus kongruenten Stücken zusammenzusetzen, darf uns hier nicht beschäftigen; einzelne Fälle müssen wir aber anführen, soweit sie für die folgende Entwicklung gebraucht werden. Wir gehen von dem Satze aus:

»Wenn die Grund- und Endflächen zweier Prismen in denselben beiden parallelen Ebenen liegen und in parallel-kongruente Teile zerlegt werden können, während die Seitenkanten des einen dieselbe Richtung haben, wie die des andern: so können die Prismen in kongruente Teile zerlegt werden, die durch Parallelverschiebung mit einander zur Deckung gebracht werden können.«

So mögen die Prismen Π und Π' mit ihren Grundflächen P und P′ auf derselben Ebene stehen; die Seitenkanten des einen mögen dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben, wie die des andern. (Dann liegen auch die Endflächen in einer Ebene.) Zudem sei die Grundfläche P in n Teile $P_1 \ldots P_\varkappa \ldots P_n$ und die Grundfläche P′ in n Teile $P_1' \ldots P_\varkappa' \ldots P_n'$ in der Weise zerlegt, dafs jeder Teil $P_\varkappa$ (für $\varkappa = 1 \ldots n$) durch Parallel-Verschiebung zur Deckung mit $P_\varkappa'$ gebracht werden kann. Alsdann konstruiere man über $P_1 \ldots P_n$, $P_1' \ldots P_n'$ jedesmal dasjenige Prisma, dessen Seitenkanten mit denen der gegebenen Prismen gleiche Länge und gleiche Richtung haben; dadurch wird Π in die n Prismen $\Pi_1 \ldots \Pi_n$, Π in $\Pi_1' \ldots \Pi_n'$ zerlegt. Verschiebt man Π_1 ohne Drehung so, dafs P_1 mit P_1' zur Deckung gelangt, so fällt Π_1 mit Π_1' zusammen. Da dasselbe von $\Pi_2 \ldots \Pi_n$ gilt, so ist der Satz erwiesen.

2. Nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen können zwei kongruente Quadrate, die in derselben Ebene liegen, stets in parallel-kongruente Stücke zerteilt werden. Somit genügen zwei kongruente Würfel, die eine Kante gemeinschaftlich haben, stets den Voraussetzungen des vorangehenden Satzes; sie lassen

sich also stets aus parallel-kongruenten Teilen zusammensetzen. Daraus ergiebt sich der folgende Satz:

»Zwei kongruente Würfel können in dieselbe Anzahl von Stücken derartig zerlegt werden, dafs jedes Stück des einen durch Parallel-Verschiebung zur Deckung mit einem Stück des andern gebracht werden kann.«

Beim Beweise dürfen wir annehmen, dafs die Würfel einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben. So sei der este Würfel bestimmt durch die drei von demselben Punkte ausgehenden gleichen Strecken OA, OB, OC, von denen jede auf den beiden anderen senkrecht steht; in gleicher Weise seien OA', OB', OC' die drei vom Punkte O ausgehenden Kanten des zweiten Würfels, und es sei $OA' = OA$. Die Ebene OCA' schneide die Ebene OAB in OA_1; man lasse OB_1 in der Ebene OAB auf OA_1 und lasse OC_1 in der Ebene OCA' auf OA' senkrecht stehen. Die Punkte A_1, B_1, C_1 wähle man so, dafs $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OA$ ist. Dann liegen OA, OB, OA_1 und OB_1 in derselben Ebene, die auf OC senkrecht steht; ebenso liegen OA_1, OC, OA' und OC_1 in der auf OB_1 senkrecht stehenden Ebene; endlich stehen die Strecken OB_1, OC_1, OB' und OC' auf OA' senkrecht. Die vier Würfel (O, ABC), (O, A_1B_1C), $(O, A'B_1C_1)$, $(O, A'B'C')$ bilden also eine Reihe, in der je zwei auf einander folgende eine Kante gemeinschaftlich haben. Hiernach übersieht man leicht, wie die den Forderungen des Lehrsatzes entsprechende Zerlegung ausgeführt werden kann.

Es ist vielleicht ganz passend, die Art dieser Zerteilung etwas näher darzulegen. Zu dem Ende bezeichne ich die vier Würfel der Reihe nach mit W_1, W_2, W_3, W_4. Durch Ebenen, die der Kante OC parallel sind, wird der erste Würfel in die Teile $T_{12}' \ldots T_{12}^{m}$ und der zweite Würfel durch solche Ebenen in die Teile $T_{21}' \ldots T_{21}^{m}$ so zerlegt, dafs jedesmal $T_{12}^{\varkappa}$ und $T_{21}^{\varkappa}$ parallel-kongruent sind. Eine entsprechende Beziehung finde zwischen den Teilen $T_{23}' \ldots T_{23}^{n}$ des zweiten und den entsprechenden Teilen $T_{32}' \ldots T_{32}^{n}$ des dritten Würfels statt. Wenn die Teile $T_{21}^{\varkappa}$ und T_{23}^{λ} ein Stück T_{213}^{ϱ} gemeinschaftlich haben, so wird diesem als einem Teile von $T_{21}^{\varkappa}$ ein parallel-kongruentes Stück T_{123}^{ϱ} von W_1 und als Teil von T_{23}^{λ} ein parallel-kongruentes Stück T_{312}^{ϱ} von W_3 entsprechen. Auf diese

Weise werden der erste und der dritte Würfel in Teile zerlegt, die durch blofse Verschiebung zur Deckung gebracht werden können. Nun werde eine entsprechende Zerlegung für den dritten und vierten Würfel in Teile T^{μ}_{34} und T^{μ}_{43} ausgeführt. Hat jetzt der Teil T^{μ}_{34} mit dem Teile T^{ρ}_{312} ein Stück T^{σ}_{3412} gemeinschaftlich, so wird dies einen Teil T^{σ}_{1234} von W_1 decken, sobald T^{ρ}_{312} mit T^{ρ}_{123} zur Deckung gebracht wird. Entsprechend kann das Stück T^{σ}_{3412} durch Parallel-Verschiebung zur Deckung gebracht werden mit einem Teil T^{σ}_{4312} von W_4. Die hierdurch bestimmten Teile T^{σ}_{1234} und T^{σ}_{4312} erfüllen die angegebenen Forderungen.

3. Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die im vorigen Paragraphen für ebene Flächen durchgeführten Entwicklungen auf allseitig begrenzte Raumteile (Körper) zu übertragen.[6]) Wir beschränken uns wieder auf den einfachsten Fall und setzen demnach voraus, dafs der zu untersuchende Körper eine einzige begrenzende Fläche besitzt und dafs jede ihn schneidende Gerade zwei Punkte mit dem Grenzgebilde gemeinschaftlich hat. Unsere Entwicklung gilt also direkt aufser für zahlreiche von krummen Flächen begrenzte Körper für alle konvexen Polyeder; sie kann aber leicht so umgeändert werden, dafs sie auch weitere Klassen von Körpern umfafst.

Wir konstruieren drei Scharen von parallelen Ebenen, von denen jedesmal zwei auf einander folgende denselben Abstand haben; die Ebenen der einen Schar sollen auf denen der beiden anderen Scharen senkrecht stehen. Dadurch erhalten wir ein Netz von Würfeln, deren Kanten dem gegebenen Abstand gleich sind. Wählt man diesen Abstand gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit und liegen a_ν der gebildeten Würfel innerhalb des zu messenden Körpers, während b_ν von ihnen im stande sind, den Körper einzuschliefsen, so setzen wir fest, dafs die Mafszahl zwischen $\frac{a_\nu}{\nu^3}$ und $\frac{b_\nu}{\nu^3}$ liegt. Der Nachweis, dafs durch diese Festsetzung eine Zahl bestimmt wird, und dafs diese Zahl von der Wahl der Ebenen unabhängig ist, erfordert nur solche Erwägungen, die bereits im vorigen Paragraphen durchgeführt sind. Wir beschränken uns daher auf folgende kurze Bemerkung.

Wenn für einen der Längeneinheit gleichen Abstand m Ebenen der ersten, n Ebenen der zweiten und p Ebenen der dritten Schar den Körper schneiden, so werden höchstens np + pm + mn Schnittgerade je zweier dieser Ebenen den Körper treffen. Treten bei einem Abstande, der nur den ν^{ten} Teil der Längeneinheit beträgt, die Zahlen m′, n′, p′ an die Stelle von m, n, p, so ist

$$m' \leqq \nu\,(m + 1) - 1$$
$$n' \leqq \nu\,(n + 1) - 1$$
$$p' \leqq \nu\,(p + 1) - 1.$$

Es ist aber $b_\nu - a_\nu < 2\,(n'p' + p'm' + m'n')$, also nimmt $\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^3}$ unbegrenzt ab.

§ 7.

Die Messung der geraden Strecke.

Die drei letzten Paragraphen haben uns gelehrt, die Messung beliebiger Linien, Flächen und Körper auf die Messung der geraden Strecke zurückzuführen. Wenn auch direkt nur die erste Aufgabe auf die Messung von Strecken hinauskommt, so übersieht man doch leicht, dafs auch für die Lösung der zweiten und dritten Aufgabe die Mafszahlen von Strecken unentbehrlich sind. Es ist daher notwendig, den Prozefs, vermittelst dessen gerade Strecken gemessen werden, eingehend zu untersuchen.

1. Um eine Strecke b durch eine Strecke a zu messen, trage ich die Strecke a, so oft es angeht, auf b ab. Es kann vorkommen, dafs dies genau α-mal möglich ist, wo α eine ganze Zahl ist; dann ist $b = \alpha .\, a$. Wenn dies nicht möglich ist, so setzen wir voraus, es gebe ein Vielfaches von a, welches gröfser ist als b. Hiernach giebt es eine ganze Zahl α von der Beschaffenheit, dafs die Strecke a, α-mal auf b abgetragen, die Strecke b noch nicht anfüllt, dafs aber die Hinzunahme einer weitern Strecke a bereits über b hinausführt, oder dafs ist:

$$\alpha a < b < (\alpha + 1)\,a.$$

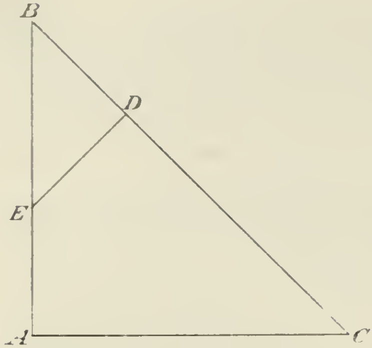
Um die Messung weiter fortsetzen zu können, mufs man annehmen, es sei möglich, die Strecke a in ν gleiche Teile zu zerlegen. Diejenige Strecke, die man genau ν-mal auf a abtragen kann, bezeichnen wir durch $\frac{1}{\nu}a$ und legen ihr die Mafszahl $\frac{1}{\nu}$ bei. Kann man jetzt die Strecke $\frac{1}{\nu}a$ genau β-mal auf b abtragen, so setzt man $b = \frac{\beta}{\nu}a$ und nennt $\frac{\beta}{\nu}$ die Mafszahl. Im allgemeinen kann man aber nur eine ganze Zahl β derartig bestimmen, dafs ist:

$$\frac{\beta}{\nu}a < b < \frac{\beta + 1}{\nu}a.$$

Nun könnte man denken, für zwei beliebig gewählte Strecken a und b gäbe es immer eine ganze Zahl ν von der Beschaffenheit, dafs $\frac{1}{\nu}a$ sich vollständig genau auf b abtragen läfst. Das ist aber nicht der Fall, und eine der grofsartigsten Entdeckungen, die wir den Pythagoreern verdanken, ist die Erkenntnis, dafs zwei Strecken kein gemeinschaftliches Mafs besitzen können.

2. Von vornherein müssen wir die Existenz inkommensurabeler Strecken für höchst wahrscheinlich halten. Man trage nämlich die Längeneinheit von einem festen Punkte aus beliebig oft in einer bestimmten Richtung ab; dadurch gelangt man zu Punkten, die mit den Ziffern 1, 2, 3 . . . bezeichnet werden sollen. Indem man jetzt die Hälfte der Längeneinheit von demselben Punkte aus in der gegebenen Richtung abträgt, wird zwischen je zwei der vorhin bezeichneten Punkte α und $\alpha + 1$ ein Punkt $\frac{2\alpha + 1}{2}$ eingeschoben. Macht man denselben Prozefs mit dem dritten, vierten . . . Teile der Längeneinheit, so werden stets, wie weit man auch gehen mag, nur diskrete Punkte markiert, während die nicht markierten Punkte ganze Strecken anfüllen. Man wird kaum annehmen können, dafs die Fortführung dieses Prozesses alle in der festgesetzten Richtung liegenden Punkte liefert.

Das ist denn auch bereits von den Alten direkt gezeigt worden, und es dürfte nicht ohne Interesse sein, einen geometrischen Beweis hierfür mitzuteilen, da bei den bekannten algebraischen Beweisen die gemachten Voraussetzungen nicht deutlich zu Tage treten. In einer parabolischen Raumform sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten AB und AC einander gleich sind. Man trage CD = CA auf CB ab und errichte in D auf BD die Senkrechte, welche die Seite AB in E trifft. Dann ist CAD = CDA und deshalb auch EAD = EDA. Demnach ist ED = EA, und das Dreieck EDB ist ebenfalls gleichschenklig-



rechtwinklig. Hätten jetzt AC und CB ein gemeinschaftliches Maſs, so müſste dasselbe auch in DB und AB, also auch in DB und EB enthalten sein. Es müſste also, da EA < EB ist, kleiner sein als die Hälfte von AB. Nun kann man aber auf EDB dieselbe Konstruktion anwenden und so stets in unbegrenzter Folge neue gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke derartig herleiten, daſs die Kathete des folgenden Dreiecks kleiner ist als die Hälfte der Kathete des vorangehenden und daſs ein etwa vorhandenes gemeinschaftliches Maſs von AB und BC auch in den Seiten aller folgenden Dreiecke aufgeht. Das widerstreitet aber der an erster Stelle gemachten Annahme; denn wenn es eine solche Strecke gäbe, so müſste für ein beliebiges μ ihr 2μ-faches kleiner sein als AB.

3. Ist für eine Zahl ν die Gleichung erfüllt: $\mathrm{b} = \frac{\alpha}{\nu}\mathrm{a}$, so nennen wir $\mathrm{A} = \frac{\alpha}{\nu}$ die Maſszahl von b für die Strecke a als Einheit. Wofern für irgend eine andere Zahl ν_1 die Zahl α_1 so bestimmt ist, daſs

$$\frac{\alpha_1}{\nu_1} < \mathrm{A} < \frac{\alpha_1 + 1}{\nu_1}$$

ist, wird auch stets die Forderung befriedigt:

$$\frac{\alpha_1}{\nu_1}\mathrm{a} \leq \mathrm{b} < \frac{\alpha_1 + 1}{\nu_1}\mathrm{a}.$$

Jede rationale Zahl A ist also durch die Festsetzung $\mathrm{A} = \frac{\alpha}{\nu}$ vollständig bestimmt.

Es fragt sich aber, ob wir auch dann von einer Maſszahl sprechen können, wenn die beiden Strecken kein gemeinschaftliches Maſs haben. Diese Frage spaltet sich nach den vorigen Entwicklungen in die beiden folgenden:

a) Ist durch die Festsetzung:

$$(1)\ \frac{\alpha}{\nu} < \mathrm{A} < \frac{\alpha + 1}{\nu}$$

eine, und zwar eine einzige Zahl bestimmt, wofern eine Methode bekannt ist, die gestattet, jedem Werte von ν einen der Gleichung (1) entsprechenden Wert von α zuzuordnen?

b) Ist die Strecke b ihrer Gröfse nach vollständig bestimmt, wenn die Längeneinheit gegeben und die Mafszahl durch die Festsetzung (1) bestimmt ist?

Natürlich setzt die Aufstellung der zweiten Frage bereits die Bejahung der ersten voraus.

Für die Beantwortung der ersten Frage erinnern wir uns, dafs zahlreiche Aufgaben der Algebra nicht durch rationale Zahlen gelöst werden können. Suchen wir z. B. diejenige Zahl A, deren Quadrat gleich 2 ist, so erkennen wir unmittelbar, dafs diese Zahl nicht rational sein kann; dagegen zerfallen alle Zahlen, deren Nenner gleich ν ist, derartig in zwei Klassen, dafs das Quadrat der zur ersten Klasse gehörigen Zahlen kleiner, das Quadrat jeder Zahl der zweiten Klasse aber gröfser ist als 2. Man kann demnach jedem ganzzahligen Nenner ν eine ganze Zahl α so zuordnen, dafs

$$\frac{\alpha^2}{\nu^2} < 2 < \left(\frac{\alpha+1}{\nu}\right)^2$$

ist. Da aber für positive rationale Zahlen A, B, C, D aus den Gleichungen $A^2 = B$, $C^2 = D$ und $B > D$ auch $A > C$ folgt, so mufs, wenn dies Gesetz allgemein gültig sein soll, auch die Forderung gestellt werden:

$$\frac{\alpha}{\nu} < \sqrt{2} < \frac{\alpha+1}{\nu}.$$

Endlich giebt es bei Beschränkung auf positive rationale Zahlen nur eine einzige Zahl A, die bei gegebenem Werte von B der Gleichung genügt: $A^2 = B$; will man dies Gesetz für alle positiven Zahlen B aufrecht erhalten, so mufs man annehmen, die angegebene Einschliefsung stelle nur einen einzigen Wert für $\sqrt{2}$ dar.

Ebenso stellt keine rationale Zahl den Logarithmus von 2 für die Grundzahl 10 dar; aber für jeden Wert von ν läfst sich ein Wert von α derartig bestimmen, dafs ist:

$$10^{\alpha} < 2^{\nu} < 10^{\alpha+1};$$

man hat also zu setzen:

$$\frac{\alpha}{\nu} < \log 2 < \frac{\alpha + 1}{\nu}.$$

Auf die eigentliche Theorie der Irrationalzahlen können wir hier nicht eingehen; wir begnügen uns mit zwei kurzen Bemerkungen. An erster Stelle weisen wir darauf hin, dafs es nicht notwendig ist, für den Nenner ν alle ganzen Zahlen zu nehmen, dafs es vielmehr genügt, diejenigen auszuwählen, welche Potenzen einer bestimmten Zahl (etwa von 10) sind. Zweitens müssen wir doch den Beweis dafür andeuten, dafs man mit den Irrationalzahlen rechnen kann. Dieser beruht darauf, dafs, wofern für eine Reihe von Zahlen nur gewisse Intervalle gegeben sind, man auch für eine neue, durch die Grundrechnungeu aus ihnen gewonnene Zahl ein Intervall angeben kann, und dafs das letzte Intervall immer mehr eingeschränkt werden kann, sobald man die Intervalle für die ersten Zahlen hinlänglich klein werden läfst. Ist z. B.

$$\frac{\alpha}{\nu} < \mathrm{A} < \frac{\alpha + 1}{\nu}, \quad \frac{\beta}{\mu} < \mathrm{B} < \frac{\beta + 1}{\mu},$$

so hat man für die Summe $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ das Intervall $\frac{\mu + \nu}{\mu\nu}$; um dies Intervall für einen beliebigen Wert von ϱ kleiner als $\frac{1}{\varrho}$ zu machen, hat man nur μ und ν passend zu wählen.

4. Wir haben oben vorausgesetzt, dafs man jede Strecke in ν gleiche Teile zerlegen kann. Umgekehrt erkennt man aber unmittelbar, dafs eine derartige Teilung nur auf eine einzige Weise möglich ist. Demnach ist auch die Länge einer Strecke vollständig bestimmt, wenn ihre Mafszahl für eine gegebene Längeneinheit bekannt und diese Zahl rational ist. Es fragt sich aber, ob bei gegebener Einheitsstrecke auch eine irrationale Mafszahl die Länge einer Strecke bestimmt. Es sei also eine Strecke a gegeben und eine Zahl durch die obige Einschliefsung für jeden Wert von ν definiert. Wir wählen einen Punkt O und tragen in einer festgewählten Richtung die Strecken $\mathrm{OA}_\nu = \frac{\alpha}{\nu}$ und $\mathrm{OA}_{\nu}' = \frac{\alpha + 1}{\nu}\mathrm{a}$ ab. Wie grofs auch immer die Zahl ν gewählt ist, bleibt stets eine Strecke $\mathrm{A}_\nu \mathrm{A}_\nu'$, auf der der gesuchte Punkt

X liegen mufs. Es fragt sich aber, ob die unendliche Fortsetzung der Einschliefsung oder, wenn man lieber will, die Zusammenfassung des ganzen Prozesses den Punkt X eindeutig bestimmt. Nun giebt es zwei Möglichkeiten: entweder giebt es nur einen Punkt X, der allen diesen Festsetzungen entspricht, oder es giebt eine Strecke BB', in die keine zwei Punkte A_ν und $A_{\nu'}$ hineinfallen. Im letzten Falle müfste die Strecke BB' kleiner sein als die Strecke $A_\nu A_{\nu'}$. Nun ist $A_\nu A_{\nu'} = \frac{a}{\nu}$; es müfste also $\nu \cdot BB' < a$ sein, wie grofs man auch die Zahl ν wählen mag. Die Existenz einer solchen Strecke widerspricht aber dem an erster Stelle vorausgesetzten Satze. Sobald also dieser Satz als richtig angenommen wird, gehört nach Wahl der Längeneinheit zu jeder Strecke eine einzige Mafszahl und zu jeder Mafszahl eine bestimmte Strecke.

Der Messung einer geraden Strecke liegen demnach die beiden Voraussetzungen zu Grunde:

a) Wenn eine Strecke b gröfser ist als eine Strecke a, so giebt es immer ein Vielfaches von a, welches gröfser ist als b.

b) Für eine beliebige ganze Zahl ν kann man jede Strecke in ν gleiche Teile zerlegen.

Es erübrigt noch, die Berechtigung dieser beiden Voraussetzungen zu prüfen. Zu dem Ende müssen wir uns mit mehreren Untersuchungen bekannt machen, die teils der älteren, teils der neuesten Zeit angehören.

§ 8.

Die Stetigkeit bei Euklid.

1. Bei einem oberflächlichen Einblick in Euklids Elemente könnte man zu der Meinung kommen, als ob die Stetigkeit für die Geometrie keine Bedeutung habe; denn sie wird dort niemals ausdrücklich erwähnt. Wir müssen uns daher fragen, ob dieser Begriff vielleicht nur rein äufserlich zurücktritt, zugleich aber doch einen wesentlichen Bestandteil vieler Beweise bilde.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir die Art und Weise besprechen, in der Euklid die Konstruktions-Aufgaben behandelt, da diese Aufgaben einerseits überaus zahlreich sind, andererseits vielfach geradezu die Rolle von Existenzbeweisen spielen. Da tritt uns die auffallende Thatsache entgegen, dafs die Beweise für die Richtigkeit einer Konstruktion stets eine Lücke besitzen, die nur vermittelst des Princips der Stetigkeit ausgefüllt werden kann. Wenn Euklid z. B. über der gegebenen Grundlinie AB ein gleichseitiges Dreieck konstruieren will, so beschreibt er zwei Kreise, die beide die Strecke AB zum Radius haben, und von denen der eine in A, der andere in B einen Mittelpunkt hat; der Schnittpunkt dieser beiden Kreise liefert den dritten Eckpunkt des Dreiecks; aber gerade dafür, dafs die Kreise einander schneiden, fehlt jeder Nachweis.

Überhaupt werden gerade Linie und Kreis in jeder Konstruktions-Aufgabe benutzt. Demnach sollte man denken, dafs die Lehre über den Schnitt eines Kreises mit einer geraden Linie oder mit einem zweiten Kreise besonders eingehend behandelt wäre. Aber dem ist nicht so; gerade diese Teile gehören zu den schwächsten in dem sonst so vorzüglich angelegten Lehrgebäude. Der Beweis des überaus einfachen Satzes, dafs zwei Kreise ganz zusammenfallen, wofern sie den Mittelpunkt und einen Punkt des Umfanges gemeinschaftlich haben, wird in mehrere Teile zerlegt, von denen jeder zahlreiche Erwägungen erfordert. Zwar nimmt die Untersuchung über die gegenseitige Lage zweier Kreise einen bedeutenden Raum ein; aber wir vermissen gerade diejenigen Sätze, die für die Anwendungen am wichtigsten sind; so fehlen die Bedingungen dafür, dafs zwei Kreise zwei oder einen oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Demnach leiden alle Konstruktionen bei Euklid an der Lücke, dafs man nicht weifs, ob die benutzten Kreise und Geraden einander schneiden. Selbst die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Seiten ist von diesem Mangel nicht frei: wohl wird darauf hingewiesen, dafs jedesmal die Summe zweier Seiten gröfser sein mufs als die dritte; aber den Nachweis, dafs unter dieser Bedingung die Konstruktion stets möglich ist, sucht man vergebens.

Eine ähnliche Lücke findet man in der Stereometrie, wo ohne jeden Versuch eines Beweises sehr häufig von dem Satze Gebrauch gemacht wird, dafs zwei Ebenen entweder parallel sind oder sich in einer geraden Linie schneiden.

2. Die neueren Lehrbücher leiden meistens nicht an dem erwähnten Mangel, indem sie für die soeben erwähnten Sätze

strenge Beweise liefern. Dabei wird aber das Princip der Stetigkeit benutzt. Um z. B. zu zeigen, dafs zwei Kreise einander schneiden, wenn die Entfernung der Mittelpunkte gröfser ist als die Differenz, aber kleiner als die Summe der Radien, beweist man, dafs dem Umfange des zweiten Kreises zwei Punkte A und B angehören, von denen der eine im Innern, der andere im Äufsern des ersten liegt; dann schliefst man weiter: Jeder der beiden von A und B begrenzten Bogen des zweiten Kreises liegt zum Teil im Äufsern und zum Teil im Innern des ersten Kreises; folglich mufs auf jedem Bogen mindestens ein Punkt liegen, der dem Umfang des ersten Kreises angehört. Dafs aber zwei verschiedene Kreise nicht drei Punkte gemeinschaftlich haben können, wird in anderer Weise gezeigt. (Die Änderung, welche für die Polarform des Riemannschen Raumes an dieser Entwicklung angebracht werden mufs, kommt hier nicht in Betracht.)

Der vorhin erwähnte Satz der Stereometrie wird von v. Staudt in folgender Weise ausgesprochen: Zwei Ebenen haben eine gerade Linie gemeinschaftlich, sobald sie sich in einem Punkte treffen. Zum Beweise zieht er durch den gemeinschaftlichen Punkt A in der ersten Ebene zwei Gerade, die der zweiten nicht angehören. Jede dieser Geraden wird durch den Punkt A in zwei Halbgerade geteilt, die auf verschiedenen Seiten der zweiten Ebene liegen. Demnach kann man in der ersten Ebene die Halbgeraden AB und AC so wählen, dafs sie nicht derselben Geraden angehören und auf verschiedenen Seiten der zweiten Ebene liegen. Zieht man die Strecke BC, so findet auf ihr ein Übergang von der einen Seite zur andern, also auch ein Schnitt mit der zweiten Ebene statt. Dafs der Schnittpunkt beiden Ebenen angehört, diese also eine gerade Linie, aber keinen weiteren Punkt gemeinschaftlich haben, folgt aus den allgemeinen Eigenschaften der Ebene.

3. Ich erachte es nicht für notwendig, das Princip der Stetigkeit in voller Allgemeinheit auszusprechen. Für die meisten Anwendungen genügt folgende Form: Eine Linie gehöre ganz einem Gebilde an, das in zwei Teile zerlegt ist; wenn dann die Linie mit jedem Teile mindestens einen Punkt gemeinschaftlich hat, so mufs sie auch die Grenze treffen. Auch folgende Form läfst sich sehr häufig anwenden: Bewegt sich ein Punkt in einem Gebilde, das in zwei Teile zerlegt ist, und gehört er bei Beginn der

Bewegung dem einen und beim Ende der Bewegung dem andern Teile an, so mufs er während der Bewegung mindestens einmal auf die Grenze der beiden Teile gelangen.

4. Dies Axiom liefert uns den Nachweis für den einen der beiden Sätze, die wir im vorigen Paragraphen vorausgesetzt haben, indem sich mit seiner Hilfe zeigen läfst, dafs jede Strecke in beliebig viele gleiche Teile zerlegt werden kann. Um z. B. die Möglichkeit der Halbierung zu erkennen, ohne die bekannte Konstruktion zu benutzen, nehme man auf der Strecke AB einen beliebigen Punkt C an; dann ist entweder $AB = BC$, oder einer der beiden Teile ist gröfser als der andere. Ist $AC > CB$, so mache man $AD = CB$ und findet $AD < DB$. Läfst man einen Punkt X von D nach C sich bewegen und macht $AY = 2AX$, so bewegt sich zugleich Y von E nach F, wo E der Strecke AB angehört, F über B hinaus liegt. Es mufs also Y den Punkt B erreichen, und der zu dieser Lage von Y gehörende Punkt X ist die Mitte von AB.

Hiernach kann man jede Strecke in ν gleiche Teile zerlegen, wofern ν eine Potenz von 2 ist. Für eine andere Zahl ν suche man eine Potenz von 2, die gröfser ist als ν. Da es solche Potenzen von 2 giebt, kann man durch wiederholte Halbierung eine Strecke AG finden, die, ν-mal als Summand gesetzt, eine Strecke liefert, welche kleiner ist als AB. Dann ist offenbar νGB gröfser als AB. Somit läfst sich der für $\nu = 2$ angegebene Beweis für jedes ν durchführen.

Wofern man den angeführten Satz auf diese oder eine ähnliche Weise beweist, beruht jeder geometrische Lehrsatz, bei dem eine Messung benutzt wird, auf dem Axiom der Stetigkeit. Das gilt in Euklids Lehrgebäude für die ganze Ähnlichkeitslehre, sowie auch, worauf wir kurz hinweisen wollen, für die analytische Behandlung der Geometrie. Daran ändert sich auch nichts, wenn man, statt die Möglichkeit der Zerlegung nur principiell herzuleiten, den ν^{ten} Teil einer Strecke direkt durch eine Konstruktion vermittelt, da der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion das angegebene Axiom ebenfalls benutzt.

5. Wenn das Axiom der Stetigkeit in der Geometrie nicht entbehrt werden kann, so ist es offenbar gestattet, dasselbe auch in solchen Fällen anzuwenden, wo es zwar nicht unbedingt not-

wendig ist, wo seine Benutzung aber dazu dient, einen Beweis wesentlich zu vereinfachen. Das geschieht auch vielfach in neueren Werken. So kennt jeder die Schwierigkeiten, die bei der gewöhnlichen Behandlung der Beweis des Satzes macht: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, der eingeschlossene Winkel im ersten aber gröfser ist als im zweiten, so ist auch die dritte Seite im ersten gröfser als im zweiten. Der gebräuchliche Beweis unterscheidet drei Fälle, von denen jeder zahlreiche Schlüsse bedarf. Dagegen wird der Beweis sehr einfach, wenn man das angegebene Axiom benutzt, worüber man etwa das Lehrbuch der Stereometrie von Schwering vergleichen wolle.

§ 9.

Der Verhältnisbegriff bei Euklid.

1. Indem die neuere Zeit den Zahlbegriff so erweitert hat, dafs er auch gebrochene und irrationale Zahlen umfafst, führt sie den Begriff des Verhältnisses auf den der Mafszahl zurück. Um das Verhältnis zweier Gröfsen zu bestimmen, mifst man beide durch dieselbe dritte, mit ihnen gleichartige Gröfse und dividiert die Mafszahl der ersten durch die der zweiten. Dabei ist nur zu zeigen, was keine Schwierigkeit macht, dafs der Quotient von der als Einheit gewählten Gröfse unabhängig ist. Man kann daher geradezu die zweite Gröfse zur Einheit wählen und dann das Verhältnis der ersten zur zweiten als die Mafszahl definieren, welche man für die erste Gröfse erhält.

Es verdient des folgenden wegen bemerkt zu werden, dafs die Teilung, die wir bei der Messung benutzt haben, durch Vervielfältigung ersetzt werden kann. Ist z die Mafszahl einer Gröfse A durch eine Gröfse B (oder das Verhältnis von A zu B), so zerfallen für einen irrationalen Wert von z die sämtlichen Brüche mit dem Nenner ν in zwei Klassen derart, dafs die Brüche der ersten Klasse kleiner, die der zweiten gröfser sind als z. Ist aber $\frac{\alpha}{\nu} < z$, so ist $\alpha . B < \nu A$, und für $\frac{\beta}{\nu} > z$ ist $\beta B > \nu A$. Bei einem rationalen Werte von z kann sein $\frac{\alpha}{\nu} = z$, und zugleich $\alpha . B = \nu A$. Wenn also zwei Paare gleichartiger Gröfsen A und B, C und D gegeben sind, und wenn mit der Ungleichheit

$\alpha . B < \nu . A$ jedesmal die Ungleichheit $\alpha . D < \nu . C$, und mit $\alpha B > \nu A$ stets $\alpha . D > \nu . C$ und mit der Gleichheit $\alpha . B = \nu . A$ auch $\alpha . D = \nu . C$ verbunden ist, so ist die Mafszahl von A für die Einheit B gleich der Mafszahl von C durch D; oder die Gröfsen A und B haben zu einander dasselbe Verhältnis wie C und D.

2. Nach dieser Vorbereitung gehen wir dazu über, die Art, wie Euklid das Verhältnis behandelt, kurz darzulegen, indem wir den Leser, der sich genauer mit dieser Theorie bekannt machen will, auf die eingehende Erörterung verweisen, die Herr Stolz im ersten Bande seiner »allgemeinen Arithmetik« giebt. Vor allem kommt es auf drei Definitionen an, die im Anfange des fünften Buches die dritte, vierte und fünfte Stelle einnehmen, und die folgendermafsen lauten:

»Verhältnis ist eine gewisse Beziehung zweier gleichartiger Gröfsen auf einander hinsichtlich ihrer Gröfse.«

»Ein Verhältnis zu einander haben Gröfsen, welche vervielfältigt einander übertreffen können.«

»Die Gröfse A hat zu B dasselbe Verhältnis wie C zu D, wenn von beliebigen, aber gleichen Vielfachen der ersten und dritten und beliebigen gleichen Vielfachen der zweiten und vierten, die Vielfachen der ersten und dritten zugleich entweder kleiner oder ebensogrofs oder gröfser sind als die Vielfachen der zweiten und vierten, nach der Ordnung mit einander verglichen.«

Dafs Euklid von seiner Definition des Verhältnisses nicht befriedigt ist, geht aus der Form deutlich hervor. Über die an zweiter Stelle mitgeteilte Definition wollen wir nachher sprechen, nachdem wir einige Worte über die letzte Definition gesagt haben. Um zu erkennen, ob das Verhältnis der Gröfsen A und B dasselbe sei, wie das der Gröfsen C und D, giebt Euklid folgende Vorschrift: Man wähle alle Zahlenpaare α und ν und bilde die Gröfsen $\alpha . B$, $\alpha . D$, $\nu . A$, $\nu . C$; sollen jetzt die Verhältnisse gleich sein, so mufs jedesmal, wenn $\alpha . B > \nu . A$ ist, auch $\alpha . D > \nu . C$ sein; ebenso mufs für jedes Zahlenpaar (α, ν), für welches $\alpha . B < \nu . A$ ist, $\alpha . D < \nu C$ sein, und mit der Gleichheit $\alpha . B = \nu . A$ mufs stets die Gleichheit $\alpha . D = \nu . C$ verbunden sein. Nur wofern diese Bedingungen für alle Zahlenpaare erfüllt sind, haben die Gröfsen dasselbe Verhältnis.

Nachdem diese Definition als berechtigt anerkannt ist, wird allerdings, wie wir beiläufig erwähnen möchten, die zuerst angeführte Definition Euklids in etwa entbehrlich; denn es kommt vor allem darauf an, dafs man über die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Verhältnisse Aufschlufs geben kann, und das wird durch diese Definition und die ihr folgende, die ähnlich lautet, geleistet. Aber an sich macht die Definition durchaus den Eindruck der Willkür, da eine Prüfung verlangt wird, bei der man alle Paare von ganzen Zahlen benutzen mufs; ja, man ist von vornherein nicht sicher, ob die angegebenen unendlich vielen Forderungen mit einander vereinbar sind. Erst die oben entwickelte Art der Messung führt uns in das Verständnis dieser Definition ein.

3. Beim Beweise der Sätze über Proportionen sind zwei Methoden bei Euklid besonders beliebt. An vielen Stellen wendet er die angegebene Definition direkt an. Wenn er z. B. zeigen will, dafs zwei Dreiecke A und B von gleicher Höhe sich ihrem Inhalte nach wie ihre Grundlinien a und b verhalten, so multipliziert er die Grundlinie a des ersten mit einer beliebigen Zahl ν und die Grundlinie b des zweiten mit einer beliebigen Zahl α und konstruiert über den neuen Grundlinien jedesmal Dreiecke mit der gegebenen Höhe; da jetzt für $\nu \cdot a > \alpha \cdot b$ auch $\nu \cdot A > \alpha \cdot B$ ist u. s. w., so folgt die Wahrheit des Satzes aus der mitgeteilten Definition. Vielfach wendet aber Euklid das indirekte Beweisverfahren an. Um zu beweisen, dafs sich A : B wie C : D verhält, nimmt er an, die beiden ersten Gröfsen verhielten sich wie C zu einer neuen Gröfse E, und zeigt, dafs E weder gröfser noch kleiner sein kann als D. In neuerer Zeit wendet man das letzte Verfahren noch viel häufiger an, namentlich, wenn das Verhältnis irrational ist. Ich halte es für natürlicher, die Messung beim Beweise zu verwenden und etwa die Mafszahl als Decimalzahl vorauszusetzen; ich habe gefunden, dafs bei dieser Methode auch das Verständnis wesentlich erleichtert wird.

4. Vergleicht man die beiden ersten oben von uns angeführten Definitionen Euklids mit einander, so erkennt man, dafs die zweite ein wesentliches Merkmal gleichartiger Gröfsen angeben will. Aus den Anwendungen, die Euklid von dieser Definition macht, ersieht man, dafs der Sinn in folgender Weise angegeben werden kann:

Sind A und B gleichartige Gröſsen, so sind sie

a) entweder gleich oder die eine ist gröſser als die andere,

b) auch für zwei beliebige Zahlen α und β sind die Gröſsen $\alpha . A$ und $\beta . B$ entweder gleich oder ungleich;

c) ist $B < A$, so giebt es jedenfalls eine Zahl μ so, daſs $\mu . B > A$ ist.

Gerade auf den dritten Punkt kommt es Euklid an; denn während die beiden ersten Teile der Definition nicht weiter benutzt werden, schlieſst er aus dem dritten Teile, im ersten Satze des zehnten Buches, daſs, wenn zwei ungleiche gleichartige Gröſsen gegeben sind, man durch wiederholte Halbierung der gröſseren zu einer Gröſse gelangt, die kleiner ist als die andere. Daſs die Alten derartigen Sätzen bereits ihr Augenmerk zuwandten, kann kaum genug bewundert werden. Indessen dürfen wir uns nicht verhehlen, daſs hier ein neues Axiom in die Geometrie eingeführt ist oder doch ein Satz aufgestellt wird, dessen Herleitung aus den übrigen Voraussetzungen nicht geringen Schwierigkeiten unterliegen dürfte. Denn nur solche Gröſsen als gleichartige zu betrachten, die den angegebenen drei Forderungen genügen, ist nicht gestattet. So sind zwei beliebige (gerade) Strecken ohne Zweifel gleichartige Gröſsen; daſs aber bei zwei ungleichen Strecken stets ein gewisses Vielfache der kleineren gröſser ist als die gröſsere, ist nicht von vornherein klar. Welche Wichtigkeit die Alten diesem Princip beilegten, ersieht man aus einem Werk, das nur wenig jünger ist als die Elemente Euklids. Archimedes schickt nämlich seinem ersten Buche über Kugel und Cylinder ohne Beweis mehrere Sätze voraus, von denen der fünfte nach der von Heiberg mitgeteilten lateinischen Übersetzung folgenden Wortlaut hat:

Inter lineas inaequales et inaequales superficies et inaequalia solida maius excedere minus eiusmodi magnitudine, quae ipsa sibi addita quamvis magnitudinem datam earum, quae cum ea comparari possint, excedere possit.

Herr Stolz, der in neuerer Zeit zuerst auf die Wichtigkeit dieses Satzes hingewiesen haben dürfte, nennt ihn den Archimedischen Grundsatz und giebt ihm folgenden Ausspruch:

»Eine Gröſse kann so oft vervielfältigt werden, daſs sie jede andere mit ihr gleichartige übertrifft.«

Es ist dies die erste Voraussetzung, die wir bei der Messung der Strecken benutzt haben. Als Ergebnis der §§ 4—8 können wir demnach hinstellen, daſs, wofern diese Voraussetzung für Strecken gilt, sie auch allgemein bei gleichartigen Gröſsen gültig bleibt. Indem wir zur weiteren Prüfung dieser Voraussetzung übergehen, bemerken wir, daſs die Untersuchung, ob wir es mit einem neuen Axiom oder mit einem aus den übrigen geometrischen Voraussetzungen folgenden Lehrsatz zu thun haben, noch nicht abgeschlossen ist; wir müssen uns daher damit begnügen, in den folgenden §§ den Stand der Frage darzulegen.

§ 10.

Cantors transfinite Zahlen.

1. Herr Cantor[7]) betrachtet an erster Stelle die Reihe der realen ganzen Zahlen

$$\text{(I)} \quad 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \nu\ \ldots$$

und legt ihr die erste Mächtigkeit bei. Indem er die negativen Zahlen auſser acht läſst, nimmt er zunächst die gebrochenen Zahlen hinzu. Dabei schreibt er der Gleichförmigkeit wegen auch die ganzen Zahlen in der Form $\frac{\mu}{\nu}$ (für $\nu = 1$) und setzt fest, daſs μ und ν keinen gemeinschaftlichen Teiler (auſser eins) haben. Er setzt $\mu + \nu - 1 = N$ und bezeichnet die Zahl N als die Höhe der gebrochenen Zahl. Zu $N = 1$ gehört nur die eine Zahl $\frac{1}{1}$, zu $N = 2$ gehören die Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{1}$, zu $N = 3$ die Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{1}$, zu $N = 4$ bereits $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$ u. s. w. Jetzt ordne man die rationalen Zahlen nach ihrer Höhe und die zu derselben Höhe gehörigen Zahlen nach ihrer natürlichen Gröſse. Dadurch erhält man eine feste Ordnung, die mit folgenden Zahlen beginnt:

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{3}{1},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{4}{1}\ \text{u. s. w.}$$

Indem man jeder Rationalzahl diejenige ganze Zahl zuordnet, welche angiebt, welchen Platz sie bei dieser Anordnung erhält, erkennt man, daſs man die Gesamtheit der rationalen Zahlen in eindeutige umkehrbare Beziehung zu den natürlichen Zahlen bringen kann.

Cantor zeigt aber, dafs derselbe Satz auch für die Gesamtheit der (reellen positiven) algebraischen Zahlen gilt. Jede algebraische Zahl σ genügt nämlich einer Gleichung von der Form:

$$\alpha_0 \sigma^n + a_1 \sigma^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

wo $a_0, a_1 \ldots a_n$ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, und wo es gestattet ist, die Gleichung als irreducibel vorauszusetzen. Indem mit $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ die absoluten Beträge der Koefficienten $a_0, a_1 \ldots a_n$ bezeichnet werden, bestimmt Herr Cantor die Höhe N dieser algebraischen Zahl σ durch die Festsetzung:

$$N = n - 2 + \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Dann giebt es zu jedem ganzzahligen positiven Werte von N nur eine endliche Anzahl $\varphi(N)$ von algebraischen reellen Zahlen, deren Höhe gleich N ist. So ist $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$ u. s. w. Die zu derselben Höhe gehörigen Zahlen ordne man nach ihrer Gröfse und lasse auf die zur Höhe N gehörigen Zahlen diejenigen Zahlen folgen, deren Höhe gleich $N + 1$ ist. Demnach beginnt die Reihe mit den Zahlen $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3$. Indem man in gleicher Weise fortschreitet, ist es möglich, alle algebraischen Zahlen in eine unendliche Reihe einzuordnen; sie besitzen also ebenfalls die erste Mächtigkeit.

2. Dagegen ist es, wie Cantor bewiesen hat, nicht möglich, die sämtlichen Werte eines Continuums auf die Reihe der natürlichen Zahlen eindeutig zu beziehen. Es würde zu viel Raum beanspruchen, wenn wir versuchen wollten, diese Behauptung hier zu beweisen; für unsern Zweck genügt es, kurz die Ergebnisse zu erwähnen, zu denen Hr. Cantor durch äufserst scharfsinnige Untersuchungen geführt ist.

Wir erinnern zunächst an einen Satz, den wir im dritten Abschnitt (Erster Band S. 168) bewiesen haben. Diesen Satz, den wir dort auf einen speciellen, geometrisch besonders hervortretenden Fall eingeschränkt haben, wollen wir hier ganz allgemein und in rein analytischer Form aussprechen:

»Wir betrachten diejenigen Wertsysteme $(x_1 \ldots x_n)$, für welche jede einzelne Variabele einen positiven Wert hat, für den ist $x_1 \leqq a_1, \ldots x_n \leqq a_n$, wo $a_1 \ldots a_n$ gegebene positive Werte sind; zugleich lassen wir die Variabele y alle reellen Werte zwischen 0 und 1 annehmen; dann ist es möglich, die sämtlichen

Wertsysteme $(x_1 \ldots x_n)$ derartig den Werten y zuzuordnen, dafs jedem Wertsystem ein einziger Wert von y und umgekehrt jedem Werte von y ein einziges Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ entspricht.«

Die Gesamtheit aller reellen Zahlwerte, die zwischen zwei festen Grenzen liegen, bezeichnet Cantor als ein Continuum; der mitgeteilte Satz zeigt, dafs die Mächtigkeit des Continuums dieselbe ist wie die von Wertsystemen, die sich auf entsprechende Weise bei beliebig vielen Variabeln bilden lassen. Stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten haben sonach immer dieselbe Mächtigkeit, die über die erste Mächtigkeit hinausgeht, die aber, wie Cantor zeigt, auf die erste Mächtigkeit folgt und deshalb von ihm als die zweite Mächtigkeit bezeichnet wird.

3. Nun sucht Cantor die natürliche Zahlenreihe so zu erweitern, dafs die Darstellung des Continuums möglich wird. Zu dem Ende stellt er folgende Betrachtungen an.

Während in der Zahlenreihe

$$\text{(I)} \quad 1, 2, 3 \ldots \nu \ldots$$

keine gröfste Zahl existiert, denkt er eine neue Zahl ω, um auszudrücken, dafs der ganze Inbegriff (I) in seiner natürlichen Succession dem Gesetze nach gegeben ist. Auf die Setzung der Zahl ω läfst er weitere Setzungen der Einheit folgen und erhält dadurch die Zahlen

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots \omega + \nu, \ldots$$

von denen es keine gröfste giebt, auf deren Gesamtheit aber eine neue Zahl 2ω folgt, von der aus man zu der Fortsetzung

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, \ldots 2\omega + \nu, \ldots$$

kommt. Weiter gewinnt man auf diesem Wege die Zahlen:

$$3\omega, 3\omega + 1 \ldots 3\omega + \nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu\omega, \mu\omega + 1 \ldots \mu\omega + \nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die keinen Abschlufs erzielen, so dafs man genötigt ist, auf alle Zahlen $\mu\omega + \nu$ eine Zahl ω^2 folgen zu lassen und demgemäfs nicht nur die Zahlen

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu,$$

sondern allgemein die Zahlen

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \nu_2\omega^{\mu-2} + \ldots + \nu_{\mu-1}\,\omega + \nu_\mu$$

4*

folgen zu lassen, wo μ, ν_0, ν_1 . . . ν_μ alle endlichen positiven ganzen Zahlwerte mit Ausschlufs der Verbindung $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_\mu = 0$ anzunehmen haben. Diese Menge läfst sich auf ähnliche Weise, wie die Gesamtheit der reellen algebraischen Zahlen, in die Form einer einfach unendlichen Reihe bringen und hat daher die Mächtigkeit von (I). Wir setzen demnach die Reihe noch fort, indem wir eine neue Zahl ω^ω setzen und die zweite Zahlenklasse als den Inbegriff aller in der angegebenen Weise zu bildenden Zahlen α definieren, die in der bestimmten Succession

$$1,\ 2 \ldots \omega,\ \omega + 1 \ldots \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_\mu \ldots \omega^\omega \ldots \alpha \ldots$$

fortschreiten und der Bedingung unterworfen sind, dafs alle der Zahl α vorangehenden Zahlen eine Menge von der Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse bilden. Von dieser neuen Zahlenklasse zeigt Cantor, dafs sie die Mächtigkeit des Continuums besitzt, dafs ihre Mächtigkeit von der der ersten Zahlenklasse verschieden ist, aber unmittelbar auf die der ersten Zahlenklasse folgt.

Alle mit Hilfe der neuen Zahl ω gebildeten Zahlen fafst Cantor unter dem Namen von transfiniten Zahlen zusammen. Auch ist es ihm möglich, für das Rechnen mit solchen Zahlen allgemeine Regeln aufzustellen. Nur gelten hier ganz andere Gesetze als beim Rechnen mit den gewöhnlichen Zahlen; so ist z. B.

$$(\omega + \nu) + \lambda = \omega + \lambda,\ \lambda + (\omega + \nu) = \omega + \nu,\ (\omega + \nu) + (\omega + \lambda) = 2\omega + \lambda.$$

4. Indessen ist es nicht nötig, näher auf die Cantorsche Theorie einzugehen. Die Frage, ob man die gerade Strecke über das Unendliche hinaus verlängern dürfe, interessiert uns hier weniger. Dagegen wünschen wir vor allem die Frage beantwortet: Gelangt man durch eine hinreichend oft fortgesetzte Halbierung einer Strecke notwendig zu einer Strecke, die kleiner ist als eine beliebig klein gewählte Länge, oder ist die Annahme gerechtfertigt, dafs man bei dieser Operation stets eine Strecke erhält, die eine gegebene Strecke an Länge übertrifft? Cantor ist der Überzeugung, dafs sich diese Frage mit Hilfe seiner transfiniten Zahlen beantworten lasse, und dafs man mit Notwendigkeit zu der Annahme Euklids geführt werde, nach welcher die kleinere von zwei gleichartigen Gröfsen hinreichend oft vervielfältigt die gröfsere übertrifft. Demnach erblickt er »in dem sog. Archimedischen

Axiom gar kein Axiom, sondern einen aus dem linearen Gröfsenbegriff mit logischem Zwange folgenden Satz.« Er spricht diesen Satz in folgender Weise aus:

»Von null verschiedene lineare Zahlgröfsen (d. h. kurz gesagt, solche Zahlgröfsen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken darstellen lassen), welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlgröfse, giebt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröfse.«

Cantor hat den vollständigen Beweis für seinen Satz leider nicht veröffentlicht, aber wenigstens den leitenden Gedanken angegeben. Er geht von der Voraussetzung einer Gröfse aus, deren ν-faches für jede noch so grofse endliche ganze Zahl ν kleiner ist als die Einheit und beweist, dafs auch das α-fache der Zahl kleiner ist als die Einheit, wofern α eine noch so grofse transfinite Zahl ist.

§ 11.

Eine zweite Erweiterung des Zahlgebietes.

1. Wir betrachten eine projektive Umgestaltung einer geraden Linie, bei der zwei reelle Punkte P und Q in Ruhe gehalten werden. Durch diese Umgestaltung werde der Punkt A_0, der zwischen P und Q liegt, nach A_1 übergeführt; zugleich werde der Punkt A_1 in die Lage A_2, A_2 nach A_3 . . . A_{n-1} nach A_n gebracht. Umgekehrt sei A_{-1} derjenige Punkt, der durch die angegebene Operation in die Anfangslage von A_0 kommt; ebenso gelange A_{-2} nach A_{-1}, . . . A_{-n-1} nach A_{-n}. Hierdurch ist jeder ganzen Zahl ein Punkt zwischen P und Q eindeutig zugeordnet. Der Addition und Subtraktion entsprechen gewisse projektive Transformationen, wobei die gewöhnlichen Rechnungs-Gesetze bestehen bleiben. Auch ist es leicht, diese Zuordnung derartig zu erweitern, dafs man auch allen reellen Zahlen einen Punkt zuordnet; hierbei entspricht der Reihenfolge der Punkte die Folge der Zahlen, und die gewöhnlichen Rechenoperationen ändern sich nicht. Unter Annahme des Archimedischen Axioms läfst sich so jedem Punkte zwischen P und Q eine einzige Zahl und jeder Zahl ein einziger Punkt der gewählten Strecke zuordnen. Will man aber auch den übrigen Punkten der Geraden Zahlen

zuordnen, und soll die Zuordnung eindeutig sein, so mufs man das Gebiet der Zahlen erweitern.

2. An dieser Betrachtung bringen wir eine kleine Änderung an, die uns eine unbegrenzte Erweiterung gestattet.[8]) Durch die Gleichung:

$$(1) \quad v = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$$

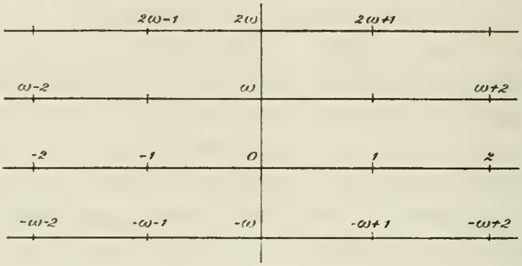
werden den Werten von u, die zwischen + 1 und — 1 liegen, die sämtlichen reellen Werte von v zugeordnet. Um diese Gleichung aber auch für die übrigen Werte von u zur Festsetzung einer eindeutigen Beziehung zwischen u und v zu benutzen, führe man eine neue Zahl ω ein, die dem gewöhnlichen Zahlgebiete nicht angehört, bilde aus ihr durch Addition und Subtraktion der gewöhnlichen Zahlen ν die Zahlen $\omega \pm \nu$, die unter einander und von den gewöhnlichen Zahlen verschieden sind, und treffe folgende Festsetzung: Dem Werte $v = \omega$ ordne man den Wert $u = 2$ und jedem Werte $\omega + \nu$ einen Wert von u zu, der zwischen $+ 1$ und $+ 3$ liegt und der der Gleichung $\nu = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$ genügt. Dadurch ist auch die Zuordnung innerhalb dieses Bereiches von u eindeutig. Nur dem Werte $u = 1$ ist kein endlicher Wert von v zugeordnet; man läfst diesem Werte von u den Wert $v = + \infty$ entsprechen und setzt deshalb, da 1 sowohl gleich $0 + 1$ wie gleich $2 - 1$ ist, fest, dafs der Wert $+ \infty$ auch durch die Subtraktion $\omega - \infty$ erhalten werden soll oder dafs ist: $\omega = 2\,\infty$.

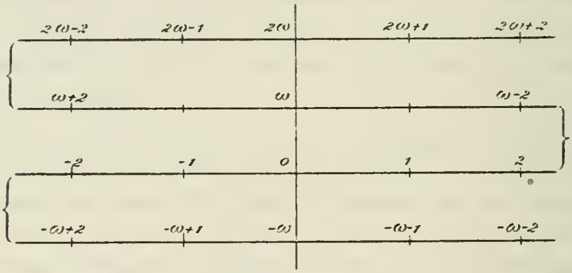
In ähnlicher Weise kann man unbegrenzt fortfahren. Versteht man unter m irgend eine positive oder negative ganze Zahl und nimmt an, dafs u zwischen $2m + 1$ und $2m - 1$ liegt, so bilde man die Zahlen $m\omega + \nu$ für beliebige endliche Werte von ν und ordne jedem Werte von u zwischen $2m + 1$ und $2m - 1$ diejenige Zahl $v = m\omega + \nu$ zu, für welche $\nu = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$ ist. Zugleich entspricht dem Werte $u = 2m + 1$ der Wert $v = m\omega + \infty = (2m + 1)\,\infty$. Hierdurch ist eine eindeutige und, wenn man will, stetige Zuordnung der Werte u und v erreicht, wo man für u jede (rationale oder irrationale) Zahl des gewöhnlichen Zahlgebiets wählen kann.

3. Um diese Zuordnung möglichst zur Anschauung zu bringen, ziehe man in einer euklidischen Ebene eine Reihe von unendlich vielen parallelen Geraden, die einander jedesmal in gleichem Abstande folgen. Jeder Geraden ordne man eine Marke m zu, wo m alle ganzzahligen positiven und negativen Werte erhalten soll, und setze fest, dafs die Linien in der Reihenfolge der zugehörigen Marken auf einander folgen sollen, indem die obere Linie auch stets zur gröfseren Marke gehört. Hiernach liegt die Gerade 0 zwischen den Geraden $+1$ und -1 und zwar über der Linie -1. Das System dieser Linien bezeichnen wir als System der Linien V und setzen fest, dafs der Punkt $v = m\omega + \nu$ der Geraden m angehört und von einem darin gewählten Punkte $m\omega$ den Abstand ν hat, der nach der einen Richtung als positiv, nach der andern als negativ angenommen wird. Um die Linien V zu einem einzigen Zuge zu vereinigen, setzen wir fest, dafs jede Gerade m zwei unendlich ferne Punkte $m\omega + \infty$ und $m\omega - \infty$ besitzt und dafs der Punkt $m\omega + \infty$ auch der Geraden $(m + 1)\,\omega$ angehört und als solcher durch das Symbol $(m + 1)\,\omega - \infty$ bezeichnet wird. Es sollen sonach je zwei auf einander folgende Gerade (und nur zwei solche) einen Punkt gemeinschaftlich haben, der auf der untern Geraden dem Werte $\nu = +\infty$ und auf der obern dem Werte $\nu = -\infty$ entspricht. Dadurch wird erreicht, dafs das System V einen einzigen zusammenhangenden Zug bildet.

Um die Vorstellung zu fixieren, lassen wir die Punkte $m\omega$ sämtlich auf derjenigen Senkrechten liegen, welche im Punkte $v = 0$ auf der Geraden $m = 0$ errichtet wird. Zugleich soll die Längeneinheit auf allen Geraden gleich grofs gewählt werden. Betreffs der Richtung, in der wir auf den einzelnen Geraden die positiven und negativen Zahlen ν den Punkten der Geraden m zuordnen, können wir zwei Anschauungen bilden, von denen jede ihre Vorzüge und Mängel besitzt. Bei der ersten Anschauung nehmen wir die positive Richtung auf allen Geraden übereinstimmend an; dann liegen alle Punkte $m\omega + \nu$, für welche ν denselben Wert hat, senkrecht über einander, und nur beim Übergange von einer Geraden zur andern mufs man jedesmal den Punkt auf die andere Seite übertreten lassen. Man kann aber auch festsetzen, dafs der Übergang von einer Geraden zur andern stets auf derselben Seite erfolgt; dann hat man die positive

Richtung in zwei auf einander folgenden Geraden jedesmal entgegengesetzt zu wählen. Hiernach trifft die im Punkte ν auf der Geraden $\mathrm{m} = 0$ errichtete Senkrechte jede Gerade, welche zu einer ungeraden Marke m gehört, im Punkte $\mathrm{m}\omega - \nu$, und nur die Geraden, für welche die Marke m gerade ist, im Punkte





$\mathrm{m}\omega + \nu$. Die erste Vorstellung wird durch die Figur 5, die zweite durch die Figur 6 angedeutet.

Jetzt läfst man die Gröfse u alle gewöhnlichen Zahlwerte auf einer festen Linie U annehmen; liegt u zwischen $2\mathrm{m} - 1$ und $2\mathrm{m} + 1$, und ist $\nu = \mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{u}\pi}{2}$, so soll dem Werte u der Wert $\mathrm{v} = \mathrm{m}\omega + \nu$ entsprechen. Dadurch ist jedem Punkte der Linie U ein einziger Punkt des Linienzuges V so zugeordnet, dafs auch jedem Punkte von V ein einziger Punkt von U entspricht.

4. In ähnlicher Weise können wir fortfahren, indem wir mit der Gleichung (1) die Gleichung verbinden:

$$(2) \quad \mathrm{w} = \mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{v}\pi}{2}.$$

Wir setzen fest, dafs dem Werte $\mathrm{w} = 0$ die Werte $\mathrm{v} = 0$, $\mathrm{u} = 0$ entsprechen; lassen wir dann w, v, u sich stetig ändern, so ordnen wir jedem reellen Werte von w zwischen $+\infty$ und $-\infty$

einen Wert von v zu, der zwischen $+1$ und -1 liegt, so dafs der entsprechende Wert von u zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ eingeschlossen ist. Jedem Werte von u, der zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, entspricht ein Wert von v, der gröfser ist als eins. Diesem ordnen wir, entsprechend der obigen Festsetzung, einen Wert $w = m\omega + \nu$ zu, wo m alle ganzzahligen positiven Werte und ν alle reellen Werte zwischen $\pm\infty$ (mit Einschlufs der Grenzen) annehmen darf. Der zu $u = 2$, $v = \omega$ gehörige Wert von w mufs einem neuen Gebiet angehören; wir wollen ihm das Zeichen ω^2 beilegen. Mit Hilfe dieses Zeichens bilden wir für ganzzahlige Werte von l die Zahlen $l\omega^2$, welche dem Werte $v = l\omega$, $u = 2l$ entsprechen. Ist nun u eine reelle, jedoch nicht ganze Zahl, so bestimme man die ganze Zahl l durch die Festsetzung,

$$2l + 1 > u > 2l - 1,$$

die Zahl m durch die Forderung

$$2m + 1 > \operatorname{tg}\frac{u\pi}{2} > 2m + 1,$$

und die Zahl ν durch die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{v\pi}{2} = \nu$. Dadurch ist der Zahl u eine bestimmte Zahl $w = lw^2 + m\omega + \nu$ zugeordnet, wo ν auch die Werte $\pm\infty$ erhalten kann. Um aber auch ungeraden ganzzahligen Werten von u eine derartige Zahl für w zuzuordnen, hat man für m auch die Werte $\pm\infty$ zuzulassen, und da $2l + 1 = 2(l + 1) - 1$ ist, mufs man annehmen, dafs der Wert $l\omega^2 + \infty\,\omega$ mit dem Werte $(l + 1)\,\omega^2 - \infty\,\omega$ identisch ist. Hieraus ersieht man, dafs das Zeichen ω^2 für die neu eingeführte Zahl passend gewählt ist.

Auch die Zahlen $l\omega^2 + m\omega + \nu$ können geometrisch dargestellt werden. Wir gehen im euklidischen Raume von einer Schar paralleler Ebenen aus, die in gleichem Abstande einander folgen und entsprechend ihrer Folge durch die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen l bezeichnet werden sollen. In jeder Ebene l ziehe man wiederum eine Reihe paralleler Geraden und lege jeder eine Marke m bei. Alle Geraden, für die $m = 0$ ist, sollen in einer Ebene liegen, welche die sämtlichen Ebenen der Schar senkrecht durchschneidet. Auf jeder der gezogenen Parallelen nehme man unter Anwendung derselben Längeneinheit eine Messung vor und lasse die Nullpunkte wieder einer Ebene angehören, die auf den Ebenen l senkrecht steht. Der Punkt $l\omega^2 + m\omega + \nu$ soll der Ebene l, in ihr der Geraden m angehören und soll von dem in dieser Linie gewählten Nullpunkt den Abstand ν haben, wobei das Zeichen von ν für die beiden Halbgeraden bestimmend ist. Damit aber alle diese Linien als Bestandteile eines einzigen Zuges betrachtet werden können, setzen wir fest, dafs nicht nur je zwei auf einander folgende Gerade derselben Ebene einen unendlich fernen Punkt gemeinschaftlich haben, sondern dafs auch die Gerade $+\infty$ der Ebene l mit der Gerade $-\infty$ der Ebene $l+1$ identisch sein soll, und dafs jede dieser Geraden zu einem Punkte zusammenschrumpft.

5. Um das Zahlgebiet nach der mitgeteilten Methode unbegrenzt zu erweitern, gehe man von den n Gleichungen aus:

$$(3)\quad u_1 = \operatorname{tg}\frac{u_0\pi}{2},\ u_2 = \operatorname{tg}\frac{u_1\pi}{2}\ \ldots\ u_n = \operatorname{tg}\frac{u_{n-1}\pi}{2}.$$

Will man vermittelst dieser Gleichungen die Werte $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$ in eindeutiger Weise einander zuordnen, so führt man neue Zahlen $\omega, \omega^2 \ldots \omega^n$ ein und bildet aus ihnen entsprechend den früheren Festsetzungen die Zahlen

$$u_n = m_0\omega^n + m_1\omega^{n-1} + \ldots + m_{n-1}\,\omega + \nu,$$

wo $m_0, m_1, \ldots m_{n-1}$ ganze, ν beliebige Zahlen des gewöhnlichen Gebiets sind.

Auch diese transfiniten Zahlen lassen sich geometrisch darstellen, wofern man die Fiktion eines mehrdimensionalen euklidischen Raumes benutzt und hierin eine Schar von parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen m_0, hierin eine Schar paralleler Ebenen m_1 von $n-2$ Dimensionen u. s. w. zieht, bis man dazu kommt, in jeder zweidimensionalen Ebene eine Schar paralleler Geraden zu konstruieren. Alle diese Gerade verbindet man in geeigneter Weise zu einem einzigen Linienzuge U_n und kann dann den Punkten dieses Zuges die Punkte einer Geraden U_0 eindeutig zuordnen.

6. Es ist für unsern Zweck nicht erforderlich, tiefer in die Theorie dieser Zahlen einzudringen; wir sehen somit davon ab, die Gesetze des Rechnens für diese Zahlen zu entwickeln, und bemerken nur, dafs sie ihrem Wesen nach ganz auf die Cantorschen transfiniten Zahlen hinauskommen. Uns interessiert hier die Frage: Ist es gestattet, nachdem wir in einer geraden Linie

den Nullpunkt und die Längeneinheit gewählt haben, einem im Endlichen gelegenen Punkte die Zahl ω zuzuordnen? Diese Frage mufs verneint werden; denn die Entwicklung hat uns gelehrt, dafs wir den Wert ∞ nicht entbehren können, welcher die gemeinschaftliche Grenze der Werte ν und $\omega - \nu$ für ein positives, unbeschränkt wachsendes ν ist. Da der Wert ∞ zwischen den Werten 0 und ω liegt, so mufs, falls der Wert ω durch einen im Endlichen gelegenen Punkt dargestellt wird, auch dem Werte ∞ ein Punkt des endlichen Gebietes entsprechen. Dafs dies nicht angeht, bedarf wohl keines Beweises.

§ 12.

Veroneses transfinite Zahlen.

1. Bei Herrn Veronese[9]) gehören die Untersuchungen über die Möglichkeit und die Art der Messung zu den allgemeinen Entwicklungen, welche den rein geometrischen Darlegungen vorausgehen. Demnach stützt er seine Theorie nicht auf geometrische Sätze, sondern gründet sie auf acht Hypothesen, von denen jede folgende mit den vorangehenden vereinbar, aber von ihnen unabhängig sein soll. An erster Stelle führt er seine »Grundform« ein als ein »eindimensionales, in der Lage seiner Teile identisches System, das zur Bestimmung aller anderen Formen dient«. (Hyp. I und II.) Indem er ein beliebiges Segment zur Einheit nimmt, nennt er das unbegrenzte System, das von dem gewählten Anfangs-Elemente aus in der einmal gewählten Richtung alle Vielfachen der Einheit enthält, das »Gebiet der Skala«. Eine »geordnete Gruppe« besteht aus zwei solchen Gebieten, die sich vom Anfangs-Element aus nach den beiden in der Grundform vorhandenen Richtungen hin erstrecken.

Hieran schliefst sich die dritte Hypothese an, die folgendermafsen lautet: »In einer Richtung der Grundform existiert wenigstens ein Element, welches in Bezug auf jedes begrenzte Segment als Einheit aufserhalb des Gebiets der Skala liegt.«

Um diese Hypothese als berechtigt zu erweisen, denke man sich zwei »geordnete Gruppen« N und N′ gegeben, die in ihren Eigenschaften übereinstimmen, von einander unabhängig sind und kein Element gemeinschaftlich haben. Diese Gruppen werden in der Folge NN' betrachtet, so dafs jedes Element von N' auf alle Elemente von N folgt. Da diese Gruppen der Grundform angehören, kann man, falls A ein Element von N, A' ein Element von N' ist, auch vom Segmente AA' beliebige Vielfache bilden. Hiernach liegt nicht nur jedes Element A' von N', sondern auch jedes Element A'', welches durch die Forderung $AA' = A'A''$ gefunden wird, aufserhalb des Gebietes der ersten Skala.

2. Soweit ist dies System (bis auf die Form) in voller Übereinstimmung mit dem System, welches wir im vorangehenden Paragraphen entwickelt haben. Auch dort bildet die Gesamtheit der Elemente, welche bei festem m und beliebigem n durch die Form $m\omega \pm n$ dargestellt werden können, eine geordnete Gruppe im Veroneseschen Sinne. Aber während dort jedesmal zwei derartige Gruppen unmittelbar auf einander folgen, setzt Veronese fest, dafs zwischen irgend zwei geordneten Gruppen jedesmal unendlich viele Gruppen derselben Art liegen. Diese Forderung drückt er in seiner vierten Hypothese folgendermafsen aus:

»Wenn man in dem in Bezug auf eine beliebige Einheit (AA_1) im Unendlichgrofsen liegenden Gebiet 1. ein beliebiges Element B^{∞} auswählt, so existiert in dem Segment (AB^{∞}) ein solches Element X, dafs (AX) und (XB^{∞}) ebenfalls in Bezug auf (AA_1) unendlich grofs sind, und 2. ein solches Element A^{∞}, dafs das Segment (AX) für jedes beliebige X in Bezug auf (AA^{∞}) endlich ist.«

Dadurch gelangt man zu dem Unendlichgrofsen erster Ordnung. Indem man ein darin enthaltenes Element mit dem Zeichen ∞_1 bezeichnet, erhält man durch wiederholte Addition und Subtraktion der ursprünglichen Einheit

$$\ldots \infty_1 - n \ldots \infty_1 - 2,\ \infty_1 - 1,\ \infty_1,\ \infty_1 + 1,\ \infty_1 + 2 \ldots \infty_1 + n, \ldots$$

Wenn man dagegen das Segment (AA^{∞_1}), wo das Element A^{∞_1} dem Zeichen ∞_1 entspricht, zur Einheit nimmt, so wird man auf die Elemente $\infty_1 \cdot n_1$ und damit auch auf die Elemente $\infty_1 \cdot n_1 \pm n_2$ geführt. Auch bietet es jetzt keine Schwierigkeit, mit Hilfe der Zahl ∞_1 Zahlen von der Form

$$(1)\quad \infty_1{}^m \cdot n \pm \infty_1{}^{m-1} \cdot n_1 \pm \ldots \pm \infty_1 \cdot n_{m-1} \pm n_m$$

zu bilden.

Indessen ist damit das Gebiet der möglichen Zahlen noch nicht erschöpft. Da die Zahlen (1) sich ihrem Wesen nach nicht von den gewöhnlichen Zahlen unterscheiden sollen, so hält sich Veronese (Hyp. V) für berechtigt, die in der Hyp. IV angegebene Operation so oft auszuführen, als die Zahl (1) angiebt. Dadurch werden Zahlen ähnlicher Art gebildet, mit deren Hilfe man zu stets neuen Zahlen

$$(2)\quad \infty_1^{\infty_1^{m}},\ \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^{m}}}\ \ldots$$

gelangt.

3. Hieran schliefst sich die sechste Hypothese:

»Jedes endliche Segment, dessen Enden stets in entgegengesetzten Richtungen variieren und welches unbegrenzt klein wird, enthält ein Element aufserhalb des Feldes der Veränderlichkeit seiner Endelemente.«

Ist AB ein derartiges Segment, so dürfen wir wohl annehmen, es werde verlangt, dafs der Punkt X sich von A aus in der Richtung AB, der Punkt X' von B aus in der Richtung BA bewege, dafs hierbei das Segment XX' stets endlich bleibe in Bezug auf AB, dafs jedoch die Mafszahl des veränderlichen Segmentes für das feste als Einheit immer kleiner werde; dann soll zwischen den Punkten X und X' stets mindestens ein Element des gegebenen Segmentes liegen. Von einem System, welches dieser Hypothese genügt, wird gesagt, es sei in Bezug auf die gegebene Einheit stetig, oder auch kurz, es sei relativ stetig. Es wird gezeigt, dafs dieser Forderung nicht nur ein einzelnes Element genügt, sondern dafs es jedesmal ein unendlich kleines Gebiet giebt, dessen Elemente aufserhalb des Variabilitätsgebietes der Endelemente liegen.

Zwischen den endlichen und den unendlich grofsen Segmenten besteht kein wesentlicher Unterschied; vielmehr kann jede Operation, die sich mit einem endlichen Segment ausführen läfst, auch mit jedem unendlich grofsen Segment vorgenommen werden. Wenn aber ein Segment AA' für die Einheit AB der Zahl ∞_1 entspricht, so wird umgekehrt, falls man AA' zur Einheit wählt, das Segment AB unendlich klein. Hiernach liegt es nahe vorauszusetzen (Hyp. VII), dafs jedes zur Einheit gewählte Segment unendlich kleine Segmente einer jeden beliebigen Ordnung enthält.

Mit diesen Annahmen sollen aber die Eigenschaften der Grundform noch nicht abgeschlossen sein; vielmehr verlangt die letzte (VIII[te]) Hypothese noch:

»Wenn die Enden eines Segmentes sich in entgegengesetztem Sinne so verändern, dafs es im absoluten Sinne unbegrenzt klein wird, so enthält es ein Element aufserhalb des Gebietes, in welchem seine Enden sich verändern können.«

Zwischen der sechsten und der achten Hypothese besteht ein wesentlicher Unterschied: denn bei der Veränderlichkeit, wo das Segment in Bezug auf die gewählte Einheit unbegrenzt klein wird, (wie die sechste Hypothese voraussetzt,) genügen alle Elemente eines gewissen Segments der Forderung; aber wenn das Segment, wie sich Veronese ausdrückt, im absoluten Sinne unbegrenzt klein wird, so giebt es nur ein einziges Element aufserhalb des Gebiets der Veränderlichkeit.

4. Mit den Veroneseschen Zahlen nahe verwandt ist das von Hrn. Levi-Civitá aufgestellte System; es wird deshalb notwendig sein, ihm einige Worte zu widmen. Hierbei glaube ich dem Leser das Verständnis zu erleichtern, wenn ich von einer geometrischen Darstellung ausgehe, die zwar in der Arbeit selbst nicht erwähnt wird, die aber sehr nahe liegt.

Man bestimme die Lage eines Punktes auf einem geraden Kegel 1. durch den Abstand a des Punktes vom Scheitel, indem man diese Gröfse auf dem einen Mantel positiv, auf dem andern negativ sein läfst, und 2. durch die Zahl $\nu = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, wo die durch den Punkt und die Achse gelegte Ebene mit einer festen Ebene den Winkel φ bildet. Hängt man jetzt die Gröfse ν an a als Marke an, so genügt das Zeichen a_ν, um die Lage des Punktes eindeutig anzugeben. Da alle Punkte o_ν im Scheitel zusammenfallen, so sollen auch alle Zeichen o_ν denselben Wert darstellen. Sollen die Punkte $a_{-\infty}$ und $a_{+\infty}$ verschieden sein, so führe man durch die Oberfläche des Kegels einen Schnitt längs einer Erzeugenden. Indem man jetzt noch festsetzt, dafs $a_\mu > a_\nu$ ist für $\mu > \nu$ und $a_\mu > b_\nu$ für $a > b$, hat man alle Punkte in eine feste Reihe gebracht.

Das Gebiet dieser Zahlen kann aber noch in folgender Weise erweitert werden. Man lasse der Gruppe $G = a^{(1)}_{\nu_1} + a^{(2)}_{\nu_2} + \ldots$, die eine endliche oder unendliche Anzahl von Elementen enthält, alle Punkte $a^{(1)}_{\nu_1}$, $a^{(2)}_{\nu_2}$ . . . angehören. Weil man zwei Zahlen a_ν und b_ν leicht durch Summation zu einer einzigen Zahl vereinigen kann, so werden alle Indices ν_1, ν_2 . . . als verschieden vorausgesetzt Die Gesamtheit der in einer Gruppe vereinigten Punkte betrachtet man wieder als eine einzige Zahl, wenn entweder die Anzahl der Marken ν_1, ν_2 . . ., die gröfser sind als eine beliebig gewählte Zahl, endlich ist, oder wenn in der Gruppe nur eine endliche Anzahl von Marken vorkommt, die kleiner sind als jede beliebig gewählte Zahl. Im ersten Falle wird die Zahl eine elliptische, im zweiten eine hyperbolische genannt. Alle elliptischen Zahlen (und ebenso die hyperbolischen für sich) können wieder so geordnet werden, dafs ihre Gesamtheit eine einzige Reihe bildet.

Levi-Civitá zeigt nun, dafs man auf die neuen Arten von Zahlen die Addition, Subtraktion und Multiplikation anwenden darf, ohne dafs die für die reellen endlichen Zahlen geltenden Gesetze eine Änderung erleiden. So kann man mehrere Punktmengen, die elliptischen Zahlen entsprechen, durch Operationen, welche ganz den Charakter der ganzen rationalen Funktionen haben, zu einer neuen Punktmenge vereinigen, welche wieder durch eine elliptische Zahl dargestellt wird. Dasselbe gilt für transcendente Funktionen, welche überall im Endlichen den Charakter ganzer Funktionen besitzen.

5. Ehe die Veroneseschen Zahlen als berechtigt anerkannt werden können, bedürfen sie jedenfalls einer wirklichen Begründung, welche bisher unseres Erachtens noch durchaus fehlt. Im Gegenteil unterliegt ihre Theorie bisher sehr schweren Bedenken, von denen wir im folgenden wenigstens einige anführen möchten.

Dem von Veronese ausgesprochenen Gedanken, dafs die Cantorschen Zahlen sich vom Standpunkt der Arithmetik, seine eigenen vom geometrischen Standpunkte aus unmittelbar ergeben (si presentano spontaneamente), vermag ich nicht zuzustimmen. Vielmehr hat uns der vorangehende Paragraph gelehrt, dafs auch die Geometrie zunächst und in voller Strenge auf die Cantorschen

Zahlen führt. Überhaupt mufs eine genügend begründete Theorie des Transfiniten auf beiden Wegen gewonnen werden können. Dafs dies für die Cantorsche Theorie gilt, haben die beiden vorangehenden Paragraphen gezeigt. So lange man nicht von der Gesamtheit der natürlichen (ganzen positiven) Zahlen aus zu der Veroneseschen Theorie gelangt, fehlt ihr eine wesentliche Stütze.

Jedenfalls dürfen aber die beiden Theorieen nicht zu entgegengesetzten Folgerungen führen. So versichert Cantor, dafs die aktual unendlich kleinen Gröfsen an einem innern Widerspruch leiden; Veronese dagegen hält sie für vollauf berechtigt. Wie bereits bemerkt, hat Cantor den Beweis für seine Behauptung noch nicht veröffentlicht; Veronese glaubt, dafs dabei das Aktual-Unendlichkleine durch ein Postulat ausgeschlossen sei. Ohne auf diese Frage einzugehen, müssen wir doch zugestehen, dafs sich jede beliebige Mächtigkeit durch die Cantorschen Zahlen darstellen läfst; somit müfste es auch möglich sein, die Veronesesche Zahl ∞_1 durch die Cantorschen Zahlen auszudrücken, was Veronese selbst als ausgeschlossen betrachtet.

6. Der charakteristische Unterschied der Cantorschen und der Veroneseschen Zahlen ist darin zu erblicken, dafs im einen Falle auf jede »geordnete Gruppe« eine zweite unmittelbar folgt und eine andere ihr unmittelbar vorangeht, während im Veroneseschen System zwischen irgend zwei derartigen Gruppen unendlich viele Gruppen derselben Art liegen. Dafs die erste Annahme zulässig ist, kann streng begründet werden (§ 11); Veronese glaubt seine Theorie genügend zu erweisen, wenn er zeigt, dafs seine Zahlen sich in eine Reihe bringen lassen, die folgenden Bedingungen genügt:

a) von zwei ungleichen Zahlen ist stets eine die gröfsere (mit anderen Worten: eine folgt auf die andere);

b) wenn von den drei Zahlen a, b, c die Zahl b auf a und c auf b folgt, so folgt auch c auf a.

Aber diese Eigenschaft genügt nicht, um nachzuweisen, dafs die dargestellten Segmente einem eindimensionalen Gebilde angehören; denn sie kommt auch Gebilden von beliebig vielen Dimensionen zu. Ist z. B. in einem n-dimensionalen Raume jedem Punkte ein einziges Wertsystem $(x_1 \; . \; . \; . \; x_n)$ zugeordnet und entspricht umgekehrt jedem Wertsystem ein einziger Punkt, so setze man fest, daſs für $y_n > x_n$ jeder Punkt $(y_1 \ldots y_n)$ auf den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ folgen soll; für $y_n = x_n$ soll der Punkt $(y_1 \ldots y_{n-1}, y_n)$ eine spätere Rangordnung erhalten, als $(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n)$, wenn $y_{n-1} > x_{n-1}$ ist. In gleicher Weise fahre man fort, bis man zu Punkten gelangt, für welche die Koordinaten $x_2 = y_2 \ldots x_n = y_n$ gleich sind, und nur die Koordinate x_1 ungleiche Werte besitzt, und die man nach der Gröſse von x_1 ordnet. Eine derartige Zuordnung, die, wie wir beiläufig bemerken, in den Arbeiten des Hrn. Cantor eine wichtige Rolle spielt, ist somit keineswegs für die eindimensionalen Gebilde charakteristisch.

Daran ändert sich auch nichts, wenn für die neuen Zahlen, wie Levi-Cività für seine Zahlzeichen nachweist, teilweise wenigstens die Gesetze der gebräuchlichen Arithmetik gelten. Denn die gewöhnlichen komplexen Zahlen lassen sich erstens in eine Reihe von der oben bezeichneten Art bringen, und zweitens befolgen sie vollständig dieselben Rechnungsregeln wie die gewöhnlichen Zahlen; dennoch hat bisher niemand daraus schlieſsen wollen, daſs sie eine eindimensionale stetige Mannigfaltigkeit bilden.

7. In der Veroneseschen Theorie wird der Streifen A, der von zwei Parallelen in einer euklidischen Ebene eingeschlossen ist, so auf eine Gerade g abgebildet, daſs

a) jedem Punkte des einen Gebildes ein einziger Punkt des andern entspricht; daſs

b) jedesmal für alle Punkte des Streifens, die auf einer zu den Grenzen parallelen Geraden a liegen, die Bildpunkte einer einzigen Strecke a′ angehören, und daſs,

c) wenn a, b, c irgend drei solche Gerade des Streifens sind und b zwischen a und c liegt, auch die Bildstrecke b′ zwischen den Strecken a′ und c′ liegt, welche den Geraden a und c entsprechen.

Hierbei verschlägt es nichts, daſs der Streifen A und die Gerade g unendlich sind; denn der Streifen kann leicht auf ein Rechteck, die Gerade auf eine endliche Strecke eindeutig und stetig bezogen werden. Nun ist bekannt, daſs man ein Rechteck eindeutig auf eine Strecke abbilden kann, wofern man von der Stetigkeit absieht (vgl. B. 1. S. 168, 169). Umgekehrt ist erwiesen, daſs eine stetige eindeutige Abbildung nur bei gleicher

Zahl von Dimensionen möglich ist. Dabei wird aber verlangt, dafs sämtlichen Punkten, die im Bereiche irgend eines Punktes des Rechtecks liegen, solche Punkte zugeordnet sind, die eine einzige Strecke anfüllen.

Die hier verlangte Abbildung nimmt eine Mittelstellung ein; sie erfolgt einmal nicht so sprungweise wie die zuerst erwähnte Abbildung, und verlangt andererseits nicht, dafs alle einem zusammenhangenden Flächenteile angehörenden Punkte auf eine einzige Strecke abgebildet werden. Wenn nun auch bisher die Unmöglichkeit einer derartigen Abbildung nicht erwiesen ist, so genügt das keineswegs. Solange nicht gezeigt worden ist, dafs eine stetige Folge von geraden Linien zu einem einzigen eindimensionalen Gebilde vereinigt werden kann, fehlt die Grundlage für die vierte Veronesesche Hypothese und damit auch für alle folgenden. Man darf also nicht, wie Veronese will, seine Zahlen zur Begründung der angegebenen Abbildung heranziehen, da vorher diese Zahlen als berechtigt erwiesen sein müssen und dieser Nachweis nur vermittelst des bezeichneten Satzes geführt werden kann.

8. Veronese glaubt die Stetigkeit durch seine sechste und achte Hypothese begründen zu können. Ich will die Bedenken, welche ich gegen diese beiden Hypothesen hege, nicht darlegen, auch meine Ansicht nicht näher begründen, dafs sie keineswegs genügen, um das Gebilde zu einem stetigen zu machen. Ich begnüge mich mit folgender Bemerkung: Soll die Grundform eine stetige eindimensionale Mannigfaltigkeit bilden, so müssen die in ihr enthaltenen Gruppen zu einem Ganzen vereinigt sein. Jede Gruppe verläuft unbegrenzt, ohne einen festen Anfangs- und Endpunkt zu besitzen; sie soll mit keiner andern Gruppe einen Punkt gemeinsam haben; dennoch sollen die einzelnen Teile des Ganzen im Zusammenhang stehen. Wie das möglich sein soll, ist für mich unfafsbar. Betrachten wir z. B. die Bewegung (Veränderung) eines Punktes auf einer Geraden (in der Grundform). Der bewegte Punkt gehört stets einem einzigen Gebiete an, geht aber von einem Gebiete zum andern über. Letzteres ist nur möglich, wenn der Punkt beim Übergange entweder keinem derartigen Gebiete oder beiden zugleich angehört. Beide Möglichkeiten werden in dieser Theorie ausgeschlossen; somit sind die einzelnen Bestandteile nicht zu einer stetigen Mannigfaltigkeit vereinigt.

9. Um dies noch deutlicher einzusehen, bringen wir an der Darstellung, welche Veronese (S. 166 der italienischen, S. 184 der deutschen Ausgabe) von seinen Zahlen giebt, eine kleine Änderung an. (Dafs dabei die unendlich kleinen Segmente nicht vorkommen, ist belanglos.)

Wir gehen von einer horizontalen geraden Linie a aus und ordnen jeder beliebigen reellen, rationalen oder irrationalen Zahl einen einzigen auf ihr gelegenen Punkt in der bekannten Weise zu. Durch ihre rationalen Punkte lege man eine vertikale und durch jeden ihrer irrationalen Punkte eine horizontale Gerade, und zwar jedesmal so, dafs alle diese Geraden mit a rechte Winkel bilden. Jetzt betrachten wir die Gesamtheit der Punkte, die auf den so gezogenen Geraden liegen. In jeder vertikalen Geraden lasse man die höher gelegenen Punkte auf die niedriger liegenden folgen, und in jeder horizontalen Geraden soll von zwei Punkten derjenige als der spätere gelten, der rechts von dem andern liegt. Wenn endlich zwei Punkte P und Q verschiedenen Geraden des Systems angehören, so soll Q später zu setzen sein als P, wenn dem Punkte, den die durch Q gelegte Gerade des Systems mit a gemein hat, eine gröfsere Zahl zugeordnet ist als dem Schnittpunkt von a mit der durch P gehenden Geraden. Hierdurch sind alle Punkte des Systems in eine feste Ordnung gebracht; zudem sind alle endlichen Segmente stetige Gebilde; aber dem Ganzen wird niemand Stetigkeit beilegen, weil ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Geraden nicht besteht und nicht herbeigeführt werden kann.

§ 13.

Rückblick.

Die Kongruenzsätze bilden, wie wir gesehen haben, wohl das wichtigste Hilfsmittel für Euklid, um seine Lehrsätze zu beweisen; auch sonstig gebrauchen die Alten die Bewegung recht häufig in der Geometrie, namentlich wenn es sich um die Ausführung von Konstruktionen handelt. Wenn ihnen wirklich, wie man vielleicht aus anderen Thatsachen schliefsen möchte, darum zu thun war, die Bewegung aus der Geometrie zu verbannen, so ist ihnen das keineswegs gelungen. In neuerer Zeit hat kein geringerer als Riemann den Versuch gemacht, die Geometrie einzig auf die Maſsverhältnisse der Linien, also auf den bloſsen Gröſsenbegriff, zu stützen; er hat damit allerdings eine sehr interessante analytische Theorie begründet, die auch für die Geometrie von hoher Bedeutung ist; aber es ist ihm keineswegs gelungen, hierdurch eine Grundlage für die Geometrie zu schaffen. Nehmen wir zu diesen Thatsachen die weitere hinzu, daſs sich die Messung der krummen Linien, der Flächen und Raumteile unter Anwendung der Kongruenzsätze auf die Messung der geraden Strecke zurückführen läſst, so dürfen wir wohl den Schluſs ziehen, daſs es gestattet ist, die Bewegung neben der im dritten Abschnitt als notwendig erkannten Teilung für den Aufbau der Geometrie zu benutzen, also Teilung und Bewegung zu den Grundbegriffen dieser Wissenschaft zu rechnen und mit ihrer Hilfe die weiteren Begriffe herzuleiten.

Wohl wendet man dagegen ein: Eine ganz andere Wissenschaft beschäftigt sich mit der Bewegung; es ist aber notwendig, jeder einzelnen Wissenschaft ihre eigene Sphäre zu belassen. Aber der Unterschied der Geometrie von der Mechanik ist schon dadurch vollständig charakterisiert, daſs die Bewegung in der letzteren Wissenschaft Selbstzweck, in der ersteren nur Hilfsmittel ist. Umgekehrt kann man fragen: Welches Recht hat die Mechanik, bei der Untersuchung der Bewegung die geometrischen Sätze zu benutzen, wenn die Bewegung der Geometrie ganz fremd ist?

Zuweilen wird auch die Behauptung aufgestellt: Die Geometrie hat es mit dem Raume, nicht mit den darin enthaltenen Körpern zu thun; der Raum kann nicht bewegt werden; folglich gehört auch die Bewegung der Geometrie nicht an. Darauf ist zu antworten: Wenn der Raum begrifflich einen Körper, der ihn deckt oder doch decken kann, nicht zu entbehren vermag, so muſs für die Untersuchung des Raumes der Körper naturgemäſs mit hinzugenommen werden. Wenn man auch zugeben kann, daſs es die Geometrie nur mit dem Raume zu thun hat, so muſs man doch zum mindesten einräumen, daſs die Geometrie die Aufgabe hat, verschiedene Raumteile und verschiedene Grenzgebilde mit einander zu vergleichen. Der unbewegliche Raum bietet kein Mittel, diese Vergleichung auszuführen; es muſs also ein Etwas vorhanden sein, durch welches die Vergleichung vermittelt wird. Dazu eignet sich am besten der Körper, welcher bewegt werden kann und bei der Bewegung bald den einen und bald den anderen Raumteil deckt.

Hiernach brauchen wir kein Wort über den Einwand zu sagen, die Geometrie beschäftige sich mit dem leeren Raume oder denke sich wenigstens den Raum als leer. Gewifs fragt sie nicht im geringsten nach dem Stoffe, aus dem die Körper bestehen; auch sieht sie von den wirklich vorhandenen Körpern ab und läfst sich durch ihr Vorhandensein und die von ihnen thatsächlich ausgeführten Bewegungen in ihren Konstruktionen keineswegs stören; aber daraus folgt doch noch nicht, dafs der leere Raum das Objekt ihrer Untersuchung sei, oder dafs es ihr nicht gestattet sei, Körper im Raume zu denken und mit ihrer Hilfe die Eigenschaften des Raumes zu untersuchen.

In vielen Fällen wird die Kongruenz benutzt, um Gröfsenbeziehungen herzuleiten. Bei Euklid und in den neueren Lehrbüchern folgert man aus der Kongruenz zweier Dreiecke sehr oft die Gleichheit zweier Strecken; diese dient dazu, um vermittelst der Kongruenz anderer Dreiecke etwa die Gleichheit zweier Winkel herzuleiten u. dergl. Da könnte es scheinen, als ob die Kongruenz nur ein Mittel wäre, gewisse Gröfsenbeziehungen zu beweisen. Indessen geht die Geometrie weiter, indem sie bei Gebilden, die in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen, unterscheidet, ob sie mit einander zur Deckung oder nur gegen eine Ebene in symmetrische Lage gebracht werden können. Legendre nennt Raumgebilde gleich, (wofür die deutschen Mathematiker lieber kongruent sagen,) wenn sie sich zur Deckung bringen lassen; er unterscheidet davon aber die symmetrische Gleichheit, welche statthat, wenn entsprechende Strecken und Winkel jedesmal gleich sind, die homologen Grenzgebilde aber in entgegengesetzter Weise auf einander folgen. Eine derartige Unterscheidung wäre in der Geometrie nicht gestattet, wenn sie es nur mit Gröfsenbeziehungen zu thun hätte.

»Das Messen besteht«, wie Riemann sagt, »in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Gröfsen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Gröfse als Mafsstab für die andere fortzutragen. Fehlt dieses, so kann man zwei Gröfsen nur vergleichen, wenn die eine ein Teil der anderen ist, und auch dann nur das Mehr oder Minder, nicht das Wieviel entscheiden.« Nun können die Raumteile selbst nicht bewegt werden; bei allen wirklichen Vergleichungen des Raumes gebraucht man den festen Körper; es ist also wohl am naturgemäfsesten, dasselbe Hilfsmittel auch für die Wissenschaft zuzulassen.*)

Die Bewegung, welche die Geometrie benutzt, ist aber nicht etwa die, welche ein luftförmiger oder flüssiger Körper ausführt, sondern nur die Bewegung eines festen Körpers liefert diejenige Vergleichung der Raumteile, welche hier gefordert wird. Somit sind wir jedenfalls berechtigt, die Bewegung fester Körper unter die Grundbegriffe der Geometrie aufzunehmen. Wir sind hierzu sogar so lange verpflichtet, bis eine andere Grundlage von gleicher Einfachheit und Natürlichkeit aufgestellt ist.

Aber eine andere Frage ist es, ob die Teilung und Bewegung für den Aufbau der Geometrie genügen. Wir haben oben gezeigt, dafs für gewisse Untersuchungen das Princip der Stetigkeit nicht entbehrt werden kann. Es würde also versucht werden müssen, dasselbe mit der Teilung und Bewegung in organischen Zusammenhang zu bringen. Wenn dies auch gelingt, so bleibt immer noch eine sehr schwierige Aufgabe zu erledigen, nämlich die Messung der Raumgebilde. Zwar lassen sich alle Messungen ausführen, sobald man die Mafszahlen für die geraden Strecken bestimmen kann, wie denn überhaupt die Meinung des Apollonius, dafs die Gröfsensätze auf Lagenbeziehungen zurückgeführt werden können, viel Wahres enthält. Auch darf man die Bedeutung der Gröfsensätze nicht nach der Anzahl der Stellen ermessen wollen, an denen sie bei Euklid gebraucht werden; dann würde man ihre Wichtigkeit weit überschätzen. Aber die Messung selbst gehört doch zweifellos der Geometrie an, und wenn auch im Grunde nur die der geraden Linie übrig bleibt, so bietet diese vorläufig noch unübersteigliche Schwierigkeiten.

Von den Alten wird stets ein Satz angewandt, der von Archimedes zuerst in voller Klarheit ausgesprochen ist und deshalb

---

*) Selbst die blofse Abschätzung, welche doch nur ungenaue Resultate liefert, beruht auf der Bewegung, welche das Auge ausführen mufs, um zwei Punkte nach einander zu fixieren. Die Fähigkeit, auf diese Weise etwas zu erreichen, wird aber erst durch Übung gewonnen, indem das Resultat der wirklich ausgeführten Messung mit der entsprechenden Bewegung des Auges oft genug verglichen wird.

nach dem Vorschlage von Stolz vielfach das Archimedische Princip genannt wird. Aber die Berechtigung dieses Princips ist fraglich geworden. So kann man, wie an einer anderen Stelle unseres Buches bewiesen wird, den euklidischen Raum so über das Unendlichferne ausgedehnt denken, dafs ein idealer Teil hinzutritt, der mit dem reellen Teile in allen Eigenschaften übereinstimmt und durch das Unendlichferne mit ihm zusammenhängt. Dann besteht jede gerade Linie aus zwei Teilen, welche durch zwei unendlich ferne Punkte mit einander verbunden sind. Vergleicht man ein unendlich grofses Segment dieser geraden Linie, d. h. einen Teil, von dem der eine Endpunkt dem reellen, der andere dem idealen Bereiche angehört, mit einem endlichen Segment, dessen beide Endpunkte im reellen Bereiche liegen, so wird jedes Vielfache des zweiten Segmentes kleiner sein als das erste. Überhaupt zeigt die Theorie der transfiniten Zahlen, dafs das Archimedische Axiom in der Form, in der es zunächst ausgesprochen wird, keine notwendige Eigenschaft der Zahlgröfsen darstellt. Aber das ist von geringerer Bedeutung; für die Geometrie handelt es sich vor allem darum, ob die Folgerungen, welche für die Messung aus dem Axiom gezogen werden, berechtigt sind oder nicht. Dies kommt darauf hinaus, ob das Gebiet der natürlichen Zahlen nur auf die Weise ins Transfinite erweitert werden kann, die wir G. Cantor verdanken, oder ob die Veroneseschen Zahlen ebenfalls berechtigt sind.

Der Unterschied der beiden Systeme läfst sich am leichtesten in folgender Weise angeben. Wir denken uns allen positiven und negativen ganzen Zahlen der Reihe nach Punkte eines eindimensionalen Gebildes zugeordnet und setzen voraus, dafs dadurch das Gebilde nicht erschöpft ist, so dafs es noch Punkte giebt, die weder zu den angegebenen gehören noch zwischen je zweien unter ihnen liegen. Dann läfst sich in einem anderen Teile des Gebildes eine ähnliche Zuordnung ausführen. Dadurch werden auf dem Gebilde gewisse Bereiche erhalten, von denen jeder eine unendliche Reihe von Punkten enthält, die der Gesamtheit der positiven und negativen ganzen Zahlen entsprechen. Nun ist es, wie wir bewiesen haben, gestattet anzunehmen, dafs jeder derartige Bereich auf einen gleichen Bereich unmittelbar folgt und einem andern unmittelbar vorangeht, wobei wir voraussetzen müssen, dafs je zwei zusammenstofsende Bereiche in einem gemeinsamen Endpunkte zusammenhangen. Die auf diese Weise begründeten Zahlen sind mit den Cantorschen identisch. Es fragt sich aber, ob es auch gestattet ist, vorauszusetzen, dafs zwischen je zwei solche Bereiche jedesmal unendlich viele Bereiche derselben Art eingeschoben werden können, so dafs es kein unmittelbar folgendes und kein unmittelbar vorangehendes giebt. Diese Voraussetzung liegt den Veroneseschen Zahlen zu Grunde. So grofse Bedenken sich auch dieser Theorie entgegenstellen, konnte doch ihre Unzulänglichkeit nicht derartig bewiesen werden, dafs ein abschliefsendes Urteil möglich ist. Wir sehen also: Um über die Messung der geraden Strecke ins reine zu kommen, sind weitgehende Untersuchungen anzustellen, indem sogar die Theorie der transfiniten Zahlen herangezogen werden mufs; alles, was in dieser Hinsicht bisher geleistet ist, genügt noch nicht, um volle Klarheit zu schaffen; nachdem aber die Frage einmal bis zu dem jetzt erreichten Punkte gefördert ist, kann die endgültige Entscheidung nicht mehr lange auf sich warten lassen.

Zum Schlufs dürfen wir wohl auf die Schwierigkeiten hinweisen, welche schon die Beantwortung der Frage bietet, welche Stelle den auf die Messung bezüglichen Untersuchungen im System anzuweisen ist. Setzt man sie in den Anfang, ehe man etwa die gerade Linie eingeführt hat, so bekommt die ganze Darlegung den Charakter des Willkürlichen; verschiebt man sie an eine spätere Stelle, so beraubt man sich aller Vorteile, welche die analytische Behandlung ihrer Natur nach bietet.

Sechster Abschnitt.

Abschlufs der projektiven Geometrie.

§ 1.

Die Staudt-Kleinschen Voraussetzungen.

Wir haben uns zwar schon im zweiten Abschnitt (B. 1. S. 97—166) mit der projektiven Geometrie beschäftigt; aber bei dem Charakter, den wir dem ersten Bande glaubten erhalten zu müssen, konnte manche Frage, welche diesen Zweig der Geometrie betrifft und für die Grundlagen von Bedeutung ist, dort nicht zum Abschlufs gebracht werden. Deshalb scheint es geboten, hier nochmals auf die projektive Geometrie zurückzukommen.[10])

1. An erster Stelle wollen wir untersuchen, ob es angebracht ist, von vornherein den Raum als Ganzes der Betrachtung zu Grunde zu legen, oder ob man besser daran thut, sich anfangs nur auf einen endlichen Teil des Raumes zu beschränken. Viele ziehen den ersten Weg vor; sie nehmen dann an, dafs zwei beliebige Ebenen eine Gerade gemeinschaftlich haben, und dafs zwei Gerade derselben Ebene sich jedesmal in einem Punkte schneiden. Von anderer Seite aber betrachtet man anfangs einen fest gewählten Bereich und setzt voraus, dafs hierin zwei Ebenen höchstens eine Gerade, eine Gerade und eine Ebene höchstens einen Punkt gemeinschaftlich haben, wofern die Gerade nicht in die Ebene hineinfällt. Wir wollen die beiden Methoden mit einander vergleichen.

Zunächst behaupte ich, dafs eine Raumform alle projektiven Eigenschaften auch dann besitzen kann, wenn die Gerade mit jeder sie nicht enthaltenden Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat. Um das einzusehen, lege man der Untersuchung die früher (II § 6, B. 1. S. 124—127) eingeführten Koordinaten x, y, z zu Grunde und bestimme vier Gröfsen x_0, x_1, x_2, x_3 durch die Forderungen:

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0},\ z = \frac{x_3}{x_0},\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Nimmt man jetzt an, den Wertsystemen (x_0, x_1, x_2, x_3) und $(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$ entspreche regelmäfsig derselbe Punkt, so gelten folgende Gesetze: Durch zwei Punkte geht jedesmal eine Gerade; durch eine Gerade und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt läfst sich stets eine, und zwar eine einzige Ebene legen; zwei beliebige Ebenen schneiden sich in einer Geraden, drei nicht durch eine Gerade hindurchgehende Ebenen schneiden sich in einem Punkte. Aber man kann mit gleichem Rechte annehmen, dafs die beiden Wertsysteme (x_0, x_1, x_2, x_3) und $(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$ verschiedene Punkte (Gegenpunkte) darstellen. Dann wird jede Gerade (und somit auch jede Ebene), die durch einen Punkt hindurchgeht, auch seinen Gegenpunkt enthalten, da die Gleichung $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ stets befriedigt wird, wenn man allen Koordinaten die entgegengesetzten Werte beilegt. Hiernach haben zwei Ebenen regelmäfsig eine einzige gerade Linie gemeinschaftlich, aber die Ebene wird von jeder Geraden, die nicht in ihr liegt, in zwei Punkten geschnitten; ebenso haben zwei in derselben Ebene liegende Gerade stets einen Punkt und seinen Gegenpunkt gemeinschaftlich. Dafs die beiden hier angegebenen Raumformen sehr nahe mit einander verwandt sind, bedarf keiner Begründung; sie stimmen sogar in allen ihren Eigenschaften vollständig überein, wofern man nur gewisse einfach begrenzte Bereiche, etwa das Innere eines Tetraeders betrachtet. Aber auch im übrigen ist die Ähnlichkeit der beiden Raumformen so grofs, dafs man gezwungen ist, auch die zweite als eine projektive zu bezeichnen.

2. Aus den projektiven Raumformen will man durch Hinzunahme weiterer Voraussetzungen diejenigen Raumformen gewinnen, die mit der Erfahrung vereinbar sind. Sehen wir selbst ganz von den Clifford-Kleinschen Raumformen ab, bei denen man durchaus gezwungen ist, zunächst die Eigenschaften für ein endliches Gebiet zu entwickeln, so müssen wir gestehen, dafs in

voller Allgemeinheit nur die Kleinsche Raumform (die Polarform des Riemannschen Raumes) den Forderungen genügt, dafs zwei beliebige Ebenen eine Gerade und zwei in einer Ebene liegende Gerade einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben. Im Riemannschen Raume wird jede Ebene von einer nicht in ihr enthaltenen Geraden in zwei Punkten getroffen. In der Euklidischen und der Lobatschewskyschen Geometrie fehlen Gebilde, die in der allgemeinen Projektivität als existierend vorausgesetzt werden, und können höchstens als »uneigentliche« Gebilde künstlich eingeführt werden; für diese Raumformen gilt demnach der Satz, dafs zwei Ebenen eine Gerade gemeinschaftlich haben, nicht mehr in voller Allgemeinheit. Wollen wir also den mit der Erfahrung übereinstimmenden Raumformen Projektivität beilegen, so geht es nicht an, die Voraussetzung zu machen, dafs zwei beliebige Ebenen eine Gerade, zwei beliebige in einer Ebene liegende Gerade einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Dazu kommt noch, dafs es, wie die Betrachtung der Clifford-Kleinschen Raumformen zeigt, am natürlichsten ist, die Gesetze erst für ein endliches Gebiet zu entwickeln und dann zu diesem Gebiete neue Gebiete, welche dieselben Eigenschaften besitzen, in unbegrenzter Folge hinzuzunehmen. Auch ist es eine durchaus naturgemäfse Aufgabe, zu erforschen, welche Möglichkeiten noch bestehen, wenn man die Voraussetzungen der Projektivität zunächst nur für ein endliches Gebiet macht; erst auf diesem Wege gelangt die Projektivität zu demselben Abschlufs, den wir im vierten Abschnitt der Metrik haben geben können.

3. Demnach sind wir gezwungen, von den beiden oben charakterisierten Methoden die zweite zu bevorzugen. Wir denken uns also einen einfach begrenzten Teil des Raumes gegeben; hierin setzen wir ein System von Flächen und Linien voraus, das folgenden Bedingungen genügt:

a) Die Schnittlinie von irgend zwei Flächen des Systems ist eine Linie des Systems und gehört jeder Fläche des Systems an, die zwei Punkte der Linie enthält.

b) Durch eine Linie des Systems und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt geht eine und zwar eine einzige Fläche des Systems.

Wir können diese Voraussetzungen auch wohl in folgender Form aussprechen:

Durch zwei Punkte des abgegrenzten Raumteiles geht jedesmal eine und zwar eine einzige Linie des Systems; durch drei Punkte, die nicht auf einer solchen Linie liegen, läfst sich jedesmal eine und zwar eine einzige Fläche des Systems legen.

Gleichwie wir bei diesen Definitionen bereits die Begriffe: Fläche, Linie und Punkt benutzt haben, müssen wir zu den aufgestellten Voraussetzungen das Princip der Stetigkeit hinzunehmen. Für die ersten Entwicklungen bedarf man indessen dies Princip nicht in seiner vollen Allgemeinheit; vielmehr genügt folgende Voraussetzung:

Jede in dem abgegrenzten Raume enthaltene Ebene zerlegt ihn in zwei Teile auf die Weise, dafs jede gerade Strecke, welche zwei in verschiedenen Teilen gelegene Punkte mit einander verbindet, die Ebene schneidet.

Daraus folgt für den angenommenen Raum unmittelbar der Satz:

Jede in einer Ebene enthaltene Gerade zerlegt sie so in zwei Teile, dafs jede gerade Strecke, welche einen Punkt des einen Teiles mit einem Punkte des andern verbindet, die gegebene Gerade in einem zwischen den beiden Punkten gelegenen Punkte trifft.

Unsere erste Aufgabe besteht jetzt darin, die einzelnen Annahmen eingehend zu prüfen, um uns über ihre Unabhängigkeit und ihre Tragweite Aufschlufs zu verschaffen.

4. Dafs es nicht möglich ist, die Projektivität durch Entwicklungen herzuleiten, die ganz auf ebene Gebiete beschränkt sind, hat bereits Klein aus analytischen Gesetzen gefolgert, die Beltrami für die kürzesten Linien auf krummen Flächen aufgestellt hat. Zu derselben Folgerung gelangt man auch durch eine einfache rein geometrische Betrachtung. In der That, wollten wir nur die Voraussetzung machen, dafs in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ein System von Linien gegeben sei, von denen durch je zwei Punkte nur eine einzige Linie hindurchgeht, so würde dadurch keine Beziehung zwischen den Linien des Systems bestimmt. Man lasse vom Punkte 1 aus beliebige Linien ausgehen, welche keinen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben.

Nachdem solche in beliebiger Anzahl gewählt sind und für eine weitere Linie ein zweiter Punkt bestimmt ist, bleibt für diese Linie noch immer ein gewisses Winkelfeld. Denkt man sich alle vom Punkte 1 ausgehenden Linien bestimmt, so sind die von einem zweiten Punkte 2 ausgehenden Linien bis auf die Linie (21) willkürlich und haben nur den beiden Bedingungen zu genügen, dafs sie unter einander keinen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben und dafs keine den von 1 ausgehenden Linien zweimal begegnet. Diese Willkür ändert sich bei Hinzunahme eines $(n+1)^{ten}$ Punktes nicht, nachdem für irgend eine endliche Zahl n von Punkten Gesetze angegeben sind, nach denen sich sämtliche, durch je einen dieser Punkte hindurchgehende Linien des Systems bestimmen lassen. Die oben angegebenen Forderungen sind also von einander unabhängig und lassen sich nicht auf eine geringere Zahl von Voraussetzungen zurückführen.

5. Man denke aber nicht, dafs die beiden obigen Voraussetzungen nur für die Geraden und Ebenen des Raumes gelten. Schon Klein hat darauf hingewiesen, dafs durch irgend eine stetige Umgestaltung des Raumes die Geraden und Ebenen in Gebilde übergehen, für welche die angegebenen Eigenschaften wenigstens so lange bestehen bleiben, als man einen gewissen Bereich nicht verläfst. Wir möchten an einem einfachen Beispiele zeigen, dafs die vorausgesetzten Eigenschaften gewissen Systemen ganz allgemein zukommen.

Zu dem Ende betrachten wir wieder den Hyperbel-Sinus, den wir bereits im ersten Abschnitt benutzt haben. Indem wir setzen:

$$(1)\ \mathrm{Sh}\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots$$

sehen wir, dafs zu jedem reellen Werte von u ein einziger reeller Wert von Shu gehört, und umgekehrt.

Jetzt sollen x, y, z Cartesische (recht- oder schiefwinklige) Koordinaten des euklidischen Raumes und α, β, γ drei von null verschiedene endliche konstante Gröfsen sein. Indem wir setzen:

$$(2)\ \xi = \alpha\,\mathrm{Sh}\,\frac{x}{\alpha},\ \eta = \beta\,\mathrm{Sh}\,\frac{y}{\beta},\ \zeta = \gamma\,\mathrm{Sh}\,\frac{z}{\gamma},$$

entspricht jedem Punkte ein einziges System von Werten (ξ, η, ζ). Durch die Gleichung:

$$(3)\quad a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$$

wird bei konstanten Werten von a, b, c, d eine Fläche dargestellt, welche im allgemeinen von einer Ebene verschieden ist und nur dann in eine solche übergeht, wenn zwei der Koefficienten a, b, c gleich null sind. Zwei Flächen:

$$(4)\quad \begin{aligned} a\xi + b\eta + c\zeta + d &= 0 \\ a'\xi + b'\eta + c'\zeta + d' &= 0 \end{aligned}$$

haben entweder keinen (endlichen) Punkt oder eine einzige Linie gemeinschaftlich. Wenn aber die Wertsysteme (ξ', η', ζ') und (ξ'', η'', ζ'') den beiden Gleichungen (4) genügen, so werden diese beiden Gleichungen auch für:

$$\xi = \xi' + \lambda(\xi'' - \xi'),\ \eta = \eta' + \lambda(\eta'' - \eta'),\ \zeta = \zeta' + \lambda(\zeta'' - \zeta')$$

bei beliebigem Werte von λ befriedigt. Soll umgekehrt die Fläche

$$(5)\quad A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

mit den beiden Flächen (4) die beiden Punkte (ξ', η', ζ') und (ξ'', η'', ζ'') gemeinschaftlich haben, so müssen die vier aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ A & B & C & D \end{Vmatrix}$$

gebildeten Determinanten verschwinden, da im andern Falle diese vier Determinanten sowohl den Werten $\xi' : (-\eta') : \zeta' : (-1)$ wie den Werten $\xi'' : (-\eta'') : \zeta'' : (-1)$ proportional sein müfsten. Demnach ist

$$A = \lambda a + \mu a',\ B = \lambda b + \mu b',\ C = \lambda c + \mu c',\ D = \lambda d + \mu d';$$

dann wird aber die Gleichung (5) für jedes Wertsystem erfüllt, welches den beiden Gleichungen (4) genügt, oder die letzte Fläche geht durch den Schnitt der beiden ersten hindurch. Nennen wir jede durch die Gleichung (3) dargestellte Fläche eine Fläche E und jede Schnittlinie zweier Flächen E eine Linie g, so geht durch irgend zwei Punkte des Raumes eine einzige Linie g und durch irgend drei Punkte, die nicht auf einer Linie g liegen, eine einzige Fläche E. Für das System dieser Linien und Flächen gilt also die projektive Geometrie.

Der angegebene Weg liefert uns bereits unendlich viele derartige Systeme; denn legen wir irgend ein anderes recht- oder schiefwinkliges Koordinatensystem zu Grunde oder ändern wir die Koefficienten α, β, γ, so erhalten wir stets ein anderes System von Flächen E und Linien g.

6. Für die ersten Sätze der projektiven Geometrie genügt das Princip der Stetigkeit in der Form, die wir am Schlufs von 3. angegeben haben. Wahrscheinlich wird man es aber bei weitergehenden Untersuchungen in seinem ganzen Umfange heranziehen müssen.

Aufserdem ist noch Folgendes zu beachten. Um überhaupt die Theorie der Doppelverhältnisse nach der Methode zum Abschlufs zu bringen, die in II § 3 gelehrt ist, mufs man Gewifsheit darüber erlangen, ob die angegebene Konstruktion beim Übergang zur Grenze auch jedem irrationalen Werte des Doppelverhältnisses einen einzigen Punkt zuweist, oder ob dadurch für einen irrationalen Wert die Lage des Punktes nur auf eine gewisse Strecke eingeschränkt wird.

Die Untersuchungen, welche zur Entscheidung dieser Frage führen, unterscheiden sich nicht von denen, welche in der metrischen Geometrie darüber entscheiden, ob man durch Teilung einer Strecke in hinreichend viele gleiche Teile eine beliebig kleine Strecke enthält oder ob der n^{te} Teil einer Strecke für jede noch so grofse Zahl n oberhalb einer gewissen Strecke bleibt. Die entsprechenden Entwicklungen des vorigen Abschnitts müssen daher auch hier herangezogen werden. Wir brauchen sie hier aber nicht zu wiederholen, nehmen vielmehr in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der früheren Untersuchung im folgenden an, dafs jedem Doppelverhältnis auch dann ein einziger Punkt entspricht, wenn dasselbe einen irrationalen Wert hat.

7. Nachdem so die Voraussetzungen, von denen wir im zweiten Abschnitt ausgegangen sind, eine sorgfältige Prüfung erhalten haben, können wir die Entwicklungen des zweiten Abschnitts, namentlich die §§ 2—6 (B. 1. S. 99—128) folgen lassen, natürlich unter fortwährender Beschränkung auf den zu Grunde gelegten Raumteil. Ich möchte jedoch auf einen Abschnitt aus der projektiven Geometrie, der dort nur beiläufig erwähnt ist, besonders aufmerksam machen, da er im folgenden vielfach angewandt werden mufs.

Das wichtigste Hilfsmittel, durch welches die synthetische Geometrie zu ihren Lehrsätzen gelangt, ist die Zuordnung von

Punkten, Geraden und Ebenen zu einander. Da die projektive Geometrie sich darauf aufbaut, dafs zwei Ebenen sich in einer Geraden, zwei Gerade derselben Ebene in einem Punkte schneiden, so mufs diejenige Zuordnung der Punkte eines Raumteiles zu denen eines zweiten als besonders einfach angesehen werden, bei der auch jeder Geraden wieder eine Gerade, jeder Ebene eine Ebene derartig entspricht, dafs ungleichartigen Elementen des einen, die in einander liegen, Elemente des andern zugeordnet werden, die ebenfalls in einander liegen. Eine solche Zuordnung (Verwandtschaft) nennen wir kollinear; wir stellen daher mit Staudt folgende Definition auf:

Zwei Raumteile Σ und Σ_1 sind kollinear verwandt, wenn jedem Punkte π von Σ ein Punkt π_1 von Σ_1 entspricht, jeder durch π gehenden Geraden oder Ebene von Σ aber eine durch π_1 gehende Gerade resp. Ebene von Σ_1 zugeordnet ist.

Da die harmonischen Gebilde sich durch blofses Schneiden von Ebenen und Geraden ergeben und die Doppelverhältnisse sich auf harmonische zurückführen, so bezieht diese Zuordnung jedesmal einstufige Grundgebilde projektivisch auf einander, d. h. so, dafs die Doppelverhältnisse sich nicht ändern. Sind also α, β, γ, δ vier Punkte einer Geraden, so entsprechen ihnen vier Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1 einer zweiten Geraden derartig, dafs die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ einander gleich sind.

Will man zwei Raumteile kollinear auf einander beziehen, so darf man fünf beliebigen Punkten des einen, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Punkte des andern als entsprechende zuweisen, von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen.

Um diese Verwandtschaft analytisch darzustellen, setzt man, wenn dem Punkte x der Punkt y zugeordnet werden soll, zwischen den Koordinaten homogene lineare Gleichungen fest von der Form:

$$y_\alpha = \sum_\varkappa a_{\alpha\varkappa} x_\varkappa, \qquad (\text{für } \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

wo die aus den Koefficienten gebildete Determinante nicht verschwindet. Diese Gleichungen lassen unmittelbar erkennen, dafs die oben angegebenen Gesetze gelten. Zudem ergiebt sich, dafs die Gesamtheit dieser Umwandlungen von 15 Konstanten abhängt, da die Gleichungen 16 Koefficienten enthalten und es nur auf ihre Verhältnisse ankommt.

In vielen Fällen ist es angebracht, auf die Ergebnisse von Transformationen die der Bewegung entsprechende Terminologie anzuwenden, namentlich in dem Falle, dafs man die Koefficienten von einer veränderlichen Gröfse t in der Weise abhängig macht, dafs für $t = 0$ jeder Koefficient $a_{\iota\iota}$ gleich eins und jeder Koefficient $a_{\iota\varkappa}$ für ungleiche Marken ι, $\varkappa$ gleich null wird.

§ 2.

Die idealen Gebilde.

1. »Uneigentliche« oder »ideale« Gebilde sind selbst der elementaren Behandlung der Geometrie nicht ganz fremd. Will man auch nur die einfachsten Sätze über Projektivität für die euklidische Geometrie aussprechen, so ist es überaus lästig, stets zwischen schneidenden und parallelen Ebenen (bezw. Geraden) unterscheiden zu müssen. Um eine einheitliche Ausdrucksweise zu erhalten, macht man die Fiktion, zwei parallele Gerade hätten einen Punkt gemein. Aus einem leicht erkennbaren Grunde nennt man den nicht existierenden, »uneigentlichen« oder »idealen« Punkt, den eine Gerade mit einer zu ihr parallelen Linie gemein haben soll, den »unendlich fernen« Punkt der Geraden. Dann mufs man festsetzen, dafs alle unter einander parallelen Geraden denselben unendlich fernen Punkt besitzen. Ebenso legt man zwei parallelen Ebenen eine gemeinsame ideale Gerade, die »unendlich ferne« Gerade der Ebenen bei. Diese Gerade mufs die unendlich fernen Punkte aller in den beiden Ebenen liegenden Geraden enthalten und allen zu ihnen parallelen Ebenen gemeinsam sein. Weiterhin sieht man sich genötigt festzusetzen, dafs alle unendlich fernen Punkte des Raumes in einer Ebene, der »unendlich fernen Ebene«, liegen. Natürlich darf man diesen Gebilden keine reale Existenz beilegen, sondern mufs sie nur als ein Mittel betrachten, eine einheitliche Ausdrucksweise zu schaffen.

2. Eine weit gröfsere Bedeutung besitzen die idealen Gebilde für die allgemeine Projektivität.[11]) Um ihre Einführung vorzubereiten, betrachten wir den Strahlenbündel, d. h. die Gesamtheit der Geraden und Ebenen, die durch einen festen Punkt, den

Scheitel oder Mittelpunkt des Bündels, hindurchgehen. Für einen solchen Bündel gelten zahlreiche Gesetze, bei denen wir ganz vom Scheitel absehen können. Ja, es empfiehlt sich vielfach, sich beim Ausspruch der Sätze auf einen Raumteil zu beschränken, dem der Scheitel nicht angehört. Indem wir das thun, stellen wir folgende Sätze auf:

a) Durch jeden Punkt geht eine, und zwar eine einzige Gerade des Bündels.

b) Je zwei Strahlen des Bündels liegen in einer seiner Ebenen.

c) Wenn zwei Ebenen des Bündels (in dem abgegrenzten Raumteile) einen Punkt gemein haben, so schneiden sie sich in einer dem Bündel angehörenden Geraden.

d) Durch jede dem Bündel nicht angehörende Gerade geht eine, und zwar eine einzige Ebene des Bündels.

e) Wenn vier in einer Ebene liegende Strahlen oder vier durch einen Strahl gehende Ebenen des Bündels eine Gerade treffen, so ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte von der Wahl der getroffenen geraden Linie unabhängig.

f) Gehen von einem Punkte vier harmonische Gerade aus, von denen drei einen Strahl des Bündels schneiden, während die vierte dem Strahlbündel angehört, so liegt auch der von irgend einem andern Punkte ausgehende Strahl des Bündels harmonisch zu den drei Geraden, welche von dem neuen Punkte aus nach den drei Schnittpunkten mit dem festen Strahl gezogen werden.

Diese Sätze gelten, wie bereits erwähnt wurde, für einen Raumteil, in welchem der Mittelpunkt des Strahlenbündels nicht liegt. Wir können daher die in dem abgegrenzten Raumteil enthaltenen Geraden und Ebenen des Bündels als Ersatz für den nicht darin liegenden Mittelpunkt betrachten. Aber bei der Herleitung dieser Sätze gebraucht man den Mittelpunkt; es fragt sich also, ob derselbe für den Beweis entbehrt werden kann; wenn das möglich ist, darf man von einem idealen Punkte sprechen, der durch ein gewisses System von Geraden und Ebenen ersetzt wird. Die folgende Untersuchung wird uns lehren, dafs die aufgeworfene Frage bejaht werden mufs; sie wird uns aber in ihrem weiteren Verlauf auch zu idealen Geraden und Ebenen führen.

3. Unter einem ebenen Strahlenbüschel verstehen wir zuvörderst die Gesamtheit der in einer Ebene enthaltenen und durch

einen festen Punkt gehenden Strahlen. Wir wollen diesen Begriff in einfacher und natürlicher Weise erweitern.

Zu dem Ende betrachten wir vier Ebenen, die durch dieselbe gerade Linie hindurchgehen. Diese vier Ebenen haben ein festes Doppelverhältnis, d. h. das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte, in denen eine beliebige Gerade die vier Ebenen trifft, hängt nur von den Ebenen, aber nicht von der schneidenden Geraden ab. Beschränkt man sich auf solche Gerade, die einer festgewählten Ebene angehören, so kann man die Ebenen durch ihre Schnittlinien mit der festen Ebene ersetzen; diese vier Geraden haben die Eigenschaft, dafs ihre Schnittpunkte mit jeder Transversalen in einem konstanten Doppelverhältnis stehen; wir dürfen daher von dem Doppelverhältnis der vier Geraden sprechen. Diese Eigenschaft ist davon unabhängig, ob die Achse der vier ersten Ebenen die durchschneidende Ebene trifft oder nicht. Wenn ein Schnittpunkt (in dem abgegrenzten Raumteile) vorhanden ist, so gehen auch die vier Schnittlinien durch diesen Punkt; die Geraden gehören dann einem Büschel an. Wir werden daher auch in dem Falle, wo ein solcher Schnittpunkt nicht vorhanden ist, die vier Geraden als einem Büschel angehörig betrachten.

Umgekehrt gilt auch der Satz:

Wenn vier Geraden einer Ebene ein festes Doppelverhältnis haben, so lassen sich durch sie vier Ebenen hindurchlegen, welche eine gerade Linie gemein haben.

Die vier in einer Ebene liegenden Geraden a, b, c, d mögen die Eigenschaft haben, dafs das Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ihrer vier Schnittpunkte α, β, γ, δ mit einer beliebigen Geraden von der Wahl dieser Geraden unabhängig ist; jetzt behaupte ich: Liegt die der Ebene nicht angehörende Gerade q mit den Geraden a und b je in einer Ebene, so kann man auch durch q und c, sowie durch q und d je eine Ebene legen.

Zum Beweise betrachte ich die vier Ebenen $(q\alpha)$, $(q\beta)$, $(q\gamma)$, $(q\delta)$, deren Doppelverhältnis gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ist. Durch δ lege man eine neue Gerade, welche die drei anderen Geraden bezw. in den Punkten α', β', γ' treffen möge. Nach unserer Annahme ist das Doppelverhältnis $(\alpha'\beta'\gamma'\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta)$; es ist dies auch das Doppelverhältnis der vier Ebenen, welche durch die Gerade q nach den vier Punkten α', β', γ', δ hin gelegt werden können.

Da die Ebenen (qα) und (qα'), sowie die Ebenen (qβ) und (qβ') zusammenfallen, so müssen wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse die Ebenen (qγ) und (qγ') identisch sein, oder die Geraden q und c liegen in einer Ebene. Ebenso erkennt man unter Hinzunahme einer Linie, welche durch γ geht und die Geraden a, b, d schneidet, dafs die Ebene (qδ) die Gerade d enthält.

Hieran schliefst sich folgender Satz:

Wenn drei Geraden einer Ebene die Eigenschaft haben, dafs sich durch jede von ihnen und eine weitere Gerade, die der Ebene der drei ersten Geraden nicht angehört, eine Ebene legen läfst, so liegt die Schnittlinie irgend zweier Ebenen, die durch zwei von ihnen gelegt werden, mit der dritten Geraden in einer Ebene.

Der Annahme nach liegen die Geraden a, b, c in einer Ebene; eine vierte Gerade q, die dieser Ebene nicht angehört, liegt sowohl mit a, als mit b, als auch mit c je in einer Ebene. Durch einen beliebigen Punkt ϱ des Raumes und je eine der drei Geraden a, b, c lege ich eine Ebene und will beweisen, dafs diese drei Ebenen dieselbe Gerade gemein haben. Zu dem Ende wähle ich in der Ebene (ab) einen Punkt δ der Art, dafs sich von ihm aus zwei gerade Linien ziehen lassen, welche die Geraden a, b, c schneiden. Das geschehe in den Punkten α, β, γ und α', β', γ', wo die Punkte α und α' in a, β und β' in b, γ und γ' in c liegen. Durch die Schnittlinie r der Ebenen (ϱa) und (ϱb) lege ich drei weitere Ebenen, von denen eine durch γ, eine zweite durch γ', die dritte durch δ geht. Da die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $(\alpha'\beta'\gamma'\delta)$ dem Doppelverhältnis der vier durch q gelegten Ebenen gleich sind, so haben auch die vier Ebenen (ra), (rb), (rγ), (rδ) dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Ebenen (ra), (rb), (rγ'), (rδ); die Ebenen (rγ) und (rγ') fallen also zusammen, oder die Geraden r und c liegen in einer Ebene.

Demnach stellen wir folgende Definition auf:

Drei Gerade einer Ebene gehören einem Strahlenbüschel an, wenn jede von ihnen mit derselben vierten, nicht in der Ebene enthaltenen Geraden in einer Ebene liegt.

Dann gelten folgende Sätze:

a) Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Gerade, die mit allen Geraden eines Strahlenbüschels in einer Ebene liegt.

b) Der Strahlenbüschel ist durch zwei beliebige seiner Strahlen bestimmt.

c) Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Strahl des Büschels; hat der Büschel keinen Mittelpunkt, so kann man durch jeden Punkt nur einen Strahl des Büschels legen.

d) Irgend vier Strahlen eines Büschels bestimmen auf allen hindurchgelegten Geraden gleiche Doppelverhältnisse.

4. Hiernach ist es nicht schwierig, ein Gebilde zu konstruieren, das vollständig der Gesamtheit der durch einen Punkt gelegten Geraden und Ebenen entspricht und das ebenfalls als Strahlenbündel bezeichnet werden soll. Wir gehen von zwei Geraden m und n aus, die in einer Ebene liegen, aber (wenigstens in dem abgegrenzten Raumteil) keinen Punkt gemein haben. Die vorige Nummer hat bereits gelehrt, wie wir von diesen Geraden aus zu einem Büschel von Strahlen gelangen; dieser Büschel soll dem durch die beiden Geraden bestimmten Bündel von Strahlen angehören. Um denjenigen Strahl zu finden, der durch einen nicht in der Ebene (mn) liegenden Punkt α geht, bestimmt man den Schnitt der Ebenen (αm) und (αn) und ordnet ihn dem Bündel zu. Hiernach geht durch jeden Punkt des Raumes ein Strahl des Bündels, und zwar ein einziger.

Wie wir bewiesen haben, liegt jeder der Ebene (mn) angehörende Strahl des Bündels mit jedem andern in einer Ebene. Hieraus folgt sofort, dafs jede Ebene, welche durch einen in der Ebene (mn) gelegenen Strahl des Bündels geht, einen Büschel von Strahlen enthält; somit enthält jede Ebene, deren Schnittlinie mit der Ebene (mn) dem Bündel angehört, alle diejenigen Strahlen des Bündels, die einen Punkt mit ihr gemein haben. Mit Hilfe dieses Satzes läfst sich leicht zeigen, dafs sich durch je zwei Strahlen des Bündels eine Ebene legen läfst.

Liegen nämlich die Strahlen a und b auf verschiedenen Seiten der Ebene (mn), so mufs die durch a und einen beliebigen Punkt von b gelegte Ebene die Ebene (mn) in einer Geraden p schneiden, die dem Bündel angehört. Da in dieser Ebene ein in der Ebene (mn) enthaltener Strahl des Bündels und ein Punk von b liegt, so mufs der Strahl b ganz in sie hineinfallen; diese Ebene enthält also die Geraden a und b.

Wenn aber die Strahlen a und b auf derselben Seite der

Ebene (mn) liegen, so bestimme man, was immer möglich ist, in der Ebene (mn) einen Strahl p des Bündels derartig, dafs p und b auf verschiedenen Seiten der Ebene (ma) liegen. Ist c die Schnittlinie der Ebenen (ma) und (bp), also selbst ein Strahl des Bündels, so haben die Strahlen b, c, p der Ebene (bp) die Eigenschaft, mit der Geraden m je in einer Ebene zu liegen. Da aber die Gerade a mit zweien unter ihnen, nämlich mit c und p, je in einer Ebene liegt, so mufs sie (nach 3.) auch einer durch die dritte Gerade b gelegten Ebene angehören.

Aus dem hiermit bewiesenen Satze folgt, dafs in jeder Ebene, welche einen Strahl des Bündels enthält, noch unendlich viele seiner Strahlen liegen und dafs alle diese Strahlen einen Büschel bilden. Indem wir demnach jede solche Ebene dem Bündel angehören lassen, folgt unmittelbar, dafs jedesmal die Schnittlinie zweier Ebenen des Bündels einer seiner Strahlen ist, und dafs durch jede dem Bündel nicht angehörende Gerade eine einzige Ebene des Bündels geht.

Da je zwei Strahlen des Bündels in einer seiner Ebenen liegen, kann man den Strahlenbündel durch zwei beliebige seiner Strahlen oder auch durch einen seiner Strahlen und eine seiner Ebenen bestimmen. Auch sind bereits die vier ersten für den Bündel in 2. aufgestellten Sätze bewiesen; der Satz e) folgt daraus, dafs alle in einer Ebene enthaltenen Strahlen des Bündels einen Büschel bilden. Der Satz f) hat folgenden Inhalt: Wenn der durch einen Punkt α gehende Strahl a des Bündels harmonisch liegt zu den drei Geraden, welche den Punkt α mit drei Punkten π, ϱ, σ eines Strahles p verbinden, so liegt auch der von irgend einem andern Punkte β ausgehende Strahl b harmonisch zu den drei von β nach π, ϱ, σ gezogenen Geraden. Zum Beweise legen wir durch die Gerade $\alpha\beta$ vier Ebenen, von denen die erste durch a (und damit auch durch b), die zweite durch π, die dritte durch ϱ und die vierte durch σ geht. Diese vier Ebenen liegen harmonisch; sie werden also auch durch die Ebene (bp) in vier harmonischen Geraden geschnitten.

5. Zwei verschiedene Strahlenbündel können höchstens einen Strahl gemein haben, da durch zwei Strahlen ein einziger Bündel bestimmt ist. Dagegen geht durch jeden Punkt des Raumes, der nicht in dem etwa vorhandenen gemeinsamen Strahle liegt, eine

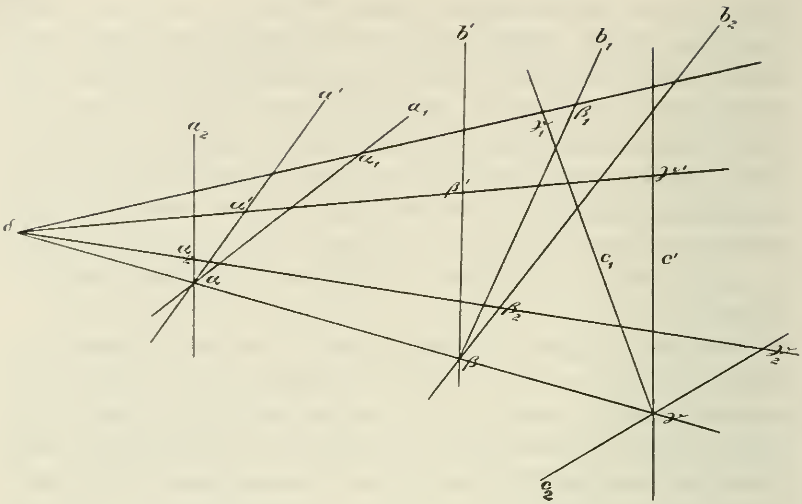
Ebene, die zu beiden Bündeln gehört. Denn legt man durch den Punkt den Strahl a_1 des ersten und den Strahl a_2 des zweiten Bündels, so ist die Ebene $(a_1 a_2)$ beiden Bündeln gemeinsam. Es ist dies offenbar die einzige, durch den Punkt gehende Ebene, die beiden Bündeln angehört. Wenn die Bündel einen Strahl gemein haben, so bilden die gemeinsamen Ebenen einen Büschel, dessen Achse dieser Strahl ist; wir werden daher auch in dem Falle, dafs die Bündel keinen gemeinsamen Strahl besitzen, die Gesamtheit der beiden Bündeln angehörenden Ebenen einen Ebenenbüschel nennen.

Aus zwei gegebenen Bündeln kann man neue Bündel in einfacher Weise herleiten. Zu dem Ende gehen wir von zwei Punkten α und β aus; durch α mögen die beiden Geraden a_1 und a_2, durch β die Geraden b_1 und b_2 so hindurchgehen, dafs a_1 und b_1 dem ersten, a_2 und b_2 dem zweiten Bündel angehören. Wenn jetzt der Punkt β nicht in der Ebene $(a_1 a_2)$ liegt, so möge irgend eine durch die Gerade $\alpha\beta$ gelegte Ebene die Ebene $(a_1 a_2)$ in einer Geraden a' und die Ebene $(b_1 b_2)$ in einer Geraden b' schneiden. Von dem Bündel, der die Geraden a' und b' enthält, wollen wir sagen, er sei aus den beiden ersten Bündeln hergeleitet, und die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Bündel wollen wir eine Bündelreihe nennen.

Diese Herleitung neuer Bündel kann nur dann als natürlich angesehen werden, wenn sie von der Wahl der Punkte α und β unabhängig ist. Um uns davon zu überzeugen, liefern wir den Beweis des folgenden Satzes:

Gehören die drei Strahlentripel (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) und (a', b', c') je einem Strahlenbündel an, gehen die Strahlen a_1, a_2, a' durch einen Punkt α, die Strahlen b_1, b_2, b' durch einen Punkt β, die Strahlen c_1, c_2, c' durch einen Punkt γ, liegen die drei Geraden a_1, a_2, a', sowie b_1, b_2, b' je in einer Ebene, so gehören auch die drei Geraden c_1, c_2 c' einer Ebene an.

Wir beweisen den Satz zunächst unter der Annahme, dafs die Punkte α, β, γ in gerader Linie liegen, und nehmen einen Punkt δ auf dieser Geraden hinzu, durch den sich eine Ebene legen läfst, welche die neun angeführen Strahlen schneidet. Bezeichnet man die Schnittpunkte mit α_1, α_2, α', β_1, β_2, β', γ_1, γ_2, γ' (wo α_1 auf der Geraden a_1 u. s. w. liegt), so sind die Doppel-



verhältnisse $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta) = (\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta) = (\alpha'\beta'\gamma'\delta)$ einander gleich da jedes gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ist. In der durch δ gelegten Ebene liegen die drei Geraden $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ und $\gamma_1\gamma_2$, und wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta)$ und $(\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta)$ gehören diese drei Geraden einem Büschel an. Dasselbe gilt für die drei Geraden $\alpha_1\alpha$, $\beta_1\beta'$ und $\gamma_1\gamma'$. Diese beiden Strahlenbüschel sind identisch, da sie zwei Geraden gemein haben; also müssen auch die beiden durch den Punkt γ_1 gehenden Strahlen zusammenfallen, oder der Punkt γ' liegt in der Ebene $\gamma_1\gamma_2$, die Gerade c' also in der Ebene $(c_1 c_2)$.

Ist aber γ ein beliebiger Punkt des Raumes, so kann man eine Gerade hindurchlegen, welche die beiden Ebenen $(a_1 a_2)$ und $(b_1 b_2)$ trifft; das geschehe in den Punkten μ und ν. Von μ mögen die Geraden m_1, m_2, m', von ν die Geraden n_1, n_2, n' derartig ausgehen, dafs die Geraden m_1 und n_1 dem ersten, m_2 und n_2 dem zweiten, m' und n' dem dritten Bündel angehören. Da der Punkt μ in der Ebene $(a_1 a_2)$ liegt und diese auch den Strahl a' enthält, so gehören der Ebene $(a_1 a_2)$ auch die Geraden m_1, m_2, m' an; ebenso enthält die Ebene $(b_1 b_2)$ auch die Geraden n_1, n_2, n'. Dafs jetzt die drei Geraden c_1, c_2, c' in einer Ebene liegen, folgt aus dem ersten Teile des Beweises, indem man die Punkte α und β durch μ und ν ersetzt.

6. Aus diesem Satze kann man zahlreiche Folgerungen ziehen.

a) Jeder Bündel, der einer durch zwei Bündel bestimmten Reihe angehört, ist bekannt, sobald einer seiner Strahlen gegeben ist; dieser Strahl ist aber nicht willkürlich, sondern kann nur noch in einer Ebene beliebig angenommen werden, sobald man einen Punkt kennt, durch den er hindurchgehen soll.

Gehen vom Punkte α die Strahlen a_1 und a_2 der beiden gegebenen Bündel aus, so ist durch einen Strahl a', der durch α in der Ebene $(a_1 a_2)$ gelegt wird, ein Bündel der Reihe bestimmt. Liegt nämlich der Punkt π nicht in der Ebene $(a_1 a_2)$ und sind p_1 und p_2 die hindurchgehenden Strahlen der ersten Bündel, so ist der durch π gehende Strahl des neuen Bündels der Schnitt der Ebenen $(p_1 p_2)$ und $(a'\pi)$.

b) Die Bündelreihe ist durch zwei beliebige ihrer Bündel bestimmt; zwei verschiedene Bündelreihen haben höchstens einen Bündel gemein.

Die Richtigkeit des ersten Teiles der Behauptung, aus dem der zweite Teil unmittelbar folgt, leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dafs die Konstruktion einen ebenen Strahlenbüschel benutzt.

c) Alle Bündel der Reihe haben die Ebenen eines Büschels gemein; umgekehrt gehören alle Bündel, die einen Ebenenbüschel gemein haben, einer Bündelreihe an.

Der erste Satz folgt unmittelbar aus dem in der vorigen Nummer bewiesenen Hilfssatze; der Beweis der Umkehrung ist derselbe wie der des Satzes a).

d) Vier Ebenen des Büschels haben ein festes Doppelverhältnis, d. h. das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Ebenen von einer sie durchsetzenden Geraden geschnitten werden, ist von der Wahl dieser Geraden unabhängig.

Eine Gerade treffe die vier Ebenen in den Punkten α, β, γ, δ, eine zweite in den Punkten α', β', γ', δ'. Es giebt stets eine Gerade, die einen Punkt des ersten mit einem Punkt des zweiten Quadrupels verbindet und die beiden andern Ebenen schneidet. So möge die Gerade $\alpha\delta'$ mit den beiden andern Ebenen die Punkte β_1 und γ_1 gemein haben. Dann gehören die Geraden $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ und $\delta\delta_1$ einem Bündel an, und ebenso die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta_1\beta'$, $\gamma_1\gamma'$. Demnach ist das Doppelverhältnis $(\alpha\beta_1\gamma_1\delta')$ sowohl gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$ wie gleich $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$.

e) Durch zwei beliebige Ebenen des Büschels ist der Ebenenbüschel und die Bündelreihe eindeutig bestimmt.

Um die durch einen gegebenen Punkt gehende Ebene des Büschels zu konstruieren, kann man den Satz d) benutzen. Man kann aber auch zuerst die Bündelreihe konstruieren; sind A und B die gegebenen Ebenen, a_1 und a_2 zwei in A gelegene, einander schneidende Gerade, so ist durch a_1 und die Ebene B, sowie durch a_2 und B je ein Bündel bestimmt. Nach 3. kann man die durch einen beliebigen Punkt γ gehenden Strahlen c_1 und c_2 dieser Bündel leicht finden; die Ebene $(c_1 c_2)$ gehört dem Büschel an.

f) Haben zwei demselben Bündel der Reihe angehörende Strahlen einen Punkt gemein, so geht durch diesen Punkt ein Strahl, der allen Bündeln der Reihe angehört und in dem sich alle Ebenen des Büschels schneiden.

Ist π der Schnittpunkt der Strahlen a' und b', so folgt unmittelbar, dafs alle Strahlen des Bündels $(a'b')$ durch π hindurchgehen. Derjenige Strahl irgend eines andern Bündels der Reihe, der den Punkt π enthält, gehört zwei Bündeln der Reihe an und ist infolge dessen allen ihren Bündeln gemeinsam.

g) Vier Bündel der Reihe haben ein festes Doppelverhältnis; d. h. das Doppelverhältnis der vier von demselben Punkte ausgehenden Strahlen ist von der Wahl des Punktes unabhängig; auch die vier Strahlen, welche die vier Bündel der Reihe mit einem beliebigen fünften Bündel gemein haben, stehen in demselben Dpppelverhältnis.

Gehen von zwei Punkten α und β je vier Strahlen a_1, a_2, a', a'' und b_1, b_2, b', b'' so aus, dafs die Strahlen a_1 und b_1 dem ersten, a_2 und b_2 dem zweiten, a' und b' dem dritten, a'' und b'' dem vierten Bündel angehören, so liegen die vier Strahlen des Punktes α in einer Ebene A und die vier Strahlen des Punktes β in einer Ebene B. Wenn diese Ebenen nicht zusammenfallen, so sind die Strahlen a_1, a_2, a', a'' die Schnittlinien von A und die Strahlen b_1, b_2, b', b'' die Schnittlinien von B mit denselben vier durch die Gerade $\alpha\beta$ gelegten Ebenen; demnach sind die Doppelverhältnisse gleich. Für den Fall, dafs die Ebenen A und B identisch sind, nehme man einen nicht in dieser Ebene gelegenen Punkt hinzu.

Sind noch c_1, c_2, c', c'' vier Strahlen eines der Reihe nicht angehörenden Bündels und liegen diese Geraden der Reihe nach in den vier gegebenen Bündeln, also auch in derselben Ebene C, so liegt der durch α gehende Strahl a_0 des neuen Bündels nicht in der Ebene A, aber mit jeder der vier Geraden c_1, c_2, c', c'' in einer Ebene. Demnach sind die Strahlen a_1, a_2, a', a'' die Schnittlinien von A und die Strahlen c_1, c_2, c', c'' die Schnittlinien von C mit vier durch die Gerade a_0 gelegten Ebenen; sie haben also dasselbe Doppelverhältnis.

Auch die weiteren Sätze über Doppelverhältnisse übertragen sich unmittelbar. So giebt es, nachdem drei Bündel einer Reihe gegeben sind, in der Reihe stets einen und zwar einen einzigen Bündel, von der Art, dafs die vier Bündel ein vorgeschriebenes Doppelverhältnis haben.

h) Liegen zwei Punkte α und β in derselben Ebene eines Büschels und gehen für drei Bündel der zugehörigen Reihe durch α die Strahlen a_1, a_2, a_3, durch β die Strahlen b_1, b_2, b_3, so sind die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta, a_1, a_2, a_3)$ und $(\beta\alpha, b_1, b_2, b_3)$ einander gleich. Wenn umgekehrt drei Bündel eine Ebene gemein haben und für zwei in dieser Ebene gelegene Punkte die angegebenen Doppelverhältnisse gleich sind, so gehören die Bündel einer Reihe an.

Für den Beweis des ersten Teiles wende man den Satz g) auf die drei gegebenen und den durch die Gerade $\alpha\beta$ bestimmten Bündel der Reihe an. Um die Umkehrung zu beweisen, konstruiere man in der durch die beiden ersten Bündel bestimmten Reihe denjenigen Bündel, der den Strahl a_3 enthält; da dieser Bündel nach dem ersten Teile des Satzes auch den Strahl b_3 enthält, ist er mit dem dritten gegebenen Bündel identisch.

7. Den Strahlenbündel bezeichnen wir entweder durch mehrere seiner Elemente, z. B. durch (ab), wenn a und b zwei seiner Strahlen sind, oder durch einen eingeklammerten griechischen Buchstaben. Diese Zeichen setzen wir mit anderen Zeichen zusammen; so soll $\alpha\,(\lambda)$ den durch den Punkt α gehenden Strahl des Bündels (λ) bezeichnen. Ebenso bedeutet $(\lambda)\,(\mu)$ die Bündelreihe, der die Bündel (λ) und (μ) angehören. Ähnliche weitere Bezeichnungen werden im Zusammenhang sofort verständlich sein, bedürfen also wohl keiner Erklärung.

Daſs der Strahlenbündel durch zwei seiner Strahlen oder auch durch einen Strahl und eine Ebene bestimmt ist, wurde bereits oben erwähnt. Demnach läſst sich auch jeder Strahl eines Bündels konstruieren, sobald drei seiner Ebenen gegeben sind, von denen mindestens zwei einander schneiden. Wenn aber drei Ebenen des Bündels bekannt sind, von denen keine zwei eine Schnittlinie besitzen, dürfte die Konstruktion Schwierigkeit machen, falls man nur die in den Nummern 3 und 4 angegebenen Eigenschaften des Strahlenbündels benutzen will; dagegen gestatten die Sätze über den Ebenenbüschel eine einfache Lösung der Aufgabe. Sollen die Ebenen A, B, C einem Strahlenbündel angehören, so muſs dieser Bündel alle Ebenen des durch die Ebenen A und B bestimmten Büschels enthalten. Man lege also durch einen Punkt π der Ebene C die zum Büschel (AB) gehörende Ebene D. Der durch die Schnittlinie der Ebenen C und D und die Ebene A bestimmte Bündel enthält offenbar auch die Ebene B, genügt also der Aufgabe. Daſs es aber keinen weitern Bündel giebt, der die drei Ebenen A, B, C enthält, bedarf keines Nachweises; es ist ja vorausgesetzt, daſs die Ebenen keinem Büschel angehören.

8. Drei Bündel, die nicht in einer Reihe liegen, können höchstens eine Ebene gemein haben, da die Bündel, welche einen Strahl oder zwei Ebenen gemeinschaftlich haben, einer Reihe angehören. Aus drei solchen Bündeln kann man unendlich viele weitere dadurch herleiten, daſs man jeden Bündel der aus zwei unter ihnen gebildeten Reihe mit dem dritten Bündel zu einer Reihe vereinigt. Die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Bündel nennen wir ein Bündelfeld. Bei der angegebenen Definition wird einer der gegebenen Bündel vor den beiden andern bevorzugt; wir wollen nachweisen, daſs die drei Bündel nicht nur unter einander, sondern auch mit drei beliebigen andern Bündeln des Feldes vertauscht werden können, wofern die letzteren nur nicht einer Reihe angehören. Zu dem Ende benutzen wir folgenden Satz:

Alle diejenigen Bündel eines Feldes, welche eine gegebene Ebene enthalten, bilden eine Bündelreihe.

Gegeben seien die Bündel (λ), (π), (ϱ). Aus den beiden letzten bilde man eine Reihe, vereinige jeden ihr angehörenden Bündel (σ) mit dem Bündel (λ) zu einer neuen Reihe und suche in jeder solchen Reihe denjenigen Bündel (σ'), der eine feste Ebene A enthält. Aus der Reihe (π) (ϱ) fügen wir einen vierten Bündel (τ) bei, der nur der folgenden Bedingung genügt: Auf einem seiner Strahlen giebt es zwei Punkte α und β von der Art, dafs die durch sie hindurchgehenden Strahlen des Bündels (λ) die Ebene A schneiden; das geschehe in den Punkten α' und β'. Wie (σ') denjenigen Bündel der Reihe (λ) (σ) darstellt, welcher die Ebene A enthält, so mögen auch die Bündel (π'), (ϱ'), (τ') die Ebene A enthalten und bez. den Reihen (λ) (π), (λ) (ϱ), (λ) (τ) angehören.

Das Doppelverhältnis der vier Bündel (π), (ϱ), (σ), (τ) ist gleich dem ihrer von α ausgehenden Strahlen oder auch gleich dem der vier durch α (λ) gelegten Ebenen, von denen jede einen dieser Strahlen enthält. Diese vier Ebenen schneiden aber die Ebene A in vier vom Punkte α' ausgehenden und je einem der vier Bündel (π'), (ϱ'), (σ'), (τ') angehörenden Strahlen. Dieselbe Erwägung kann man für die Punkte β und β' machen. Die vier vom Punkte α' ausgehenden Strahlen der Bündel (π'), (ϱ'), (σ'), (τ') haben daher dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden durch den Punkt β' gehenden Strahlen. Da der vierte dieser Strahlen beidemal die Gerade $\alpha'\beta'$ ist, so bilden die von den zwei Punkten α' und β' ausgehenden Strahlen der Bündel (π'), (ϱ'), (σ') mit der Geraden ($\alpha'\beta'$) gleiche Doppelverhältnisse und gehören somit (nach 6. h) einer Bündelreihe an.

Aus dem hiermit bewiesenen Satze folgt sofort der folgende:

Hat eine Bündelreihe mit einem Bündelfelde zwei Bündel gemein, so gehört sie ganz dem Felde an.

Ist nämlich A eine Ebene, welche den beiden Bündeln gemeinsam ist, so gehören alle Bündel des Feldes, welche die Ebene enthalten, einer Reihe an; da diese Reihe mit der gegebenen zwei Bündel gemein hat, mufs sie mit ihr identisch sein.

Dieser Satz gestattet, das Bündelfeld in engen Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Strahlenbündel zu bringen. Es seien (σ_1), (σ_2), (σ_3) drei Bündel des Feldes, von denen wir nur voraussetzen, dafs sie keinen Ebenenbüschel gemein haben. Von einem beliebigen Punkte α aus mögen die Strahlen a_1, a_2, a_3 ausgehen, von denen jeder dem mit gleicher Marke versehenen Bündel angehört. Lägen diese drei Strahlen in einer Ebene, so gehörten entweder die drei Bündel einer Reihe an, oder die Ebene wäre den drei Bündeln gemeinsam. Der erste Fall ist von selbst ausgeschlossen, der zweite kann dadurch beseitigt werden, dafs man α aufserhalb der etwa vorhandenen gemeinsamen Ebene annimmt. Jetzt giebt es stets einen einzigen Bündel der Reihe, der einen durch α gelegten Strahl a enthält; der Bündel ist also durch diesen Strahl eindeutig bestimmt. Jeder durch α gelegten Ebene entspricht hierbei eine Bündelreihe.

9. Die durchgeführten Entwicklungen führen sehr leicht zu folgenden Sätzen:

a) Haben zwei Bündelfelder drei Bündel gemein, die nicht einer Reihe angehören, so sind sie identisch.

b) Zwei Bündelreihen, die demselben Felde angehören, haben stets einen Bündel gemein.

Die am Schlusse der letzten Nummer erwähnte Abbildung führt den Satz darauf zurück, dafs zwei Ebenen, die einen Punkt gemein haben, sich in einer Geraden schneiden.

c) Ein beliebiges Bündelfeld und eine nicht in ihr enthaltene Bündelreihe haben stets einen einzigen Bündel gemein.

Dem Ebenenbüschel, welchen die Bündel der Reihe gemeinsam haben, mögen die Ebenen A und B angehören; in A wählen wir einen Punkt α, in B einen Punkt β beliebig. Alle durch α in A gezogenen Geraden bestimmen eine dem Felde angehörende Bündelreihe; zu jedem einzelnen Bündel dieser Reihe gehört ein durch β gehender Strahl, und die Gesamtheit dieser Strahlen liegt in einer Ebene B′. Schneiden die Ebenen B und B′ einander in einer Geraden b und die Ebenen $(\alpha\beta)$ und A einander in a, so ist der durch die Geraden a und b bestimmte Bündel der Reihe und dem Felde gemeinschaftlich.

d) Zwei Bündelfelder, die nicht zusammenfallen, haben eine Bündelreihe gemein.

Im ersten Felde wähle man zwei Bündelreihen, die nur der Bedingung unterliegen, dafs der ihnen gemeinsame Bündel dem zweiten Felde nicht angehört. Da jede dieser Reihen mit dem zweiten Felde einen Bündel gemein hat, so liegt die durch diese Bündel bestimmte Reihe in beiden Feldern. Ein weiterer Bündel kann beiden Feldern nicht angehören, ohne dafs sie identisch werden.

e) Wenn zwei Strahlen eines dem Felde angehörenden Bündels einen Punkt gemein haben und somit alle Strahlen dieses Bündels durch den Punkt gehen, so läfst sich durch den Punkt eine Ebene legen, die allen Bündeln des Feldes angehört; zugleich ist jeder Punkt der Ebene Mittelpunkt für einen Bündel des Feldes.

Zwei (und damit alle) Strahlen des Bündels (σ) mögen durch den Punkt π gehen. Man ziehe durch π die beiden Strahlen p_1 und p_2, welche zu zwei anderen Bündeln (σ_1) und (σ_2) des Feldes gehören. Diese Strahlen können nicht zusammenfallen, ohne dafs die Bündel (σ), (σ_1), (σ_2) einer Reihe angehören, was wir ausschliefsen. Demnach haben die drei Bündel und somit alle Bündel des Feldes die Ebene ($p_1 p_2$) gemein. Ist ϱ ein anderer Punkt dieser Ebene und gehört der Punkt α ihr nicht an, so gehört die Gerade $\alpha\varrho$ einem einzigen Bündel des Feldes an. Da diesem Bündel auch die Ebene ($p_1 p_2$), also auch mindestens eine durch ϱ in dieser Ebene gezogene Gerade angehört, derselbe somit zwei durch ϱ gehende Strahlen enthält, so ist der Punkt ϱ der Mittelpunkt dieses Bündels.

10. Die durch die vorstehenden Entwicklungen gewonnenen Sätze beanspruchen ohne Zweifel hohes Interesse. Es zeigt sich nämlich, dafs alle Sätze über Punkte, Gerade und Ebenen ihre volle Gültigkeit behalten, wofern man den Punkt durch den Strahlenbündel, die gerade Punktreihe durch die Bündelreihe und das ebene Punktfeld durch das Bündelfeld ersetzt. Wenn dabei die neu gefundenen Sätze vor den allgemein bekannten an Anschaulichkeit zurücktreten, so wird dieser Mangel durch die volle Allgemeinheit der neuen Sätze reichlich aufgewogen. Denn die Sätze über den Schnitt von Ebenen und Geraden erleiden Ausnahmen, da man von vornherein gar nicht weifs, ob ein Schnitt vorhanden ist. Dagegen gelten für die Strahlenbündel und die aus ihnen auf die angegebene Weise hergeleiteten Gebilde alle Sätze in voller Allgemeinheit.

Hierbei ist wohl zu beachten, dafs die gewonnenen Sätze nur die Punkte, Geraden und Ebenen des fest begrenzten Bereiches betreffen, der von Anfang an der Untersuchung zu Grunde gelegt war. Wofern eine Erweiterung über diesen Bereich ausgeschlossen ist, dürfen wir eine neue Bezeichnung einführen, durch welche die entwickelte Theorie noch enger mit den ersten Sätzen der Geometrie verknüpft wird. Wir nennen in diesem Falle jeden Strahlenbündel, dessen Strahlen einander nicht schneiden, einen »idealen oder uneigentlichen Punkt«; ebenso bezeichnen wir die Bündelreihe, deren Strahlenbündel keine Gerade gemein haben, als eine »ideale Gerade«, und das Bündelfeld, dessen Bündel keine gemeinsame Ebene besitzen, als eine »ideale Ebene«. Hiernach enthält jede reelle Gerade auch ideale Punkte, die reelle Ebene neben reellen Geraden und Punkten auch ideale Gerade und Punkte. Indem wir diese Ausdrücke benutzen, gewinnt der Ausspruch der Sätze an Einfachheit und Leichtigkeit, und alle Sätze gelten in voller Allgemeinheit: je zwei Ebenen haben eine Gerade, irgend zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, einen Punkt gemeinschaftlich.

Noch berechtigter ist die Einführung der idealen Gebilde, wenn man für den Raum als Ganzes die Voraussetzung macht, dafs zwei Ebenen höchstens eine Gerade, zwei Gerade derselben Ebene höchstens einen Punkt gemeinschaftlich haben, ohne dafs man annimmt, zwei Ebenen besäfsen jedesmal eine Schnittlinie. Demnach wird die Lobatschewskysche Geometrie die idealen Gebilde noch weniger entbehren können als die Euklidische.

Wenn man aber ein endliches Gebiet, für das unsere Voraussetzungen gelten, unbegrenzt erweitert, so ist es nicht ohne Bedenken, die angegebene Ausdrucksweise zu benutzen. Bei diesem Prozefs gehen offenbar ideale in wirkliche Punkte über. Will man aber den Strahlenbündel als Ersatz für einen Punkt ansehen, so mufs man die Voraussetzung machen, dafs die Strahlen und Ebenen eines Bündels auch bei Erweiterung des Gebiets nur einen einzigen Punkt gemein haben, und dafs durch den Schnittpunkt von irgend zwei Strahlen eines Bündels alle seine Strahlen und Ebenen hindurchgehen. Keine dieser Annahmen ist aber notwendig. Schon die Riemannsche Raumform zeigt, dafs die Strahlenbündel auch zwei Mittelpunkte besitzen können. Auch ist es, wie der vierte Abschnitt gelehrt hat, ganz wohl möglich, dafs zwei Strahlen eines Bündels sich in einem Punkte treffen, durch den seine übrigen Strahlen nicht hindurchgehen. Wollte man also von vornherein von idealen Gebilden sprechen, so würde es nicht möglich sein, die verschiedenen Möglichkeiten aufzufinden, die sich bei Erweiterung des Gebietes herausstellen. Demnach mufsten wir auch bei den vorangehenden Entwicklungen die schwerfällige Ausdrucksweise beibehalten und durften nicht sofort die idealen Punkte, Geraden und Ebenen einführen.

11. Zum Schlufs noch folgende Bemerkung. Statt die idealen Gebilde, wie hier geschehen ist, auf einem synthetischen Wege einzuführen, kann man auch durch analytische Betrachtungen zu ihnen gelangen. Wie mehrfach erwähnt ist, kann man die Lage eines jeden Punktes, der dem abgegrenzten Raumteil angehört, durch das Verhältnis von vier Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3 derartig bestimmen, dafs die Gleichung jeder Ebene homogen linear in den Koordinaten ist. Wenn jetzt dem Wertquadrupel (x_0, x_1, x_2, x_3) kein Punkt des Raumteiles entspricht, so wollen wir es als einen idealen Punkt bezeichnen. Zudem wollen wir sagen, irgend ein Gebilde enthalte einen idealen Punkt, wenn die Gleichung des Gebildes durch Einsetzen der entsprechenden Koordinatenwerte befriedigt wird. Hiernach weist man leicht nach, dafs für die Gesamtheit der durch einen Punkt gehenden Geraden und Ebenen stets dieselben Gesetze gelten, mag der Punkt reell oder ideal sein. Man erhält somit auch Strahlenbündel, die keinen reellen Mittelpunkt besitzen, und kann einen solchen (d. h. die dem abgegrenzten Raumteile angehörenden Ebenen und Strahlen desselben) als Ersatz für den Mittelpunkt betrachten.

Ebenso kann man festsetzen, dafs für veränderliche Gröfsen u und v durch die Gleichungen

$$x_\varkappa = a_\varkappa u + b_\varkappa v \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3)$$

stets eine gerade Linie und durch jede homogene lineare Gleichung zwischen x_0, x_1, x_2, x_3 stets eine Ebene dargestellt werden soll. Dann mufs eine Gerade oder Ebene, deren sämtliche Punkte ideal sind, selbst als ideal bezeichnet werden. Diese Festsetzungen gestatten, die in diesem Paragraphen synthetisch hergeleiteten Sätze mit grofser Einfachheit auf analytischem Wege zu beweisen.

§ 3.

Der projektive Raum als Ganzes.

1. Wie wir gesehen haben, ist es am passendsten, sich bei der Untersuchung des projektiven Raumes zunächst auf ein endliches, allseits begrenztes Gebiet zu beschränken. Dann gelten, wie die Voraussetzungen, so auch die Resultate zuvörderst nur

für diesen Bereich. Man setze jetzt für ein zweites Gebiet, das zum Teil mit dem gegebenen zusammenfällt, zum Teil über dasselbe hinausgeht, dieselben Gesetze voraus und nehme an, dafs in dem beiden Gebieten gemeinsamen Teile auch die sämtlichen Geraden und Ebenen zusammenfallen. In derselben Weise kann man fortfahren und dadurch den Raum als Ganzes bestimmen. Einem solchen Raume wird man Projektivität beilegen müssen, weil sich um jeden seiner Punkte ein Bereich abgrenzen läfst, für den unsere Voraussetzungen und demnach auch alle unsere Folgerungen gültig sind. Im übrigen werden sich aber ganz verschiedene Fälle als möglich herausstellen. Um diese klassifizieren zu können, ist es gut, eine Raumform zu Grunde zu legen, in der besonders einfache Gesetze gelten und die deshalb vielfach allein als der projektive Raum bezeichnet wird.

2. Für diese Raumform gilt das Gesetz, dafs irgend zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, sich schneiden, und zwar jedesmal in einem einzigen Punkte. Es kommt dies darauf hinaus, im Anschlufs an den vorigen Paragraphen jedem Strahlenbündel einen, und zwar einen einzigen Mittelpunkt beizulegen und die Forderung beizufügen, dafs irgend zwei Strahlen eines Bündels nur den Scheitel gemein haben. Dafs diese Forderungen erfüllbar sind, leuchtet ohne jeden Beweis ein, namentlich, wenn man die im vorigen Paragraphen bewiesenen Sätze berücksichtigt; die dort eingeführten idealen Gebilde verdienen diesen Namen nur für den zuvörderst ausgewählten Bereich; für den Raum als Ganzes sind sie aber reell. Hierbei bleiben die beiden ersten Voraussetzungen des § 1 für jeden Raumteil und für den Raum als Ganzes in Gültigkeit. Nur die dritte Voraussetzung mufs aufgegeben werden; denn die Ebene führt keine Zerlegung des Raumes herbei, wie man auf dieselbe Weise nachweist, in der man die Richtigkeit desselben Satzes für die Polarform des Riemannschen Raumes erkennt (B. 1. S. 68 unten). Um diese Raumform analytisch darzustellen, setzen wir fest, dafs jedem Verhältnis der vier Werte x_0, x_1, x_2, x_3 ein Punkt, und zwar ein einziger Punkt entspricht.

Um die Existenz dieser Raumform zu erkennen, kann man auch bei der Polarform des Riemannschen Raumes (dem Kleinschen Raume) von den metrischen Eigenschaften absehen und nur die projektiven berücksichtigen. Da es Staudt zuerst möglich geworden ist, durch Einführung der idealen Gebilde die euklidische Raumform als einen Raum der hier betrachteten Art darzustellen, möchte es angebracht sein, diese projektive Raumform als eine Staudtsche zu bezeichnen.

3. Eine zweite Raumform, die wir hier erwähnen möchten, ist dadurch charakterisiert, dafs alle Strahlenbündel zwei Mittelpunkte haben, und dafs sich irgend zwei seiner Strahlen nur in diesen beiden Punkten schneiden. Sie entspricht der Riemannschen Raumform. Alle geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen, enthalten noch einen zweiten Punkt, den Gegenpunkt des ersten. Zwei Ebenen haben stets eine Gerade, zwei in derselben Ebene gelegene Gerade stets zwei Punkte gemein. Durch zwei Punkte, die nicht Gegenpunkte von einander sind, kann immer eine einzige Gerade gelegt werden; ebenso ist eine Ebene durch eine Gerade und einen ihr nicht angehörenden Punkt bestimmt. Während hier die zweite Voraussetzung insoweit geändert wird, als zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, zwei Punkte gemein haben, bleibt die dritte Voraussetzung ungeändert, da der Raum durch die Ebene zerlegt wird. Dafs diese Raumform als projektivisch bezeichnet werden mufs, ersieht man daraus, dafs man auf die verschiedenste Weise ein Gebiet abgrenzen kann, welches zu keinem seiner Punkte den Gegenpunkt enthält; für ein solches Gebiet gelten aber unsere Voraussetzungen.

Die analytische Behandlung dieses Raumes wird besonders einfach, wenn man zwischen den vier veränderlichen Gröfsen x_0, x_1, x_2, x_3 die Relation festsetzt:

$$(1) \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

und jedem Wertsysteme, das dieser Gleichung genügt, einen Punkt zuordnet. Dann entsprechen jedem Verhältnis der vier Koordinaten zwei Wertsysteme x_0, x_1, x_2, x_3, also auch zwei Punkte, die Gegenpunkte von einander sind. Die Ebene wird wieder durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten dargestellt.

4. Um jetzt einen beliebigen projektiven Raum zu untersuchen, bilden wir denjenigen Raumteil, von dem wir ausgegangen sind, kollinear auf einen Staudtschen Raum ab. Erweitern wir das Gebiet des zu untersuchenden Raumes, so dehnt sich auch

der Bereich des Bildraumes aus. Unsere erste Frage betrifft demnach den Bereich, den wir im Staudtschen Raume durch Abbildung des projektiven Raumes erhalten. Offenbar giebt es in dieser Beziehung drei Möglichkeiten:

erstens können wir durch die Abbildung zu jedem Punkte des Staudtschen Raumes gelangen;

zweitens haben wir keinen Raumteil, sondern nur einzelne Flächen, Linien und Punkte auszuschliefsen, und

drittens umfafst das Bild nur einen Teil des Staudtschen Raumes. Da jeder erreichbare Punkt des Raumes innerhalb eines Gebiets liegen soll, für das unsere Voraussetzungen gelten, so müssen wir auch diejenigen Punkte als unerreichbar betrachten, die den auf der Grenze des Bildraumes gelegenen Punkten entsprechen.

Da wir in beiden Räumen entsprechenden Punkten dieselben Koordinatenwerte beilegen dürfen, so lassen sich die eben angegebenen Möglichkeiten auch in folgender Weise charakterisieren: entweder gehört zu jedem Wertsystem der Koordinaten ein erreichbarer Punkt, oder man erreicht alle Koordinatenwerte mit Ausnahme derjenigen, welche gewissen Gleichungen genügen, oder drittens die Gesamtheit der Wertsysteme zerfällt in zwei getrennte Mannigfaltigkeiten, von denen nur die eine zu erreichbaren Punkten gehört, während die andere Mannigfaltigkeit, zu der man auch die gegenseitige Grenze rechnet, wirklichen Punkten nicht zugeordnet ist. Wenn nur eine einzelne Fläche ausgeschlossen ist, so darf sie natürlich den Raum nicht zerlegen, weil im andern Falle mit der Fläche auch der eine Raumteil auszuschliefsen ist. Im übrigen ist die Willkür in der Festsetzung der Grenze überaus grofs; wir begnügen uns, folgende besonders einfache Fälle zu erwähnen:

a) Das Bild umfafst den ganzen Staudtschen Raum; zu jedem Verhältnis der Koordinatenwerte gehört ein erreichbarer Punkt;

b) Die erreichbaren Punkte bilden sich im Staudtschen Raume auf das Innere eines Tetraeders ab; da es möglich ist, die zunächst eingeführten Koordinaten durch beliebige lineare Funktionen derselben zu ersetzen, so dürfen die Grenzflächen die Gleichungen $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ besitzen; wählen wir auch den

Einheitspunkt im Innern des Tetraeders, so sind für alle erreichbaren Punkte die sämtlichen Verhältnisse $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ positiv;

c) die Gesamtheit der erreichbaren Punkte bildet sich auf das Innere einer Fläche zweiter Ordnung ab, oder für die Koordinatenwerte dieser Punkte gilt die Beziehung:

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 > 0.$$

d) bei der Abbildung wird eine Ebene ausgeschlossen; allen Wertsystemen mit Ausnahme derer, für welche $x_0 = 0$ ist, entsprechen erreichbare Punkte;

e) allen Punkten der Staudtschen Raumform mit Ausschlufs der in zwei windschiefen Geraden gelegenen entsprechen erreichbare Punkte; die Wertsysteme $x_0 = x_1 = 0$ und die Wertsysteme $x_2 = x_3 = 0$ sind auszuschliefsen;

f) nur dem Wertsystem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist kein erreichbarer Punkt zugeordnet.

5. Wenn bei der angegebenen Abbildung jedem Punkte der Staudtschen Raumform ein Punkt des zu untersuchenden Raumes entspricht, so haben wir uns zu fragen, ob nicht jedem Punkte des ersten mehrere Punkte des zweiten zugeordnet werden können. Denken wir uns z. B. eine gerade Linie des Bildraumes, so müssen wir ihren Punkten in stetiger Folge Punkte des abgebildeten Raumes zuordnen; aber es fragt sich, ob man im letzten Raume wieder zum Ausgangspunkte zurückgelangt, wenn man im Staudtschen Raume die gerade Linie einmal vollständig durchlaufen hat. Mit anderen Worten: Wenn jedem Wertsystem $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ ein Punkt zugeordnet ist, so kennen wir doch die Zahl der Punkte noch nicht, welche den einzelnen Wertsystemen entsprechen. Es scheint, als ob man jedem Wertsysteme beliebig viele Punkte (in endlicher oder unendlicher Anzahl) zuordnen könne, wofern diese Zahl, wenigstens im allgemeinen, dieselbe ist.

Hierbei ist noch die Möglichkeit zu beachten, dafs demselben Koordinaten-Quadrupel zuweilen erreichbare und zuweilen unerreichbare Punkte entsprechen. So ist es gestattet festzusetzen, dafs allen Wertsystemen der Variabeln zwei Punkte entsprechen, dafs aber dem System $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ nur das eine Mal ein erreichbarer Punkt zugeordnet ist; mit anderen Worten, man nimmt an, dafs jedem Quadrupel, welches der Gleichung (1) genügt, ein Punkt zugeordnet ist, mit Ausnahme des Wertsystems $(-1, 0, 0, 0)$, dem kein Punkt entsprechen soll.

Wenn bei der angegebenen Abbildung die erreichbaren Punkte einem begrenzten Raume, etwa dem Innern einer Fläche, eines Tetraeders u. dgl. entsprechen, so hat es keinen Zweck, die Fortsetzung des Raumes durch uneigentliche Punkte hin zu verfolgen.

6. An dritter Stelle haben wir uns die Frage vorzulegen, ob verschiedenen Punkten der Staudtschen Raumform derselbe Punkt des abgebildeten Raumes entsprechen kann, oder mit anderen Worten, ob es möglich ist, demselben Punkte verschiedene Wertsysteme $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ und $y_0 : y_1 : y_2 : y_2$ zuzuordnen. Damit um jeden Punkt ein Gebiet sich abgrenzen läfst, für das die aufgestellten Voraussetzungen gelten, müssen zwischen den beiden Wertsystemen mindestens drei Gleichungen bestehen. Eine gröfsere Anzahl von Gleichungen ist natürlich nicht ausgeschlossen; da aber die Klassifizierung der möglichen Fälle nicht einfach sein dürfte, wollen wir hier nur den Fall näher betrachten, wo aus jedem Wertsystem der Variabeln durch drei Gleichungen ein neues Wertsystem hergeleitet wird, das denselben Punkt darstellt. Offenbar müssen die Gleichungen sowohl in den Werten x_0, x_1, x_2, x_3 wie in den Werten y_0, y_1, y_2, y_3 homogen sein; demnach können wir unter Einführung eines Proportionalitäts-Faktors ϱ die Bedingungsgleichungen in der Form schreiben:

$$\varrho y_0 = \varphi_0 (x_0 \ldots x_3),\ \varrho y_1 = \varphi_1 (x_0 \ldots x_3),\ \varrho y_2 = \varphi_2 (x_0 \ldots x_3),\ \varrho y_3 = \varphi_3 (x_0 \ldots x_3),$$

wo die Funktionen $\varphi_0 \ldots \varphi_3$ homogen in den Variabeln sind. Wenn hier zwischen den Variabeln $y_0 \ldots y_3$ eine homogene Gleichung ersten Grades besteht, so gehören die entsprechenden Punkte einer Ebene an; ersetzt man die Variabeln y durch die Werte x, die sich aus den aufgestellten Gleichungen ergeben, so müssen auch die letzteren einer linearen Gleichung genügen. Das ist nur möglich, wenn die vier Funktionen $\varphi_0 \ldots \varphi_3$ vom ersten Grade sind, die Bedingungsgleichungen also die Form haben:

$$(2)\quad \varrho y_0 = \sum_{\varkappa} a_{0\varkappa} x_\varkappa \ldots \varrho y_3 = \sum_{\varkappa} a_{3\varkappa} x_\varkappa.$$

Die Auffindung der Bedingungen, denen die Koefficienten in diesen Substitutionen genügen müssen, stützt sich auf Erwägungen, die bereits im vierten Abschnitt durchgeführt sind. Vor allem darf weder die Substitution (2) noch irgend eine, die man aus ihr durch Wiederholung herleitet, es unmöglich machen, um jeden Punkt einen der Forderungen der Projektivität genügenden Bereich abzugrenzen. Ebensowenig darf die Grenze der erreichbaren Punkte durch die Substitution (2) geändert werden. Wenn also z. B. die vorgelegte projektive Raumform im Staudtschen Raume sich auf das Innere eines Tetraeders abbildet und die Seitenflächen zu Koordinaten-Ebenen gewählt werden, so müssen in den Gleichungen (2) alle Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ verschwinden, für welche die Marken ι und $\varkappa$ ungleich sind. Ist das Grenzgebilde die Ebene $x_0 = 0$, so geht φ_0 in x_0 über. Wofern endlich nur das Wertsystem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ einen idealen Punkt darstellt, mufs $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ sein.

Noch in anderer Weise übt die Grenze der erreichbaren Punkte einen Einflufs auf die Koefficienten in den Gl. (2) aus. Die Gleichungen (2) liefern gewisse Wertsysteme, für welche $y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ ist. Ist eines derselben reell, so darf es keinen erreichbaren Punkt darstellen, weil im andern Falle, wie wir im vierten Abschnitt gezeigt haben, um diesen Punkt in jedem noch so kleinen Bereich der Schnitt zweier Ebenen aus mehreren geraden Linien bestehen würde (B. 1 S. 321).

Sobald demnach die Grenze der Raumform bekannt ist, lassen sich ohne Mühe die Bedingungen angeben, denen die Koefficienten in den Gleichungen (2) genügen müssen, damit die durch diese Gleichungen verbundenen Wertsysteme geeignet sind, denselben Punkt darzustellen. Wird eine solche Substitution durch die Gleichungen (2) gegeben, so liefert die Wiederholung dieser und der aus ihr durch Inversion erhaltenen Substitution eine endliche oder unendliche Zahl von Wertsystemen, die zu demselben Punkte gehören, und zwar wird diese Zahl endlich sein, wenn die gegebene Substitution durch eine endliche Zahl von Wiederholungen in die identische Substitution übergeht. Nun ist es möglich, dafs derselbe Punkt jedesmal noch durch andere Wertsysteme z dargestellt wird, welche mit den Gröfsen x durch die Gleichungen verbunden sind:

$$z_\alpha = \sum_{\varkappa} b_{\alpha\varkappa} x_\varkappa .$$

Natürlich müssen dann nicht nur die Koefficienten $b_{\alpha\varkappa}$ den soeben charakterisierten Bedingungen genügen, sondern es mufs auch jede Substitution, die man aus beiden nach beliebiger Wiederholung durch Kombination herleiten kann, die gleiche Eigenschaft besitzen.

Eine Reihe von Möglichkeiten leitet man aus den im vierten Abschnitt behandelten Beispielen durch projektive Umgestaltung her; einen solchen Fall möchten wir im folgenden selbständig entwickeln.

7. Wir nehmen an, dafs zu jedem Wertsystem ein, und zwar ein einziger Punkt gehört. In diesem Falle dürfen die Gleichungen $y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ oder die Gleichungen

$$\varrho x_\alpha = \sum_\varkappa a_{\alpha\varkappa} x_\varkappa$$

keine reelle Lösung besitzen. Sobald dieser Bedingung genügt ist, kann man durch Einführung neuer Variabeln die Gleichungen (2) in die Form bringen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \varrho y_0 &= \alpha x_0 - \beta x_1 \\ \varrho y_1 &= \beta x_0 + \alpha x_1 \\ \varrho y_2 &= \gamma x_2 - \delta x_3 \\ \varrho y_3 &= \delta x_2 + \gamma x_3. \end{aligned}$$

Setzt man hier: $\alpha = k\cos\mu$, $\beta = k\sin\mu$, $\gamma = l\cos\nu$, $\delta = l\sin\nu$, so gehen bei Wiederholung dieser Substitution die Gröfsen k und l in k^n resp. l^n, μ und ν in $n\mu$ resp. $\nu\mu$ über. Wenn die hier benutzte Gröfse μ in einem irrationalen Verhältnis zu der Zahl π ($= 3, 14 \ldots$) steht, so kann man für ganzzahlige Werte von p und q die Werte $q\mu$ und $2p\pi$ beliebig nahe an einander bringen, ohne dafs sie gleich werden. Man kann also von jedem Punkte der Linie $x_2 = x_3 = 0$ Gerade ziehen, die in einem beliebig ausgewählten Bereich zwei Punkte gemein haben. Demnach ist dieser Fall auszuschliefsen. Die Zahlen μ und π müssen also in einem rationalen Verhältnis stehen, oder man kann zwei ganze Zahlen m und n bestimmen, für die $n\mu = 2m\pi$ ist. Dann erhält die Substitution (3), (n—1)-mal wiederholt, nach Division durch k^m eine Form, die aus (3) hervorgeht, wenn man $\alpha = 1$, $\beta = 0$ setzt. Da hier für $x_2 = x_3 = 0$ allgemein $y_\alpha = x_\alpha$ ist, genügt diese Substitution den aufgestellten Bedingungen nur, wenn diese Substitution in die identische übergeht, wenn also auch $\gamma = 1$, $\delta = 0$ ist. Indem man dieselbe Betrachtung unter Vertauschung der Gröfsen μ und ν anstellt, erkennt man, dafs $\mu = \nu$ sein mufs. Nun darf man die sämtlichen Transformations-Koefficienten durch dieselbe Zahl dividieren und die gegebene Substitution durch irgend eine andere ersetzen, die aus ihr durch Wiederholung hervorgeht, wofern nur durch Wiederholung der letzteren die gegebene erhalten werden kann. Demnach darf man $\alpha = \gamma = \cos \frac{2\pi}{n}$, $\beta = \delta = \sin \frac{2\pi}{n}$ annehmen, und dann stellen die Gleichungen (3) eine Transformation des Staudtschen Raumes dar, bei welcher jeder Punkt in einer bestimmten geraden Linie verbleibt und alle dadurch erhaltenen Geraden ihre Lage nicht ändern. (Diese Geraden bilden, wie beiläufig erwähnt werden möge, eine lineare Kongruenz mit imaginären Direktricen.)

Um die Art der hierdurch erhaltenen Zuordnung noch deutlicher zu übersehen, gehen wir von zwei windschiefen Geraden aus und setzen auf folgende Weise eine projektive Beziehung zwischen den Punkten der beiden Geraden fest. Man mache eine dritte Gerade, welche mit keiner der beiden Geraden in einer Ebene liegt, zur Achse eines Ebenenbüschels und lasse diejenigen Punkte der Geraden einander entsprechen, in denen sie von derselben Ebene des Büschels geschnitten werden. Hierauf führe man eine projektive Zuordnung der Punkte der ersten Geraden ein, bei der kein Punkt sich selbst entspricht, und die geeignet ist, nach einer gewissen endlichen Zahl von Wiederholungen jeden Punkt sich selbst zuzuordnen. Vermittelst der projektiven Beziehung, die zwischen den beiden Geraden besteht, überträgt man diese Zuordnung auf die zweite Gerade: sind nämlich α und α' zwei Punkte der ersten, β und β' zwei Punkte der zweiten Geraden, entspricht infolge der ersten Zuordnung der Punkt β dem Punkte α, der Punkt β' dem Punkte α' und ist α' zu α zugeordnet, so soll auch der Punkt β' zu β zugeordnet sein. Bei einer kollinearen Zuordnung des Staudtschen Raumes zu sich selbst, bei der die Punkte jeder von diesen beiden Geraden in der angegebenen Weise auf einander bezogen sind, giebt es eine zweifach unendliche Schar von Geraden, von denen jede sich selbst zugeordnet ist. Jetzt kann man eine Raumform dadurch bestimmen, dafs man allen auf diese Weise einander zugeordneten

Punkten des Staudtschen Raumes jedesmal einen einzigen Punkt zuweist.

Das gefundene Resultat zeigt sehr grofse Ähnlichkeit mit dem Satze, den wir über das Zusammenfallen von Punkten einer elliptischen Raumform gefunden haben (B. 1. S. 343); nur sind bei den projektiven Raumformen zwei Gerade willkürlich, während die Metrik verlangt, mit einer Geraden alle Geraden einer von zwei ganz bestimmten Scharen zu verbinden; auch besteht für die Zuordnung der Punkte der einzelnen Geraden im projektiven Raume eine gröfsere Willkür.

8. Vergleichen wir die vorstehenden Untersuchungen (Nr. 6 und 7) mit denen des vierten Abschnitts, so finden wir, dafs die Bedingungen, unter denen verschiedene Koordinatenwerte geeignet sind, denselben Punkt darzustellen, im projektiven Raume wesentlich denselben Gesetzen unterliegen wie in einem metrischen, dafs aber, wofern nicht die Grenzgebilde besondere Beschränkungen herbeiführen, für den projektiven Raum in dieser Hinsicht eine gröfsere Mannigfaltigkeit möglich ist.*) Diese Thatsache findet darin ihre Erklärung, dafs es in einem projektiven Raume genügt, um jeden Punkt ein Gebiet abgrenzen zu können, in welchem sich zwei gerade Linien höchstens in einem Punkte schneiden, während für Räume metrischen Charakters die Forderung hinzukommt, dafs diese Eigenschaft durch keine Bewegung aufgehoben werden darf. Nun läfst sich jede Zuordnung, welche durch Bewegung vermittelt wird, durch eine projektive Transformation darstellen, und die Gesamtheit der allen möglichen Bewegungen entsprechenden Transformationen bildet in dem später zu erläuternden Sinne eine Gruppe. Demnach können wir sagen: In jedem metrischen Raume liefern die Transformationen einer bestimmten Gruppe, auf einen gewissen Bereich angewandt, stets eindeutige Resultate. Macht man diese Forderung für den projektiven Raum, so erhält man gleiche Gesetze wie für den entsprechenden metrischen Raum, wofern nur die Grenze beidemal durch dieselben Gleichungen dargestellt wird. Hiernach drängt

*) Der hier erwähnte Einflufs der Grenzgebilde bewirkt, dafs die Bedingungen, unter denen derselbe Punkt mehreren Koordinatenwerten entspricht, in einem projektiven Raume, dessen Grenze eine ungeradlinige Fläche zweiter Ordnung ist, genau dieselben sind wie in einer hyperbolischen Raumform.

sich die Frage nach den Bedingungen auf, unter denen dasselbe für alle projektiven Transformationen gilt, oder es stellt sich uns die Aufgabe dar:

Nachdem ein gewisser Raumteil abgegrenzt ist, in welchem zwei Ebenen höchstens eine Gerade, zwei Gerade höchstens einen Punkt gemein haben, wird verlangt, dafs jede kollineare Zuordnung, auf diesen Raumteil angewandt, eindeutig ist, so dafs, wenn mit ihm ein anderer Raumteil kollinear verwandt ist, jedem Punkte des einen stets ein einziger Punkt des andern entspricht.

Um zu erkennen, welche Raumformen unter dieser Voraussetzung möglich sind, benutzen wir ein Koordinatensystem, dessen vier Eckpunkte in dem zu Grunde gelegten Raumteile liegen. Jetzt betrachten wir das Resultat der Transformationen:

$$(4) \quad y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = e^t x_0 : x_1 : x_2 : x_3,$$

wofern dem Parameter t alle reellen Werte beigelegt werden dürfen. Hierbei bleibt jeder Punkt der Ebene $x_0 = 0$ ungeändert, und jede Gerade und Ebene, die durch den Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ geht, wird in sich verschoben. Da in dem abgegrenzten Gebiete Punkte liegen, für welche die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ alle möglichen Wertsysteme besitzen, demnach bei unbeschränkter Veränderlichkeit von t alle Werte der Verhältnisse $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$ erhalten werden, so sind wir genötigt, jedem Koordinaten-Quadrupel einen erreichbaren Punkt zuzuordnen. Auch kann derselbe Punkt nicht durch verschiedene Quadrupel dargestellt werden; denn wenn die Quadrupel (y_0, y_1, y_2, y_3) und (y_0', y_1', y_2', y_3') zu demselben Punkte gehörten, so müfste dasselbe für die beiden Quadrupel

$$(e^{-t} y_0, y_1, y_2, y_3) \text{ und } (e^{-t} y_0', y_1', y_2' y_3')$$

gelten, da die Transformation (4) eindeutige Resultate liefern soll. Nun kann man aber der Variabeln t einen solchen Wert geben, dafs die Punkte, welche durch die beiden letzten Quadrupel dargestellt sind, innerhalb des zu Grunde gelegten Gebietes liegen; da diese beiden Punkte verschieden sind, wofern die vier Koordinaten nicht dasselbe Verhältnis haben, können auch die beiden ersten Punkte nicht zusammenfallen.

Nur für die Punkte der Ebene $x_0 = 0$ können diese Schlüsse nicht gezogen werden. Man kann aber irgend ein anderes Koordinaten-Tetraeder benutzen, dessen Eckpunkte ebenfalls in dem Anfangsgebiete liegen, und dadurch die allgemeine Gültigkeit der Schlüsse erweisen. Zu dem Zwecke genügt es, in den Gleichungen (4) die Marke 0 mit einer andern Marke zu vertauschen, oder wenn man lieber will, die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ beizubehalten und die Ebene $x_0 = 0$ durch eine Ebene $x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ zu ersetzen.

Um zu erkennen, wieviel Punkte einem jeden Koordinaten-Quadrupel zugeordnet werden können, transformieren wir eine Ebene, die wir etwa zur Ebene $x_0 = 0$ wählen, so in sich, dafs eine Gerade in sich verschoben wird und ein ihr nicht angehörender Punkt in Ruhe bleibt. Es seien

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = 0$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = 0$$

die Gleichungen zweier durch den ruhenden Punkt gelegter Geraden, ferner

$$a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

die Gleichung der in sich verschobenen Geraden; man setze

$$\xi = \frac{a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3}{a_3 x_1 + b_3 x_1 + c_3 x_3}, \quad \eta = \frac{a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3}{a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3}$$

und wähle ξ', η' als die entsprechenden Funktionen von x_1', x_2', x_3'. Dann soll die Beziehung zwischen x_1', x_2', x_3' und x_1, x_2, x_3 sich aus den Gleichungen ergeben:

$$(5) \quad \xi' = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad \eta' = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi,$$

wo die Gröfse φ als variabel vorausgesetzt wird. Sobald diese Variabele den Wert 2π erhält, wird $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$ und somit $x_1' : x_3' = x_1 : x_3$, $x_2' : x_3' = x_2 : x_3$. Da der eine Eckpunkt des Dreiecks seine Lage beibehalten hat, so kehren für $\varphi = 2\pi$ die Punkte einer jeden von diesem Punkte ausgehenden Geraden und somit alle Punkte in ihre Anfangslage zurück. Nun ist die dritte Gerade in sich verschoben; die stetige Folge der Transformationen, welche aus (5) erhalten werden, wenn man den Parameter φ alle Werte von null bis 2π annehmen läfst, nötigt also jeden Punkt dieser Geraden, die ganze Linie ein- oder mehrmals zu beschreiben.

Nun wird für die Punkte dieser Linie bereits, wenn man $\varphi = \pi$ setzt, $x_1' : x_3' = x_1 : x_3$ und $x_2' : x_3' = x_2 : x_3$. Verschieben wir also eine Gerade in sich, d. h. transformieren wir ihre Punkte stetig in der Weise, dafs die Koordinaten alle für die Punkte der Geraden geeigneten Wertsysteme annehmen, so mufs der Punkt in seine Anfangslage zurückkehren, sobald seine Koordinaten zum zweiten Male die Anfangswerte erreichen.

9. Allen diesen Forderungen genügen die beiden Raumformen, die wir im Anfange dieses Paragraphen betrachtet haben. Denn erstens werden allen Wertsystemen $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ Punkte zugeordnet, und zweitens können niemals Punkte identisch sein, die zu verschiedenen Wertsystemen gehören. Dafs auch die zuletzt gefundene Bedingung durch die beiden Raumformen befriedigt wird, erkennt man sehr leicht. So kann man die Geraden der unter Nr. 3 beschriebenen Raumform in folgender Weise darstellen: Man wähle acht Konstante $a_0 \ldots a_3$, $b_0 \ldots b_3$, zwischen denen die Gleichungen bestehen:

$$a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,\ b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2=1,$$
$$a_0 b_0+a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3=0,$$

und mache die Koordinaten von der veränderlichen Gröfse u abhängig vermittels der Gleichungen:

$$x_\varkappa = a_\varkappa \cos u + b_\varkappa \sin u. \qquad (\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Zwei verschiedene Werte von u liefern nur dann denselben Punkt, wenn sie sich um Vielfache von 2π unterscheiden. Lassen wir also die Variabele u die Werte von 0 bis 2π annehmen, so beschreibt der jedesmal entsprechende Punkt die gerade Linie.

Nun können wir auch annehmen, die Punkte der in sich verschobenen Geraden kehrten bereits für $\varphi = \pi$ in ihre Anfangslage zurück; denn alsdann wird doch auch für $\varphi = 2\pi$ der Ausgangspunkt wieder erreicht. Dieser Forderung genügt offenbar die Staudtsche Raumform, in der durch das Verhältnis $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ ein einziger Punkt dargestellt wird.

10. Wir haben jetzt noch zu zeigen, dafs keine weitere Raumform geeignet ist, die gefundenen Forderungen zu erfüllen. Zu dem Ende wollen wir an erster Stelle beweisen, dafs die Punkte der in sich verschobenen Gerade zum ersten Male in ihre Anfangslage zurückkehren, wenn in der Gleichung (5) die Variabele φ entweder gleich 2π oder gleich π wird. Unsere Entwicklung hat uns gezeigt, dafs für $\varphi = 2\pi$ die Anfangslage erreicht wird. An sich wird hierdurch nur gefordert, dafs die Rückkehr

zum ersten Male in dem Augenblicke erfolgt, wo die Variabele φ für ein ganzzahliges n den Wert $\frac{2\pi}{n}$ annimmt. Entspricht vermittelst der obigen Gleichungen dem Anfangsverhältnis $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ für $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ das Wertsystem $(x_0' : x_1' : x_2' : x_3')$, so kann das letztere dem ersteren nur dann gleich sein, wenn n entweder gleich eins oder gleich zwei ist. Da aber, wie wir im Anfange von Nr. 8 bewiesen haben, zu ungleichen Koordinatenwerten nicht derselbe Punkt gehören kann, so mufs $n = 1$ oder $n = 2$ sein.

Lassen wir jetzt in der Gleichung (5) die Gröfse φ von null aus wachsen, bis irgend ein Punkt der in sich verschobenen Geraden zum ersten Male seine Anfangslage wieder annimmt, so mufs, wie die durchgeführte Entwicklung zeigt, jeder Punkt dieser Geraden in die Anfangslage zurückkehren. Wofern also nur die Punkte einer einzigen Geraden l in Betracht kommen, gehört zu jedem Wertsystem der Variabeln entweder ein einziger oder zwei verschiedene Punkte. Nehmen wir an, ein Punkt π der Geraden l werde durch das Verhältnis $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, ein zweiter Punkt π' von l werde durch das Verhältnis $(x_0' : x_1' : x_2' : x_3')$ dargestellt, und zu dem ersten Verhältnis gehöre kein zweiter Punkt von l, so kann unter den Punkten von l nur der Punkt π' durch das Verhältnis $(x_0' : x_1' : x_2' : x_3')$ dargestellt werden. Man lege durch π eine zweite Gerade l_1. Diese enthält entweder noch einen Punkt π_1, der zu dem Verhältnis $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ gehört, oder dies Verhältnis stellt auch keinen zweiten Punkt der Geraden l_1 dar. Um zu zeigen, dafs die erste Annahme auszuschliefsen ist, bewege man die Ebene (ll_1) so in sich, dafs der Punkt l' in Ruhe gehalten und die Gerade l_1 in sich bewegt wird. Benutzt man wieder die oben eingeführten Gröfsen ξ und η und macht man die Transformation von den Gleichungen (5) abhängig, so gelangt für $\varphi = \pi$ der Punkt P auf P_1, die Gerade l aber zur Deckung mit ihrer Anfangslage. Somit enthält die Gerade l auch den Punkt P_1, was unserer Annahme widerstreitet. Hiernach wird auch auf jeder zweiten durch P gelegten Geraden l_1 dem Wertsystem (x) nur ein einziger Punkt zugeordnet sein. Dasselbe gilt also auch für jeden andern Punkt auf l_1 und somit für jeden beliebigen Punkt des Raumes. Konstruiert man demnach unter dieser Annahme alle von einem Punkte ausgehenden geraden Linien und verbindet je zwei Punkte, welche auf zwei verschiedenen unter diesen Linien liegen, wieder durch eine Gerade, so erhalten wir einen in sich abgeschlossenen Bereich von der Eigenschaft, dafs jeder Punkt des Bereiches zu einem einzigen Wertsystem $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ der Variabeln gehört und jedes Wertsystem einen einzigen Punkt des Bereiches darstellt.

Andererseits, wenn zu einem einzigen Wertsystem $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ zwei Punkte gehören, die auf einer geraden Linie liegen, so stellt jedes Verhältnis der vier Gröfsen x_0, x_1, x_2, x_3 zwei Punkte von der Eigenschaft dar, dafs alle Gerade, die durch einen der beiden Punkte hindurchgehen, auch den andern enthalten. Wir gelangen auf diese Weise zu einem Bereich, wie er in Nr. 3 beschrieben ist.

11. Um jetzt unsern Nachweis, dafs nur die beiden angegebenen Raumformen der gestellten Forderung genügen, vollständig zu machen, müssen wir zeigen, dafs in jedem der beiden Fälle zu dem bereits gefundenen Bereich kein weiterer als Bestandteil einer Raumform hinzutreten kann. Gehen wir etwa von einem Bereich aus, der die Eigenschaft hat, dafs zu jedem Wertsystem $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ einer, und zwar ein einziger, seiner Punkte zugeordnet ist; wir wollen untersuchen, ob nicht etwa zu dem Wertsystem (x) ein weiterer Punkt gehören kann, der in einem andern Bereich liegt. Dann darf es nicht möglich sein, durch die beiden Punkte eine gerade Linie zu legen, weil, wie die vorangehende Untersuchung gezeigt hat, demselben Wertsysteme niemals zwei verschiedene Punkte zugeordnet werden können, die auf derselben geraden Linie liegen. Damit ist aber bewiesen, dafs es unmöglich ist, die beiden Bereiche als Bestandteile einer einzigen Raumform zu betrachten; denn da die Bereiche nicht durch gerade Linien zu einem einheitlichen Ganzen verbunden werden können, so besteht überhaupt keine Verbindung zwischen ihnen. Gäbe es nämlich eine Verbindung, so müfste sie doch durch projektiveTransformationen erreicht werden können; nun läfst sich, wie leicht bewiesen werden kann, jede projektive Transformation durch Zusammensetzung aus solchen Transformationen erhalten, bei denen alle Veränderungen in geraden Linien erfolgen, oder mit anderen Worten, bei denen durch jeden Punkt eine in sich transformierte gerade Linie hindurchgeht. Da bei

allen diesen speciellen Transformationen der zuerst gewählte Bereich in sich verbleibt, so kann er auch durch die aus ihnen zusammengesetzte Transformation nicht in einen andern Bereich übergeführt werden.

Ebenso verfährt man unter der Annahme, dafs der Bereich die unter Nr. 3 dargelegten Eigenschaften besitzt. Wir finden also, dafs der gestellten Forderung nur die beiden angegebenen Raumformen genügen. Diese haben aber die weitere Eigenschaft, dafs jede projektive Transformation, mag sie auf einen beliebigen Teil des Raumes oder auch auf den Raum als Ganzes angewandt werden, zu eindeutigen Resultaten führt. Wenn also sämtliche projektive Transformationen für irgend einen Raumteil eindeutige Beziehungen herbeiführen, so gilt dasselbe für jeden Raumteil und für den Raum als Ganzes, und nur die beiden angegebenen Raumformen besitzen diese Eigenschaft. Hiernach entsprechen sie denjenigen metrischen Raumformen, die auch als Ganze bewegt werden können.[12])

§ 4.

Projektivität und Metrik.

1. Die verschiedenen Methoden, durch die man von der Projektivität zur Metrik gelangt, sind bereits im zweiten Abschnitt (B. 1. S. 149—162) besprochen. Indessen konnten wir dort einen Weg, der zu diesem Ziele führt, nur kurz angeben, ohne in seine Begründung einzugehen, weil dabei die Theorie der Transformationsgruppen nicht wohl entbehrt werden kann, eine Theorie, welche im ersten Bande keine Stelle finden konnte. Diese Begründung möchte ich hier nachtragen.[13]) Allerdings sollen die Transformationsgruppen erst im achten Abschnitt behandelt werden; aber es wird gestattet sein, hier bereits einige der dort zu entwickelnden Resultate zu benutzen. Wir gebrauchen dabei nur die Liesche symbolische Bezeichnung einer unendlich kleinen Transformation, den Begriff der Kombination zweier Transformationen und den Satz, dafs einer Gruppe, in der zwei infinitesimale Transformationen vorkommen, auch diejenige Transformation angehört, die man durch Kombination der beiden ersten erhält. Der Leser, der hiermit noch nicht vertraut ist, findet die nötigen Erläuterungen im achten Abschnitt.

Dem Beweise unseres Hauptsatzes möchte ich einige Bemerkungen über beliebige projektive Gruppen vorausschicken.

Zur Darstellung der einzelnen Elemente einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit mögen $n + 1$ Gröfsen $x_0, x_1 \ldots x_n$ dienen, wobei wir festsetzen, dafs es nur auf die Verhältnisse und nicht auf die wirklichen Werte dieser Gröfsen ankommt. Jede Transformation, bei der die Verhältnisse der neuen Gröfsen $y_0, y_1 \ldots y_n$ durch homogene lineare Funktionen der gegebenen Variabeln x, also unter Einführung eines Proportionalitäts-Faktors ω in der Form

$$y_\varkappa = \omega \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\lambda$$

ausgedrückt werden, heifst eine projektive Transformation, und eine Gruppe, die nur projektive Transformationen enthält, eine projektive Gruppe. In diesem Falle sind auch die unendlich kleinen Änderungen dx_α der einzelnen Variabeln x_α bis auf einen unendlich kleinen Faktor dt homogene lineare Funktionen von $x_0, x_1 \ldots x_n$. Ersetzt man also in dem Lieschen Symbol einer infinitesimalen Transformation die Zeichen $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ durch p_α, so läfst sich jede unendlich kleine Transformation einer projektiven Gruppe in der Form

$$(1) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n)$$

darstellen, wo die $(n + 1)^2$ Koefficienten konstante Gröfsen sind. Die Transformation $\Sigma p_\iota x_\iota$ führt keine Änderung in den Verhältnissen der Koordinaten herbei; sie kann daher, mit einer beliebigen Konstanten multipliziert, zu der Form (1) addiert werden, ohne das Ergebnis zu ändern. Wir werden daher in vielen Fällen den Koefficienten $A_{00} = 0$ voraussetzen.

Sind $\Sigma A_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa$ und $\Sigma B_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa$ zwei Transformationen, die derselben Gruppe angehören, so mufs die Gruppe auch

1. jede Transformation $\Sigma (\eta A_{\iota\varkappa} + \zeta B_{\iota\varkappa}) p_\iota x_\varkappa$ für beliebige Koefficienten η und ζ, und

2. die durch ihre Kombination erhaltene Transformation

$$\Sigma (A_{\iota\varkappa} B_{\lambda\iota} - B_{\iota\varkappa} A_{\lambda\iota}) x_\varkappa p_\lambda$$

enthalten.

Unter der allgemeinen projektiven Gruppe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit verstehen wir diejenige Gruppe, welche alle projektiven Transformationen enthält; wir können sie durch die n (n + 2) Transformationen $p_0 x_\alpha$, $x_0 p_\alpha$, $p_\alpha x_\beta$ für $\alpha, \beta = 1 \dots n$ bestimmen.

Ersetzt man in der Form $\Sigma u_\iota x_\varkappa$ jede Gröfse x_ι durch $x_\iota + dx_\iota$ für

$$dx_\iota = dt \sum_\varkappa A_{\iota\varkappa} x_\varkappa,$$

so bleibt die Form ungeändert, wenn man zugleich u_ι durch $u_\iota + du_\iota$ ersetzt und

$$du_\iota = - dt \sum_\varkappa A_{\varkappa\iota} u_\varkappa$$

annimmt. Die unendlich kleine Transformation, denen die Gröfsen u_ι unterliegen, wenn man auf die Gröfsen x die Transformation (1) anwendet, läfst sich demnach für $\frac{\partial f}{\partial u_\iota} = r_\iota$ symbolisch in der Form

$$- \Sigma A_{\varkappa\iota} r_\iota u_\varkappa$$

darstellen.

An Stelle der Variabeln x kann man neue Variabeln y als homogene lineare Funktionen der ersten einführen, indem man setzt:

$$(2) \quad x_\alpha = \sum_\varkappa m_{\alpha\varkappa} y_\varkappa.$$

Drückt man jetzt die Veränderung $dy_0 \dots dy_n$ durch die Werte $y_0 \dots y_n$ aus, so kommt dies für $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = q_\varkappa$ darauf hinaus, in der Form (1) mit der Substitution (2) die weitere Substitution

$$(3) \quad q_\iota = \sum_\varkappa m_{\iota\varkappa} p_\varkappa \text{ oder } p_\iota = \sum_\varkappa m'_{\iota\varkappa} q_\varkappa$$

zu verbinden, wo $m'_{\iota\varkappa}$ der Koefficient von $m_{\iota\varkappa}$ in der Determinante $| m_{\iota\varkappa} |$ ist. Damit die Gleichung $\Sigma u_\iota x_\iota = \Sigma v_\iota y_\iota$ identisch erfüllt wird, hat man für $\frac{\partial f}{\partial v_\varkappa} = s_\varkappa$ die Umgestaltungen vorzunehmen

$$v_\iota = \sum_\varkappa m_{\iota\varkappa} u_\varkappa \text{ und } r_\iota = \sum_\varkappa m_{\iota\varkappa} s_\varkappa.$$

2. Lehrsatz: Kommen in einer Gruppe die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transformationen vor:

$$W_{\iota\varkappa} = p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota \quad (\text{für } \iota, \varkappa = 1 \dots n)$$

und tritt zu ihnen hinzu eine davon unabhängige Transformation

$$(4)\quad p_0 \sum_{\varkappa} a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \sum b_\varkappa p_\varkappa + \sum c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 1 \ldots n),$$

so läfst sich nur in dem Falle nicht auf das Vorkommen weiterer Transformationen schliefsen, wenn die Transformation hinauskommt auf

$$p_1 x_1 + \ldots + p_\varkappa x_\varkappa \equiv - p_0 x_0$$

oder mit anderen Worten, wenn die Koefficienten $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ sämtlich verschwinden und die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ für irgend zwei ungleiche Marken ι und $\varkappa$ den Bedingungen genügen:

$$(5)\quad c_{\iota\iota} - c_{\varkappa\varkappa} = 0,\ c_{\iota\varkappa} + c_{\varkappa\iota} = 0.$$

Sobald zwischen den Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ diese $n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen nicht sämtlich erfüllt sind, enthält die Gruppe alle Transformationen

$$(6)\quad p_\iota x_\iota - p_\varkappa x_\varkappa,\ p_\iota x_\varkappa \qquad \text{für } \iota \gtreqless \varkappa.$$

Sind die Koefficienten $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ nicht sämtlich gleich null, so treten noch die n Transformationen hinzu

$$(7)\quad a_0 p_0 x_\varkappa - b_0 p_\varkappa x_0, \qquad (\varkappa = 1 \ldots n)$$

wo die Konstanten a_0 und b_0 für alle Marken $\varkappa$ dieselben Werte haben. Damit keine weiteren Transformationen der Gruppe angehören, müssen die Gleichungen bestehen:

$$(8)\quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} \left(= \frac{a_0}{b_0}\right).$$

Wofern diese Bedingungen nicht erfüllt sind, ist die Gruppe die allgemeine projektive Gruppe mit $n(n+2)$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen.

Um diesen Satz zu erweisen, wähle ich aus den Marken $1 \ldots n$ ein Paar μ, ν aus und kombiniere die Transformation (4) mit $W_{\mu\nu}$ Hierdurch möge ich die neue Transformation T_1 erhalten; diese mit $W_{\mu\nu}$ kombiniert, liefere T_2, und daraus werde auf dieselbe Weise T_3 erhalten. Indem ich T_1 und T_3 addiere, finde ich die Transformation

$$(c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu})(p_\mu x_\mu - p_\nu x_\nu) - (c_{\mu\mu} - c_{\nu\nu})(p_\mu x_\nu + p_\nu x_\mu),$$

aus der durch Kombination mit $W_{\mu\nu}$ hervorgeht:

$$(c_{\mu\mu} - c_{\nu\nu})(p_\mu x_\mu - p_\nu x_\nu) + (c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu})(p_\mu x_\nu + p_\nu x_\mu).$$

Wenn also die Bedingungen (5) für die Marken μ und ν nicht erfüllt sind, so enthält die Gruppe die Transformationen

$p_\mu x_\mu - p_\nu x_\nu$ und $p_\mu x_\nu + p_\nu x_\mu$ und somit, wie sich aus der Zusammenstellung mit $W_{\mu\nu}$ ergiebt, die Transformationen $p_\mu x_\nu$ und $p_\nu x_\mu$. Indem man diese beiden mit $W_{\mu\varkappa}$ und $W_{\nu\varkappa}$ kombiniert, findet man $p_\mu x_\varkappa$, $p_\varkappa x_\mu$, $p_\nu x_\varkappa$, $p_\varkappa x_\nu$ für jeden Wert von $\varkappa$ $(= 1 \ldots n)$. Kombiniert man diese noch mit $W_{\mu\lambda}$, so wird man auf die Transformationen $p_\varkappa x_\lambda$ geführt. Die Kombination von $p_\varkappa x_\lambda$ und $p_\lambda x_\varkappa$ liefert aber $p_\varkappa x_\varkappa - p_\lambda x_\lambda$. Daher sind alle Transformationen (6) in der Gruppe enthalten, wenn nicht sämtliche Bedingungen (5) erfüllt sind.

Jetzt darf man die Transformation (4) in der Form voraussetzen:

$$p_0 \Sigma a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \Sigma b_\varkappa p_\varkappa + c\,(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n).$$

Denn, wofern die Bedingungen (5) allgemein erfüllt sind, kann man die neue Form erhalten, indem man die Transformationen $W_{\iota\varkappa}$ mit geeigneten Koefficienten multipliziert und von (4) subtrahiert. Genügen aber die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ nicht allen Bedingungen (5), so darf man die Transformationen (6) von (4) abziehen und ihr auf diese Weise die vorgeschriebene Form geben.

Die zweimalige Kombination der so gefundenen Transformation mit $W_{\varkappa\lambda}$ führt auf die beiden Transformationen

$$(9)\quad \begin{cases} a_\varkappa p_0 x_\lambda + b_\varkappa x_0 p_\lambda - a_\lambda p_0 x_\varkappa - b_\lambda p_\varkappa x_0 \\ a_\varkappa p_0 x_\varkappa + b_\varkappa x_0 p_\varkappa + a_\lambda p_0 x_\lambda + b_\lambda p_\lambda x_0. \end{cases}$$

Durch Kombination dieser beiden Transformationen mit einander erhalten wir die weitere Transformation:

$$(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa)\,(p_\varkappa x_\varkappa + p_\lambda x_\lambda - 2 x_0 p_0) + (a_\varkappa b_\varkappa + a_\lambda b_\lambda)\, W_{\varkappa\lambda}.$$

Wenn hier $a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa$ nicht gleich null ist, so ist in der Gruppe die Transformation

$$p_\varkappa x_\varkappa + p_\lambda x_\lambda - 2 x_0 p_0 \quad \text{oder} \quad p_\varkappa x_\varkappa + p_\lambda x_\lambda + 2\,(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)$$

enthalten, mit der sich nach dem bereits Bewiesenen alle Transformationen $p_\iota x_\varkappa$ für ungleiche Marken ι, $\varkappa$ vereinigen. Durch die Kombination von $p_\varkappa x_\lambda$ mit (9) gelangt man aber zu $p_0 x_\varkappa$ und $p_\varkappa x_0$.

Sind aber allgemein die Bedingungen (8) erfüllt, so leitet man unmittelbar aus den Transformationen (9) die Transformationen (7) her.

Damit ist der Satz in allen seinen Teilen bewiesen.

3. Lehrsatz. Wenn für $n = 2$ neben der Transformation

$W = p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0$ bei nicht verschwindendem Werte von l noch eine Transformation

$$T = p_0 \sum a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \sum b_\varkappa x_\varkappa + \sum c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2)$$

in einer Gruppe vorkommt, so enthält die Gruppe die Transformationen $p_0 x_1$ und $p_0 x_2$, wofern nicht die Koefficienten a_1 und a_2 beide verschwinden. Ebenso gehören die Transformationen $p_1 x_0$ und $p_2 x_0$ der Gruppe an, wenn einer der Koefficienten b_1 und b_2 von null verschieden ist. Sobald aber sowohl unter den Koefficienten a_1 und a_2 wie unter den Koefficienten b_1 und b_2 einer von null verschieden ist, enthält die Gruppe alle projektiven Transformationen.

Der Beweis wird am einfachsten, wenn in dem Ausdruck T die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ sämtlich verschwinden. In diesem Falle genügt es, T zweimal mit W zu kombinieren. Hierbei möge $T' = (TW)$, $T'' = (T'W)$ sein; die Koefficienten in T' mögen mit einem, die in T'' mit zwei Strichen versehen werden. Dann ist $c_{\iota\varkappa}' = c_{\iota\varkappa}'' = 0$, und

$$\begin{aligned}
a_1' &= -a_2 - la_1, & a_1'' &= (l^2 - 1)\, a_1 + 2la_2\\
a_2' &= a_1 - la_1, & a_2'' &= (l^2 - 1)\, a_2 - 2la_1\\
b_1' &= -b_2 + lb_1, & b_1'' &= (l^2 - 1)\, b_1 - 2lb_2\\
b_2' &= b_1 + lb_2, & b_2'' &= (l^2 - 1)\, b_2 + 2lb_1.
\end{aligned}$$

Jetzt multipliziert man die Form T mit $1 + l^2$, T' mit $2l$ und addiert sie zu T''. Dadurch erhält man bis auf den Faktor $4l$ die Transformation:

$$(-b_2 + lb_1)\, x_0 p_1 + (b_1 + lb_2)\, x_0 p_2,$$

aus der man durch Kombination mit W eine ähnliche Transformation herleitet. Da die aus den Koefficienten gebildete Determinante nur verschwindet, wenn b_1 und b_2 beide null sind, so enthält die gegebene Gruppe die beiden Transformationen $x_0 p_1$ und $x_0 p_2$, wofern wenigstens einer der Koefficienten b_1 und b_2 von null verschieden ist. Dasselbe gilt von den Transformationen $p_0 x_1$ und $p_0 x_2$, sobald nicht beide Koefficienten a_1 und a_2 verschwinden.

Wenn jetzt die beiden Ausdrücke $a_1^2 + a_2^2$ und $b_1^2 + b_2^2$ von null verschieden sind, so müssen in der Gruppe die Transformationen $p_0 x_1$, $p_0 x_2$, $x_0 p_1$, $x_0 p_2$ enthalten sein. Von ihnen gelangt man leicht zu den Transformationen $p_1 x_1 - p_0 x_0$, $p_2 x_2 - p_0 x_0$, $x_1 p_2$, $x_2 p_1$. Die Gruppe ist also die allgemeine projektive Gruppe einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Wir müssen den Satz jetzt noch für den Fall beweisen, dafs die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ nicht sämtlich verschwinden. Auch in diesem Falle kombiniert man T wieder mehrmals mit W, bildet also die Transformation $T' = (TW)$, $T'' = (T'W)$, $T''' = (T''W)$. Dabei hangen jedesmal auch die neuen Koefficienten $a_\varkappa$ nur von a_1 und a_2, $b_\varkappa$ nur von b_1 und b_2, $c_{\iota\varkappa}$ nur von c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} ab; die Art der Abhängigkeit für die ersten Koefficienten ist dieselbe, welche vorhin angegeben ist. Addiert man jetzt T' und T''', so erhält man eine Transformation

$$T_1 = p_0 \Sigma A_\varkappa x_\varkappa + x_0 \Sigma B_\varkappa p_\varkappa + e_1 (p_1 x_1 - p_2 x_2) + e_2 (p_1 x_2 - p_2 x_1),$$

worin $e_1 = c_{12} + c_{21}$, $e_2 = c_{22} - c_{11}$ ist, A_1 und A_2 nur beide verschwinden, wenn $a_1 = a_2 = 0$ ist, und entsprechendes für B_1 und B_2 gilt. Auch T_1 wird zweimal mit W kombiniert und die zuletzt erhaltene Transformation zu der mit 4 multiplizierten Form T_1 addiert. Dadurch werden die Koefficienten der $p_\iota x_\varkappa$ (für $\iota, \varkappa = 1, 2$) sämtlich gleich null; dagegen wird der Koefficient von $p_0 x_1$: $(l^2 + 3) A_1 + 2lA_2$, der von $p_0 x_1$: $(l^2 + 3) A_2 - 2lA_1$, und die Koefficienten von $p_1 x_0$ und $p_2 x_0$ sind ähnlich. Demnach können auch die Koefficienten von $p_0 x_1$ und $p_0 x_2$ nur gleichzeitig verschwinden, wenn A_1 und A_2 und damit a_1 und a_2 gleichzeitig null sind. Wir sehen also, dafs die Gruppe, falls nicht die vier Koefficienten a_1, a_2, b_1, b_2 verschwinden, eine projektive Transformation enthält, in deren Ausdruck die Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ gleich null sind. Es ist also gestattet, diese Transformation statt der gegebenen der weitern Untersuchung zu Grunde zu legen.

4. Nach diesen Vorbereitungen weisen wir folgenden Satz nach:

Soll eine projektive Gruppe, durch welche eine Ebene in sich transformiert wird, im stande sein, eine durch einen festen Punkt gehende Gerade in jede andere durch denselben Punkt gelegte Gerade überzuführen, und sollen zudem nicht alle ihre Transformationen den gewählten Punkt in Ruhe lassen, so hängt sie mindestens von drei Parametern ab; alle dreigliedrigen Gruppen, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, lassen sich entweder durch die drei Transformationen

$$p_1 x_2 - p_2 x_1, \quad x_0 p_1 - k x_1 p_0, \quad x_0 p_2 - k x_2 p_0$$

oder durch

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0, \quad x_0 p_1, \quad x_0 p_2$$

bestimmen.

Indem wir einen in der Funktionentheorie gebräuchlichen Ausdruck benutzen, können wir die aufgestellte Forderung auch in die Worte kleiden: Alle Geraden der Ebene, die in der Umgebung eines festen Punktes liegen, sollen durch die Transformationen der Gruppe in einander übergeführt werden können. Um zu beweisen, dafs die Gruppe von niedrigster Gliederzahl, welche dieser Forderung genügt, auf eine der beiden angegebenen Formen hinauskommt, gebrauchen wir Linienkoordinaten und stellen den festen Punkt durch die Gleichung $u_0 = 0$ dar. Da es möglich sein soll, die Geraden in einander überzuführen, die durch den Punkt $u_0 = 0$ gehen, mufs die Gleichung eine Transformation von der Form

$$(10) \quad u_0 \, (b_0 r_0 + b_1 r_1 \; b_2 r_2) + \Sigma c_{\iota\varkappa} r_\iota u_\varkappa$$

enthalten. Durch Addition der mit einem geeigneten Faktor multiplizierten Form $r_0 u_0 + r_1 u_1 + r_2 u_2$ können wir bewirken, dafs $c_{11} + c_{22} = 0$ wird, und da die Gleichung $(\omega - c_{11})(\omega - c_{22}) - c_{12} c_{21} = 0$ keine reelle Wurzel besitzen soll, mufs die Determinante $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$ positiv sein; sie kann also, da man alle Koefficienten in (10) mit demselben Faktor multiplizieren darf, gleich eins gemacht werden. Ersetzt man jetzt u_1 durch $c_{12} u_1$, u_2 durch $u_2 - c_{11} u_1$, und demnach r_1 durch $r_1 + c_{11} r_2$, r_2 durch $c_{12} r_2$, so geht die Transformation (10) über in

$$u_0 \, (b_0 r_0 + b_1 r_1 + b_2 r_2) + r_1 u_2 - r_2 a_1,$$

wo allerdings die Koefficienten b nicht mehr die früheren Werte zu besitzen brauchen. Hier darf man u_0 ungeändert lassen, u_1 durch $u_1 + \alpha u_0$, u_2 durch $u_2 + \beta u_0$ ersetzen, wofern man noch r_1 und r_2 beibehält und r_0 mit $r_0 - \alpha r_1 - \beta r_2$ vertauscht. Dann kann man α und β so bestimmen, dafs die vorstehende Transformation die Form annimmt:

$$r_1 u_2 - r_2 u_1 - l u_0 r_0.$$

Indem wir jetzt von den Linienkoordinaten zu Punktkoordinaten übergehen, sehen wir, dafs die Gruppe die Transformation enthält:

$$(11) \quad p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0.$$

Da die Gruppe den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ in andere Lagen überführen soll, mufs sie eine Transformation von der Form (4) enthalten, worin die Koefficienten b_1 und b_2 nicht beide gleich null sind. Auf die neue Transformation wende man die in den beiden letzten Paragraphen bewiesenen Sätze an. Dann folgt aus 2. für $l = 0$, dafs zu der Transformation (11) mindestens die Transformationen

$$p_1 x_0 - k p_0 x_1 \text{ und } p_2 x_0 - k p_0 x_2$$

hinzukommen, während der unter 3. bewiesene Satz uns zeigt, dafs die Gruppe mindestens noch die Transformationen $p_1 x_0$ und $p_2 x_0$ enthalten mufs. (Für einen verschwindenden Wert von l beachte man hierbei, dafs der in 2. benutzte Koefficient b_0 nicht gleich null sein kann; man darf ihn also durch eins und a_0 durch $-k$ ersetzen.)

5. Lehrsatz. Wenn durch die Transformationen einer Gruppe alle Geraden der Ebene in einander übergeführt werden können, so wird die Gruppe entweder bei passender Wahl der Veränderlichen durch die drei Transformationen

$$p_1 x_2 - p_2 x_1,\ p_0 x_1 - p_1 x_0,\ p_0 x_2 - p_2 x_0$$

bestimmt, oder sie ist die allgemeine projektive Gruppe in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Wie wir in der vorigen Nummer gesehen haben, kann eine infinitesimale Transformation der Gruppe auf die Form gebracht werden:

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0.$$

Zudem mufs die Gruppe mindestens eine Transformation von der Form (4) enthalten, worin die Koefficienten b_1 und b_2 nicht beide verschwinden. Wenn hier l von null verschieden ist, so entlehnen wir der Nummer 3 den Satz, dafs die Gruppe entweder noch die Transformationen $p_1 x_0$ und $p_2 x_0$ oder aufser diesen beiden noch die Transformation $p_0 x_0$ oder endlich alle projektiven Transformationen enthält. Sie ist also entweder dreigliedrig und wird durch die Transformationen

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0,\ p_1 x_0,\ p_2 x_0$$

bestimmt; oder sie ist viergliedrig und enthält die Transformationen $p_1 x_2 - p_2 x_1$, $p_0 x_0$, $p_1 x_0$, $p_2 x_0$, oder sie ist die allgemeine projektive Gruppe mit acht willkürlichen Parametern. Die beiden ersten Fälle müssen aber ausgeschlossen werden, weil dann die Ebene $x_0 = 0$ durch die Transformationen der Gruppe keine Veränderung erleidet.

Für einen verschwindenden Wert von l wenden wir den in 2. bewiesenen Satz an, nach welchem entweder die Transformationen

$p_1x_0 - kp_0x_1$ und $p_2x_0 - kp_0x_2$ hinzukommen oder die Gruppe durch die vier Transformationen $p_1x_2 - p_2x_1$, p_1x_0, p_2x_0, p_0x_0 bestimmt wird oder drittens die allgemeine projektive Gruppe ist. Der zweite Fall ist bereits soeben erledigt. Wird im ersten Falle $k = 0$, so bleibt die Gerade $x_0 = 0$ bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert. Für einen nicht verschwindenden Wert von k transformiert die zuerst angegebene Gruppe den Kegelschnitt

$$\frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

nur in sich. Die Tangenten dieses Kegelschnitts müssen daher auch in jeder durch die Transformationen der Gruppe erhaltenen neuen Lage wieder diesen Kegelschnitt berühren. Damit diese geraden Linien, deren Beweglichkeit eine beschränkte ist, imaginär werden, mufs der Koefficient k positiv sein. Dann kann man aber durch eine leichte Änderung von x_0 bewirken, dafs dieser Koefficient gleich eins wird. Es bleiben also nur die beiden im Lehrsatz angegebenen Möglichkeiten.

6. Aus dem vorstehenden Satze folgt unmittelbar der folgende:

Eine projektive Gruppe des Raumes, deren Transformationen im stande sind, alle durch einen festgewählten Punkt gehenden Ebenen in einander überzuführen, enthält drei unendlich kleine Transformationen, die man bei passender Wahl der Koordinaten in der Form schreiben kann:

$$p_2x_3 - p_3x_2,\ p_3x_1 - p_1x_3,\ p_1x_2 - p_2x_1.$$

Man kann noch hinzufügen, dafs die Gruppe entweder diese drei Transformationen oder für ungleiche Marken ι, $\varkappa$ die sämtlichen Transformationen $p_\iota x_\varkappa$ und $p_\iota x_\iota - p_\varkappa x_\varkappa$ enthält.

Statt diesen Satz auf den vorangehenden zurückzuführen, kann man ihn ebenso leicht direkt beweisen; dabei vermeidet man es, den Raum als Ganzes des Untersuchung zu Grunde zu legen.

7. Hiernach ist es sehr leicht, folgenden Satz zu erhärten:

Die niedrigste projektive Gruppe des Raumes, die geeignet ist, alle in der Umgebung eines festen Punktes liegenden Ebenen in einander überzuführen, ist sechsgliedrig; die sechs sie bestimmenden Transformationen können in der Form geschrieben werden:

$$(13)\quad p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota,\ p_\varkappa x_0 - kp_0x_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

wo der Konstanten k jeder endliche reelle Wert beigelegt werden kann.

Aus der Forderung, dafs alle durch den festen Punkt gelegten Ebenen in einander übergeführt werden können, ergiebt sich, indem man die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ durch diesen Punkt gehen läfst, dafs die Gruppe die drei an erster Stelle genannten Transformationen enthält. Es sollen aber diese Ebenen durch die Transformationen der Gruppe auch solche Lagen erhalten, bei denen sie nicht mehr durch den Punkt (1, 0, 0, 0) hindurchgehen. Daher mufs der Gruppe mindestens eine Transformation von der Form (4) angehören, worin die Koefficienten b_1, b_2, b_3 nicht sämtlich gleich null sind. Wie wir unter 2. nachgewiesen haben, mufs die Gruppe mindestens noch die drei Transformationen (7) enthalten, und hierin kann, da die Konstante b_0 von null verschieden ist, $b_0 = 1$, $a_0 = -k$ gesetzt werden.

8. Jetzt bestimmen wir eine projektive Gruppe des Raumes durch die beiden Festsetzungen:

a) Die Transformationen der Gruppe sollen im stande sein, alle in der Umgebung eines festen Punktes gelegenen Ebenen in einander überzuführen;

b) unter allen dieser Bedingung genügenden Gruppen soll die auszuwählende eine möglichst kleine Gliederzahl haben.

Jede derartige Gruppe ist sechsgliedrig und kann in der Form (13) dargestellt werden, wo die Konstante k noch jeden reellen Wert erhalten kann. Jetzt beschränken wir uns nur auf Transformationen, welche dieser Gruppe angehören.

Eine stetige Folge ihrer Transformationen soll eine starre Bewegung genannt werden. (Die Hinzunahme des Wortes »starr« dürfte notwendig sein, da das Wort Bewegung auch bei beliebigen Transformationen nicht gut entbehrt werden kann.) Zwei Gebilde heifsen kongruent, wenn sie durch eine starre Bewegung in einander übergeführt werden können; mit anderen Worten: Beschränken wir die Variabeln (x) auf diejenigen Wertsysteme, die zu den Punkten eines gewissen Gebildes gehören, führen wir dann diese Variabeln durch eine der Gruppe angehörende Transformation in die Variabeln (y) über, so bestimmt die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Wertsysteme (y) die Punkte eines neuen Gebildes, das zu dem ersten kongruent ist. Die Fläche, auf der bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter noch bewegt werden kann, heifst eine Kugel. Von zwei Punktepaaren, die mit einander zur Deckung gebracht werden können, sagen wir, sie hätten gleichen Abstand. Um noch die Messung des Abstandes zu ermöglichen, setzen wir fest, dafs der Abstand AC gleich der Summe der Abstände AB und BC sein soll, wenn der Punkt B auf der Geraden AC zwischen den Punkten A und C liegt. Diese Festsetzung kommt auf die folgende hinaus: Wenn eine infinitesimale Transformation

$$(14)\quad dx_\alpha = dt \sum_\beta A_{\alpha\beta} x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1 \ldots n)$$

eine Gerade in sich verschiebt, so mufs die unendlich kleine Strecke, welche von einem Punkte dieser Geraden beschrieben wird, der Gröfse dt proportional sein; und wenn man die Veränderungen durch die Variabele t ausdrückt, so ist auch diese Gröfse der von jedem einzelnen Punkte der Geraden beschriebenen Länge proportional.

In entsprechender Weise wird man sagen, zwei zusammenstofsende Linien a_1 und a_2 bildeten denselben Winkel wie die Geraden b_1 und b_2, wenn das Geradenpaar (a_1, a_2) zur Deckung mit dem Paare (b_1, b_2) gebracht werden kann. Daraus folgt wieder, dafs in einer infinitesimalen Transformation von der Form (14), die einen Punkt O in Ruhe läfst und eine durch ihn gelegte Ebene in sich verschiebt, die Gröfse dt dem unendlich kleinen Winkel proportional gesetzt werden mufs, den eine in der Ebene von O ausgehende Gerade bei dieser Bewegung beschreibt.

Hiernach ist es möglich, die Grundbegriffe der metrischen Geometrie auf Begriffe zurückzuführen, welche einen rein projektiven Charakter haben. Da für diese Begriffe aber diejenigen Voraussetzungen gelten, von denen die Metrik ausgeht, so mufs man von ihnen aus auch zu denselben Ergebnissen gelangen.

9. Indessen ist es weit leichter, dies direkt aus den Sätzen der Projektivität herzuleiten. Dabei haben wir zu unterscheiden, ob der Koefficient k verschwindet oder gröfser oder kleiner als null ist.

Für $k = 0$ ist auch dx_0 stets gleich null; es ist also gestattet, $x_0 = 1$ zu setzen. Die aus der infinitesimalen Transformation $x_0 p_1$ hervorgehende eingliedrige Gruppe läfst die Koordinaten x_2 und x_3 ungeändert und verändert alle x_1 um dieselbe Gröfse t.

Alle Punkte bewegen sich in geraden Linien und legen darin gleiche Strecken zurück. Dasselbe gilt von den Transformationen, welche bei beliebigem Werte von t durch die Gleichungen angegeben werden:

$$y_1 = x_1 + a_1 t,\ y_2 = x_2 + a_2 t,\ y_3 = x_3 + a_3 t.$$

Aus der infinitesimalen Transformation $p_2 x_3 - p_3 x_2$ ergiebt sich durch einfache Integration:

$$y_2 = x_2 \cos t + x_3 \sin t,\ y_3 = -x_2 \sin t + x_3 \cos t,\ y_1 = x_1.$$

Hierbei wird jeder Punkt der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ in Ruhe bleiben und jede Ebene $x_1 = c$ für einen beliebigen Wert von c in sich verschoben. Beschränken wir die Variabeln (x) auf die Punkte einer Geraden, die von einem Punkte der Linie $x_2 = x_3 = 0$ ausgeht und in der Ebene $x_1 = c$ liegt, so werden die entsprechenden Werte (y) ebenfalls zu den Punkten einer derartigen Geraden gehören; die Gröfse t giebt den Winkel zwischen der ersten und zweiten Geraden an. Hieraus erkennen wir, indem wir $t = \frac{\pi}{2}$ setzen, dafs die Schnittlinien einer solchen Ebene $x_1 = c$ mit den beiden Ebenen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ auf einander senkrecht stehen. Speciell bilden irgend zwei Koordinatenachsen rechte Winkel mit einander, und da die Ebene $x_1 = c$ bei der Ruhe der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ in sich verschoben wird, so steht die x_1-achse auf allen Geraden senkrecht, die in der Ebene $x_1 = c$ durch ihren Schnittpunkt mit der Achse gezogen werden können. Um daher den Wert von x_1 für irgend einen Punkt zu bestimmen, lege man durch ihn eine Ebene, welche auf der x_1-achse senkrecht steht, und messe das Stück, welches hierdurch vom Anfangspunkte an ausgeschnitten wird. Ebenso bestimmt man die Werte der anderen Koordinaten.

Mit der Ebene $x_1 = 0$ werden auch alle Ebenen $x_1 = c_1$ in sich verschoben. Hierbei kann man der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ jede Lage $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$ für beliebige Werte c_2 und c_3 geben. Folglich steht auch die letztere Gerade auf allen Ebenen $x_1 = c_1$ senkrecht. Hiernach können die Koordinaten auch definiert werden als die Längen der Senkrechten, die von dem zu bestimmenden Punkte auf die Koordinaten-Ebenen gefällt werden.

Durch die letzte Betrachtung ist die Existenz eines Rechtecks als eines Vierecks mit lauter rechten Winkeln bewiesen; hieraus läfst sich leicht herleiten, dafs die Winkelsumme in jedem Dreieck zwei Rechte beträgt. Wir sehen also, dafs der hier skizzierte Weg für $k = 0$ zur parabolischen Geometrie führt.

10. In ähnlicher Weise kann man für einen von null verschiedenen Wert von k verfahren; indessen ziehen wir es vor, einen etwas abweichenden Weg einzuschlagen.

Da sich der Ausdruck

$$\frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

bei keiner Transformation der Gruppe ändert, so setze man ihn gleich $\frac{1}{k}$, wodurch man erreicht, dafs der Anfangspunkt die Koordinaten $(1, 0, 0, 0)$ bekommt. Zugleich bleibt für irgend zwei Punkte (x) und (x') der Ausdruck

$$\frac{x_0 x_0'}{k} + x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'$$

bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert; er stellt also für alle Punktepaare dieselbe Funktion des Abstandes dar. Um diese Funktion zu bestimmen, betrachte man die Verschiebung der Geraden $x_2 = x_3 = 0$ in sich, oder mit anderen Worten, man löse das durch das Symbol $x_0 p_1 - k x_1 p_0$ vertretene System von Differentialgleichungen:

$$dx_1 = x_0 dt, \; dx_0 = - k x_1 dt.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x_1 = a \cos (t \sqrt{k}) + b \sin (t \sqrt{k}),$$
$$x_0 = - a \sqrt{k} \sin (t \sqrt{k}) + b \sqrt{k} \cos (t \sqrt{k}),$$

wo a und b willkürliche Konstanten sind. Um die Länge der Strecke zu bestimmen, welche der Anfangspunkt $(1, 0, 0, 0)$ hierbei beschreibt, mufs für $t = 0$ sein $x_1 = 0$, $x_0 = 1$. Danach wird $x_0 = \cos t\sqrt{k}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin (t\sqrt{k})$. Setzt man also in dem obigen Ausdruck für (x') das Wertsystem $(1, 0, 0, 0)$ und für (x) das System $(\cos [t\sqrt{k}], \frac{1}{\sqrt{k}} \sin [t\sqrt{k}], 0, 0)$ ein, so folgt allgemein:

$$(15) \quad \frac{x_0 x_0'}{k} + x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' = \frac{1}{k} \cos (e\sqrt{k}),$$

wo e den Abstand der beiden Punkte bezeichnet.

Beiläufig folgt hieraus, dafs für jeden Punkt die Koordinate x_0 gleich ist $\cos(e\sqrt{k})$, wo der Abstand des zu bestimmenden Punktes vom Anfangspunkte gleich e gesetzt ist.

In entsprechender Weise darf man zwischen den Koordinaten u_0, u_1, u_2, u_3 einer Ebene die Beziehung

$$ku_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

festsetzen, so dafs die drei Koordinaten-Ebenen zu den Wertsystemen (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) gehören. Dann wird der Winkel φ der beiden Ebenen (u) und (u′) durch die Gleichung

$$ku_0 u_0' + u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3' = \cos\varphi$$

bestimmt. Die Koordinaten u_1, u_2, u_3 einer Ebene geben also den Kosinus der Winkel an, unter denen sie von den einzelnen Koordinaten-Ebenen geschnitten wird.

Hieraus ergiebt sich ferner der Satz: Wenn zwei sich schneidende Ebenen auf derselben dritten Ebene senkrecht stehen, so bildet auch jede durch die Schnittlinie gelegte Ebene mit der dritten gleiche Winkel. In entsprechender Weise folgt, dafs jede Koordinaten-Achse auf allen Geraden senkrecht steht, die in der die Achse nicht enthaltenden Koordinaten-Ebene durch den Anfangspunkt gezogen werden.

Da der Ausdruck

$$x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

für alle Transformationen der Gruppe unverändert bleibt, so stellt er eine feste Beziehung des Punktes (x) zur Ebene (u) dar. Wählt man speciell $u_0 = u_2 = u_3 = 0$, $u_1 = 1$, und $x_2 = x_3 = 0$, so geht der Ausdruck in $x_1 = \frac{\sin(e\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$ über, wo e den senkrechten Abstand des Punktes von der Ebene darstellt. Somit ist allgemein:

$$x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = \frac{\sin(e\sqrt{k})}{\sqrt{k}},$$

wenn der senkrechte Abstand des Punktes (4) von der Ebene (u) gleich e gesetzt wird. Wählt man zur Ebene (u) der Reihe nach eine der Koordinaten-Ebenen, so erhält man die Bedeutung von x_1, x_2, x_3; dagegen findet man die Bedeutung von u_0, wenn man für den Punkt (x) den Anfangspunkt (1, 0, 0, 0) nimmt.

Um die trigonometrischen Formeln für ein rechtwinkliges Dreieck zu erhalten, kann man die Formeln benutzen, nach denen eine Koordinaten-Ebene bei der Ruhe des Anfangspunktes in sich verschoben wird. Auch liefert die Formel (15) eine Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn man die Punkte (x') und (x'') auf verschiedenen Koordinaten-Achsen wählt. Aus den so gewonnenen Formeln kann man die Trigonometrie vollständig herleiten.

Wir sind somit wieder zu den Raumformen gelangt, die wir im ersten Abschnitt (B. 1. S. 19 - 89) hergeleitet haben. Um auch im Äufsern volle Übereinstimmung herbeizuführen, hat man die hier benutzte Gröfse k nach ihrem Vorzeichen durch $\frac{1}{k^2}$ oder durch $-\frac{1}{k^2}$ zu ersetzen.

11. In dem Falle, dafs die Konstante k von null verschieden ist, kann man den Abstand zweier Punkte und den Winkel zweier Ebenen auch in einer Weise einführen, welche den Vorzug hat, dafs sie von den Transformations-Gruppen nur geringen Gebrauch macht und direkt an die Grundlagen der projektiven Geometrie anknüpft, aber insofern hinter dem skizzierten Wege zurücksteht, als sie uneigentliche und sogar imaginäre Wertsysteme benutzt und sich dadurch von einem rein geometrischen Standpunkt entfernt. Zwar ist dieser Weg im wesentlichen bereits im ersten Bande (S. 151—155) angegeben; der veränderte Ausgangspunkt nötigt uns aber, ihn nochmals zu besprechen.

Die sämtlichen Transformationen unserer Gruppe lassen die Form

$$\frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ungeändert; umgekehrt ist unsere Gruppe durch die Forderung, diese Form nicht zu ändern, eindeutig bestimmt. Demnach gehen die Wertsysteme (x), welche der Gleichung:

$$(16)\quad \frac{x_0^2}{k} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

genügen, nur in solche Wertsysteme über, für welche diese Gleichung gültig bleibt. Wir sagen daher, alle diese Wertsysteme gehören dem unendlich fernen Gebilde an.

Sind (x') und (x'') die Koordinaten zweier (eigentlicher)

Punkte, so suche man diejenigen Werte von λ, welche der Gleichung genügen:

$$(17)\quad \frac{(x_0'+\lambda x_0'')^2}{k} + (x_1'+\lambda x_1'')^2 + (x_2'+\lambda x_2'')^2 + (x_3'+\lambda x_3'')^2 = 0.$$

Das Wertsystem y, welches für einen dieser beiden Werte von λ den Gleichungen genügt:

$$\varrho y_\alpha = x_\alpha' + \lambda x_\alpha'' \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

befriedigt erstens die Gleichung (16) und zweitens die Gleichungen sämtlicher Ebenen, welche durch die Punkte (x') und (x'') gelegt werden können; im uneigentlichen Sinne dürfen wir also sagen, jedes solche Wertsystem stelle einen Schnittpunkt der durch (x') und (x'') gelegten Geraden mit dem unendlich fernen Gebilde dar. Sind (x'), (x''), $(x' + \lambda_1 x'')$, $(x' + \lambda_2 x'')$ die Koordinaten von vier eigentlichen Punkten, so giebt der Quotient $\lambda_1 : \lambda_2$ den Wert des Doppelverhältnisses der vier Punkte an; ebenso soll jetzt, wenn λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung (17) sind, dieser Quotient als das Doppelverhältnis der Punkte (x') und (x'') zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit der unendlich fernen Fläche bezeichnet werden. Diese Gröfse $\lambda_1 : \lambda_2$ bleibt aber bei allen Transformationen ungeändert, welche unserer Gruppe angehören; wir bringen sie daher in Zusammenhang mit dem Abstand der beiden Punkte. Da bei der Vertauschung der Punkte (x') und (x'') das Doppelverhältnis seinen reciproken Wert annimmt, der Abstand aber nur sein Zeichen ändern soll, so setzen wir den Abstand A unter Einführung einer festen Konstante c gleich

$$A = c.ln\ (\lambda_1 : \lambda_2);$$

speciell möge $c = \frac{1}{2i\sqrt{k}}$ angenommen werden.

Ebenso verfährt man mit zwei Ebenen (u') und (u''), die sich in einer Geraden schneiden. Man legt durch die Schnittlinie die beiden Tangentialebenen an die unendlich ferne Fläche, d. h. man bestimmt die beiden Werte μ_1 und μ_2 von μ, welche für $v_\alpha = u_\alpha' + \mu u_\alpha''$ der Gleichung genügen:

$$kv_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Ebenen ist gleich $\mu_1 : \mu_2$ und definiert den Winkel φ der beiden Ebenen durch die Gleichung

$$\varphi = c.ln\ (\mu_1 : \mu_2),$$

wo speciell $c = \frac{1}{2i}$ gesetzt werden kann.

§ 5.

Projektivität und Bewegung. Elementare Entwicklung.

1. Schon in II § 7—9 (B. 1. S. 128—149) ist unter Benutzung der projektiven Eigenschaften des Raumes nachgewiesen worden, dafs man den Sätzen der Metrik auf drei verschiedene Weisen genügen kann, und dafs man somit auch von der Projektivität aus zu den nichteuklidischen Raumformen gelangt. Der Weg, der dort in § 8 eingeschlagen wurde, ist aber, wie ich ausdrücklich hervorgehoben habe, recht lästig. Nun habe ich gesehen, dafs an dem mitgeteilten Beweise nur leichte Änderungen angebracht zu werden brauchen, um ihn ganz einfach und übersichtlich zu machen. Indem ich also den Inhalt von II § 7 als bekannt voraussetze, will ich die weitere Herleitung in voller Ausführlichkeit hersetzen.

Beim Beweise benutzen wir folgende Sätze:

a) Wenn eine Ebene um einen ihrer Punkte in sich gedreht wird, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine geschlossene Linie, einen Kreis.

b) Verschiebt man einen Kreis längs eines Durchmessers, bis der eine Endpunkt auf den andern zu liegen kommt, so fällt auch die Tangente des ersten Punktes auf die des zweiten.

c) Von allen Tangenten eines Kreises schneidet ein konzentrischer Kreis, der den ersten umschliefst, vom Berührungspunkte aus gleiche Stücke ab.

Von diesen drei Sätzen wird der erste bei der Definition des Kreises vorausgesetzt; die beiden anderen folgen leicht aus den Kongruenzsätzen.

2. Wir denken eine Ebene um einen ihrer Punkte in sich gedreht. Indem wir den ruhenden Punkt zum Anfangspunkte des Koordinatensystems wählen, wird diejenige Lage (x', y'), welche irgend ein Punkt (x, y) durch die Bewegung erhält, bei konstanten Werten von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ durch die Gleichungen bestimmt:

$$(1)\quad x' = \frac{\alpha' x + \beta' y}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{\alpha'' x + \beta'' y}{\alpha x + \beta y + \gamma}.$$

Wenn die Gerade $x = uy$ durch diese Bewegung in die Lage $x' = u'y'$ gebracht wird, so besteht zwischen den Gröfsen u' und u die Gleichung:

$$(2) \quad u' = \frac{\alpha' u + \beta'}{\alpha'' u + \beta''}.$$

Durch eine Gleichung von derselben Form wurde in II § 7 die Veränderung angegeben, welche die Bestimmungsgröfse eines Punktes erleidet, wenn eine Gerade in sich verschoben wird. Da aber bei der Fortsetzung der Drehung jede durch den ruhenden Punkt gelegte Gerade in ihre Anfangslage zurückkehrt, mufs die Transformation (2) elliptisch sein. Wir können daher durch eine einfache Umänderung von u und u' erreichen, dafs $\alpha' = \beta'' = \sigma$, $\alpha'' = -\beta' = \tau$ wird. Dieselbe Umänderung dürfen wir mit den Werten von x und y, x' und y' vornehmen und können demnach, weil γ offenbar von null verschieden ist, die Gleichungen (1) durch die folgenden ersetzen:

$$(3) \quad x' = \frac{\sigma x - \tau y}{\alpha x + \beta y + 1}, \quad y' = \frac{\tau x + \sigma y}{\alpha x + \beta y + 1}.$$

Jetzt suchen wir eine lineare Form $Ax + By + C$, welche durch die Transformation (3) nur mit einem gewissen Faktor multipliziert wird, so dafs mit der Gleichung $Ax + By + C = 0$ auch die Gleichung $Ax' + By' + C = 0$ verbunden ist. Mit anderen Worten: Wir fragen uns, ob im idealen Teile des Raumes eine Gerade liegt, welche bei der Drehung in sich verschoben wird. Zur Bestimmung der Gröfsen A, B, C dienen die Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{aligned} A\sigma + B\tau + C\alpha &= A \\ -A\tau + B\sigma + C\beta &= B, \end{aligned}$$

aus denen sich nur ein einziges reelles System dieser Verhältnisse ergiebt. Indem wir jetzt setzen:

$$(5) \quad \xi = \frac{x}{Ax + By + C}, \quad y = \frac{y}{Ax + By + C},$$

folgt entsprechend:

$$\xi' = \frac{x'}{Ax' + By' + C} = \frac{\sigma x - \tau y}{(A\sigma + B\tau + Cx) + (-A\tau + B\sigma + C\beta)y + C}.$$

Unter Berücksichtigung von (4) geht diese Gleichung und die entsprechende für η über in:

$$\xi' = \sigma\xi - \tau\eta, \quad \eta' = \tau\xi + \sigma\eta.$$

Hier ersetze ich σ durch $\varrho \cos \lambda$, τ durch $\varrho \sin \lambda$ und denke mir die Bewegung wie in II § 7 unbegrenzt fortgesetzt. Dann mufs der Punkt in seine Anfangslage zurückkehren; es mufs also für gewisse Werte von ϱ und λ werden $x' = x$, $y' = y$ und damit auch $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$. Das ist nur möglich für $\varrho = 1$, $\lambda = 2m\pi$ bei einem ganzzahligen Werte von m. Da aber bei der Wiederholung der Bewegung ϱ mit einem Exponenten, λ nur mit einem Faktor versehen wird, so sind die Transformations-Gleichungen in den neuen Gröfsen:

$$(6) \quad \xi' = \xi \cos \lambda - \eta \sin \lambda, \; \eta' = \xi \sin \lambda + \eta \cos \lambda.$$

Zugleich wird die Gleichung eines jeden Kreises, der den Anfangspunkt zum Mittelpunkt hat:

$$(7) \quad \xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

Mit diesem Kreise hat die Gerade $\xi = a$ nur den Punkt $(a, 0)$ gemeinschaftlich; sie ist Tangente an ihn. Derselbe Kreis wird von der Geraden $\xi = -a$ berührt.

3. Da die Gröfsen ξ und η gebrochene lineare Funktionen von x und y sind, welche denselben Nenner haben, so werden auch in ihnen die projektiven Umgestaltungen durch gebrochene lineare Funktionen dargestellt. Verschieben wir die Ebene längs der Achse $\eta=0$, so hat die Gleichung, durch welche die Veränderung von ξ in dieser Geraden angegeben wird, entweder die Form:

$$\frac{\xi' - \alpha}{\xi' - \beta} = \varrho \frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta} \text{ oder } \frac{\xi' - \alpha}{\beta} = \frac{(\xi - \alpha) \cos \varrho - \beta \sin \varrho}{(\xi - \alpha) \sin \varrho + \beta \cos \varrho}$$

$$\text{oder } \frac{1}{\xi' - \alpha} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \varrho,$$

wo α und β feste Werte, ϱ ein beliebiger Wert beizulegen ist; im ersten Fall kann die Form auch sein: $\xi' - \alpha = \varrho (\xi - \alpha)$, im letzten auch: $\xi' = \xi + \varrho$.

Nun beachten wir, dafs der Kreis (7) die Gerade $\eta = 0$ in den beiden Punkten: $\xi = \pm a$ schneidet. Verschiebt man also diese Gerade in sich, bis der Punkt $(-a, 0)$ auf den Punkt $(0, 0)$ zu liegen kommt, so deckt gleichzeitig der Nullpunkt den Punkt $(a, 0)$. In einer parabolischen Ebene, die wir zunächst betrachten, mufs also eine der beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\xi' - \alpha} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \varrho \text{ und } \xi' = \xi + \varrho$$

bei demselben Werte von ϱ sowohl für $\xi = -a$, $\xi' = 0$ als auch für $\xi = 0$, $\xi' = a$ erfüllt sein. Diese Forderung verlangt, daſs die Gleichung ist: $\xi' = \xi + \varrho$.

Nun muſs die Verschiebung einer Ebene längs einer ihrer Geraden durch Gleichungen von der Form:

$$(8)\quad \xi' = \frac{\varkappa'\xi + \lambda'\eta + \mu'}{\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu},\ \eta' = \frac{\varkappa''\xi + \lambda''\eta + \mu''}{\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu}$$

dargestellt werden. Soll darin für $\eta = 0$ auch $\eta' = 0$, $\xi' = \xi + \varrho$ sein, so folgt $\varkappa' = \mu = 1$, $\varkappa = 0$, $\mu' = \varrho$, $\varkappa'' = \mu'' = 0$.

Ein um den Anfangspunkt beschriebener Kreis, der den Kreis (7) umschlieſst, schneidet auf den Geraden $\xi = +a$ und $\xi = -a$ vom Berührungspunkte aus gleiche Strecken ab. Da aber für die Schnittpunkte auf beiden Geraden sich gleiche Werte von η ergeben, so gehören auf diesen beiden Geraden zu gleichen Werten von η auch gleiche Strecken. Verschiebt man also die Ebene längs der Geraden $\eta = 0$, bis der Punkt $(-a, 0)$ den Punkt $(a, 0)$ deckt, so muſs wegen des oben angeführten Satzes b) auch die Gerade $\xi = -a$ auf die Gerade $\xi = a$ zu liegen kommen, und für diese beiden Geraden muſs der Wert von η ungeändert bleiben. Demnach müssen sich die weiteren Konstanten in (8) so bestimmen lassen, daſs für $\xi = -a$ wird $\xi' = a$, $\eta' = \eta$. Da hierbei der Wert von a noch beliebig ist, nehmen die Transformations-Gleichungen die Form an:

$$(9)\quad \xi' = \xi + \varrho,\ \eta' = \eta.$$

Ebenso wird die Verschiebung längs der Geraden $\xi = 0$ in einer solchen Ebene durch die Gleichungen bestimmt:

$$(10)\quad \xi' = \xi,\ \eta' = \eta + \varrho.$$

4. In einer hyperbolischen Ebene müssen, weil die Verschiebung der Geraden $\eta = 0$ in sich den Punkt $(-a, 0)$ in den Nullpunkt und zugleich den Punkt $(0, 0)$ nach $(a, 0)$ überführt, für jeden Wert von a bei passender Wahl von ϱ die Gleichungen erfüllt sein:

$$\frac{-\alpha}{-\beta} = \varrho\,\frac{-a-\alpha}{-a-\beta},\ \frac{a-\alpha}{a-\beta} = \varrho\,\frac{-\alpha}{-\beta}\ \text{oder}\ \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{a^2-\alpha^2}{a^2-\beta^2}.$$

Diese Gleichung verlangt $\alpha^2 = \beta^2$ oder $\alpha = -\beta = 1$. Dadurch gelangen wir zu der Gleichung:

$$\frac{\xi'}{1} = \frac{\sigma\xi + 1}{\xi + \sigma 1},$$

wo wir $\sigma = \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ gesetzt haben. Verbindet man mit dieser Gleichung $\eta' = \eta = 0$, so müssen darin die Gleichungen (8) für $\eta = 0$ übergehen; man mufs demnach setzen: $\varkappa' = \mu'' = 0$, $\varkappa' = \mu = \sigma l$, $\varkappa = 1$, $\mu' = l^2$.

Nun mufs aus demselben Grunde, den wir eben für die parabolische Ebene entwickelt haben, für $\xi = -a$, $\xi' = a$, auch $\eta' = \eta$ erhalten werden, wo der Wert von a noch veränderlich ist. Dadurch gehen die Gleichungen (8) über in:

$$\xi' = \frac{(l^2 + a^2)\,\xi + 2al^2}{2a\xi + (l^2 + a^2)}, \quad \eta' = \frac{(l^2 - a^2)\,\eta}{2a\xi + (l^2 + a^2)}.$$

Setze ich noch

$$\frac{2al}{l^2 - a^2} = \operatorname{Sh}\frac{\mu}{l}, \text{ also } \frac{l^2 + a^2}{l^2 - a^2} = \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l},$$

so werden diese Gleichungen:

$$\xi' = \frac{\xi \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l} + l \operatorname{Sh}\frac{\mu}{l}}{\frac{\xi}{l}\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l} + \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l}}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\frac{\xi}{l}\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l} + \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l}}.$$

Jetzt bestimme ich drei Gröfsen p, u, v durch die Forderungen:

$$\frac{u}{p} = \xi, \ \frac{v}{p} = \eta, \ l^2p^2 - u^2 - v^2 = l^2, \ p = 1 \text{ für } \xi = \eta = 0.$$

Indem ich p', u', v' in gleicher Weise von ξ', η' abhängen lasse, finde ich die Gleichungen:

$$(11) \quad p' = p \operatorname{Ch}\frac{\mu}{l} + \frac{u}{l}\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l}, \ u' = pl\operatorname{Sh}\frac{\mu}{l} + u\operatorname{Ch}\frac{\mu}{l}, \ v' = v,$$

durch welche die Verschiebung längs der Geraden $\eta = 0$ oder $v = 0$ angegeben wird.

In entsprechender Weise gelten für die Verschiebung längs der Geraden $v = 0$ die Gleichungen:

$$(12) \quad p' = p\operatorname{Ch}\frac{\nu}{l} + \frac{\nu}{l}\operatorname{Sh}\frac{\nu}{l}, \ u' = u, \ v' = pl\operatorname{Sh}\frac{\nu}{l} + v\operatorname{Ch}\frac{\nu}{l}.$$

Die Gleichungen (6) gehen über in:

$$(13) \quad p' = p, \ u' = u\cos\alpha - v\sin\alpha, \ v' = u\sin\alpha + v\cos\alpha.$$

5. Da der Weg, den man für die Untersuchung einer elliptischen Ebene einschlagen mufs, derselbe ist wie der, welcher in

den beiden anderen Ebenen uns zum Ziel geführt hat, die Rechnung sich aber noch einfacher gestaltet, so genügt es, das Resultat anzugeben.

Wir führen drei Gröfsen p, u, v ein durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{u}{p}, \ \eta = \frac{v}{p}, \ k^2p^2 + u^2 + v^2 = k^2, \ p = 1 \text{ für } \xi = \eta = 0,$$

und durch die Festsetzung, dafs bei stetiger Änderung von ξ und η auch die Gröfsen p, u, v sich stetig ändern sollen. Dann werden die Transformationsgleichungen für die Drehung um den Anfangspunkt:

$$(14) \quad p' = p, \ u' = u \cos\alpha - v \sin\alpha, \ v' = u \sin\alpha + v \cos\alpha,$$

für die Verschiebung längs der Geraden $v = 0$:

$$(15) \quad p' = p \cos\frac{\nu}{k} - \frac{u}{k} \sin\frac{\nu}{k}, \ u' = pk \sin\frac{\nu}{k} + u \cos\frac{\nu}{k}, \ v' = v,$$

und für die Verschiebung längs der Geraden $u = 0$:

$$(16) \quad p' = p \cos\frac{\varrho}{k} - \frac{v}{k} \sin\frac{\varrho}{k}, \ u' = u, \ v' = pk \sin\frac{\varrho}{k} + v \cos\frac{\varrho}{k}.$$

6. Um den Nachweis, dafs jeder der drei Möglichkeiten, welche wir für die Verschiebung einer einzelnen Geraden in sich gefunden haben, auch für die Ebene ein abgeschlossenes Formelsystem entspricht, zu vervollständigen, dürfte es am einfachsten sein, die drei verschiedenen Arten von Transformationen, welche wir in jedem Falle erhalten haben, mit einander zu verbinden. Dadurch gelangen wir jedesmal zu allgemeineren Transformationen und haben nur zu zeigen, dafs dadurch jede Bewegung der Ebene in sich dargestellt wird. Dieser Nachweis wird überaus einfach, wenn man einige Sätze aus der Theorie der Transformations-Gruppen benutzt. Für jeden, der mit dieser Theorie irgend vertraut ist, bedarf der Gang des Beweises keiner Andeutung.

Dem elementaren Charakter der Herleitung dürfte jedoch ein anderer Weg besser entsprechen, den wir nur für die elliptische Ebene darlegen wollen.

Für die Drehung um den Anfangspunkt gelten die Gleichungen:

$$p' = p, \ u' = u \cos\alpha - v \sin\alpha, \ v' = u \sin\alpha + v \cos\alpha.$$

Damit verbinden wir die Drehung:

$$p'' = p', \ u'' = u' \cos\beta - v' \sin\beta, \ v'' = u' \sin\beta + v' \cos\beta.$$

Setzen wir diese beiden Drehungen zusammen, so müssen wir in die beiden letzten Ausdrücke für p', u', v' die Werte einsetzen, die aus den ersten Gleichungen folgen; dadurch erhalten wir:

$$p'' = p,\ u'' = u \cos(\alpha + \beta) - v \sin(\alpha + \beta),$$
$$v'' = u \sin(\alpha + \beta) + v \cos(\alpha + \beta).$$

Nun beschreiben bei einer Drehung alle durch den ruhenden Punkt gehenden Geraden gleiche Winkel; die Gröfse dieses Winkels bestimmt die Gröfse der Drehung. Schon hieraus folgt, dafs die Hilfsgröfse α, welche in den ersten Gleichungen vorkommt, eine Funktion des Drehungswinkels ist. Da aber bei der Zusammensetzung zweier Drehungen einerseits, wie die Geometrie lehrt, die Drehungswinkel sich addieren, andererseits, wie wir gesehen haben, die Hilfsgröfsen α und β sich ebenfalls zu ihrer Summe vereinigen, so mufs die Summe α dem Drehungswinkel proportional sein. Für $\lambda = \pi$ wird $\xi' = -\xi$, $\eta' = \eta$, oder der Drehungswinkel wird gleich zwei Rechten. Demnach mufs die Gröfse α gleich dem Winkel sein, welcher bei der entsprechenden Drehung von jeder durch den Anfangspunkt gehenden Geraden beschrieben wird.

In ähnlicher Weise betrachten wir jetzt die Verschiebung längs der Geraden v = 0. Mit der Transformation

$$p' = p \cos\frac{\lambda}{k} - \frac{u}{k} \sin\frac{\lambda}{k},\ u' = pk \sin\frac{\lambda}{k} + v \cos\frac{\lambda}{k},\ v' = v.$$

verbinden wir die weitere:

$$p'' = p' \cos\frac{\mu}{k} - \frac{u'}{k} \sin\frac{\mu}{k},\ u'' = p'k \sin\frac{\mu}{k} + v' \cos\frac{\mu}{k},\ v'' = v'.$$

Dann wird (p'', u'', v'') durch (p, u, v) ausgedrückt, wenn man nur in den ersten Gleichungen λ durch $\lambda + \mu$ ersetzt. Nun wird jeder Punkt der Geraden v = 0 um dieselbe Strecke verschoben; wir dürfen also aus der Art der Zusammensetzung zweier Verschiebungen schliefsen, dafs die Gröfse λ dieser Strecke proportional ist. Da endlich über die Gröfse k noch verfügt werden kann, so dürfen wir die Hilfsgröfse λ geradezu gleich der Strecke setzen, welche irgend ein Punkt der Geraden bei dieser Verschiebung beschreibt.

Ist diese Strecke gleich e, so gelangt der Anfangspunkt in einen Punkt der Geraden v = 0, der von ihm die Entfernung e hat. Da aber für $\lambda = e$, $p = 1$, $u = v = 0$ wird $p' = \cos\frac{e}{k}$, $u' = k \sin\frac{e}{k}$, so hat derjenige Punkt der Geraden $v = 0$, welcher vom Anfangspunkte den Abstand e hat, die Koordinaten $\cos\frac{e}{k}$, $k \sin\frac{e}{k}$, 0.

Führen wir eine Drehung um den Punkt (1, 0, 0) aus und beachten die Lage, welche der Punkt $(\cos\frac{e}{k}, k\sin\frac{e}{k}, 0)$ hierdurch erlangt, so finden wir für einen Punkt, der vom Anfangspunkte den Abstand e hat und dessen Verbindungsgerade mit dem Anfangspunkte zur Geraden $u = 0$ unter dem Winkel α geneigt ist, die Koordinaten:

$$p = \cos\frac{e}{k},\ u = k \sin\frac{e}{k}\cos\alpha,\ v = k\sin\frac{e}{k}\sin\alpha.$$

Ein Punkt, der auf der Achse $u = 0$ liegt und vom Anfangspunkte (und damit auch von der andern Achse) den Abstand a hat, besitzt die Koordinaten: $p = \cos\frac{a}{k}$, $u = 0$, $v = k\sin\frac{a}{k}$. Indem wir jetzt eine Verschiebung längs der Achse $v = 0$ ausführen und dabei jeden Punkt der Achse um die Strecke b fortbewegen, erlangt der Punkt $\left(\cos\frac{a}{k}, 0, k\sin\frac{a}{k}\right)$ die Lage, welche durch die Koordinaten $\left(\cos\frac{a}{b}\cos\frac{b}{k},\ k\cos\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k},\ k\sin\frac{a}{k}\right)$ bestimmt ist.

Nun ändert sich bei dieser Verschiebung der Abstand von der Achse $v = 0$ nicht; somit ist allgemein $v = k\sin\frac{a}{k}$, wenn a den Abstand von der Geraden $v = 0$ angiebt. Eine entsprechende Bedeutung hat die Koordinate u. Indem wir endlich die verschiedenen Werte vergleichen, die wir für p und v erhalten haben, folgt der Satz:

Sind a und b die Katheten, e die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem der Seite a der Winkel α gegenüberliegt, so gelten die Formeln:

$$\cos\frac{e}{k} = \cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}, \quad \sin\frac{a}{k} = \sin\frac{e}{k}\sin\alpha.$$

Demnach können wir jetzt auf dem in I § 15 (B. 1. S. 42—49) angegebenen Wege die Trigonometrie herleiten und gelangen zu dem in I § 21 (B. 1. S. 70—72) aufgestellten analytischen System.

In ganz entsprechender Weise behandeln wir die beiden anderen Fälle; wir erhalten also dieselben Möglichkeiten, welche wir im ersten Abschnitte unter anderem durch Betrachtung unendlich kleiner Dreiecke hergeleitet haben.

7. Da die vorangehende Entwicklung uns die trigonometrischen Formeln geliefert hat, so ist es nicht mehr nötig, die Bewegung räumlicher Gebilde eigens zu untersuchen. Wir möchten nur darauf hinweisen, dafs es nicht notwendig ist, zuerst die Ebene zu untersuchen, und dafs man mit gleicher Leichtigkeit den Raum sofort der Untersuchung zu Grunde legen kann. Dabei benutzt man etwa folgende Sätze:

a) Die Punkte, welche von einem festen Punkte gleichen Abstand haben, liegen auf einer Fläche, der Kugel, welche von jeder durch den festen Punkt gelegten Ebene in einer geschlossenen Linie geschnitten wird.

b) Bei der Ruhe einer Geraden ist noch Bewegung möglich; dann beschreibt jeder Punkt, der dieser Geraden nicht angehört, einen Kreis.

c) Auf allen Tangenten einer Kugel schneidet jede konzentrische, die erste umschliefsende Kugel vom Berührungspunkte aus gleiche Strecken ab.

d) Alle Geraden, welche eine Kugel in demselben Punkte berühren, liegen auf einer Ebene, der Tangentialebene des Punktes.

e) Durch Verschiebung längs eines Durchmessers kann man die Tangentialebene des einen Endpunktes mit der des andern zur Deckung bringen.

Aus der vorigen Untersuchung nehme man den Satz herüber, dafs der Kreis eine Kurve zweiter Ordnung ist. Da hiernach die Kugel von jeder Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten wird, so folgert man, dafs sie selbst eine Fläche zweiter Ordnung ist. Demnach kann man ihre Gleichung, indem man den festen Punkt zum Anfangspunkte der Koordinaten nimmt, auf die Form bringen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2.$$

Der Drehung um die Gerade $\eta = \zeta = 0$ entspricht die Transformation:

$$\xi' = \xi,\ \eta' = \eta \cos \alpha - \zeta \sin \alpha,\ \zeta' = \eta \sin \alpha + \zeta \cos \alpha.$$

Die weitere Entwicklung kann genau in der früher angegebenen Weise durchgeführt werden. Für einen parabolischen Raum zeigt sich, dafs ξ, η, ζ geradezu die Cartesischen Koordinaten sind. Für einen elliptischen Raum führe man vier neue Gröfsen p, u, v, w durch die Gleichungen ein:

$$\xi = \frac{u}{p},\ \eta = \frac{v}{p},\ \zeta = \frac{w}{p},\ k^2p^2 + u^2 + v^2 + w^2 = k^2.$$

In ähnlicher Weise verfährt man für eine hyperbolische Raumform. Dann bleibt die Behandlung ungeändert und führt auch zu denselben Ergebnissen.

§ 6.

Projektivität und Bewegung. Abschliefsende Untersuchung.

Der folgende Paragraph versucht einerseits die im vorangehenden Paragraphen gemachten Voraussetzungen auf ihr geringstes Mafs zurückzuführen; andererseits knüpft er an § 4 an, indem er ebenfalls die Metrik projektiv begründet, und zwar wiederum durch geeignete Beschränkung der allgemeinen projektiven Gruppe.

1. Der Kürze des Ausdrucks wegen empfiehlt es sich, jede Zuordnung von Raumteilen, bei der im allgemeinen jeder Punkt einem Punkte, jede Linie einer Linie und jede Fläche einer Fläche entspricht, eine Bewegung zu nennen. Dann werden wir diejenigen Zuordnungen, durch welche kongruente Raumgebilde auf einander bezogen werden, als starre Bewegungen bezeichnen. Indem wir diese Ausdrücke gebrauchen, liegt die Frage nahe: Welche Eigenschaften müssen wir den allgemeinen Bewegungen beilegen, um zu den starren Bewegungen zu gelangen?

Um diese Frage zu beantworten, glaube ich an erster Stelle die Forderung aufstellen zu sollen: Wenn zwei Gebilde demselben dritten Gebilde kongruent sind, so sind sie auch unter einander kongruent.

Diese Forderung kann auch in folgender Form ausgesprochen werden:

Eine Bewegung beziehe einen Raumteil I auf einen Raumteil II, eine andere den Raumteil II auf einen Raumteil III; dann soll es auch möglich sein, den Raumteil I auf den Raumteil III durch eine Bewegung zu beziehen.

Ohne diese oder eine entsprechende Annahme, die so selbstverständlich erscheint, dafs sie fast nie ausdrücklich erwähnt wird, ist es nicht möglich, irgend einen Kongruenzsatz anzuwenden. Andererseits mufs man diese Voraussetzung zu beliebigen Annahmen über die Bewegung noch hinzufügen, wenn man in der Geometrie die Bewegung benutzen will.

Die projektive Geometrie wird gut thun, an zweiter Stelle die Annahme zu machen:

Jede Bewegung der geforderten Art läfst das System der Geraden und Ebenen unverändert.

Hiernach soll jede Gerade in eine Gerade, jede Ebene in eine Ebene übergeführt werden. Zu dem Ende genügt es anzunehmen, dafs jede Ebene wieder in eine Ebene übergeht. Denn, wenn man mehrere Ebenen betrachtet, die sich in derselben Geraden schneiden, so werden sie durch die Bewegung in Ebenen verwandelt, die ebenfalls eine Gerade gemeinschaftlich haben; somit entspricht jeder Geraden wieder eine Gerade. Indem wir den früher eingeführten Begriff der Kollinealität benutzen, können wir unsere zweite Forderung auch in folgender Weise aussprechen: Die Zuordnung der Punkte, welche durch eine starre Bewegung vermittelt wird, soll eine kollineare Verwandtschaft sein.

Benutzen wir zur Darstellung der Punkte des Raumes projektive homogene Koordinaten, so sagt die zweite Forderung, dafs das Resultat jeder starren Bewegung durch homogene lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt wird. Da die erste Forderung für sich verlangt, dafs die analytische Darstellung der starren Bewegungen eine Transformations-Gruppe im Lieschen Sinne bildet, so verbinden sich die beiden angegebenen Voraussetzungen dahin, dafs die Gesamtheit der starren Bewegungen durch eine projektive Gruppe einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit dargestellt wird.

Unsere Aufgabe besteht also jetzt darin, solche Eigenschaften der in § 4 gefundenen Gruppe

$$x_0 p_\varkappa - k p_0 x_\varkappa, \quad p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

anzugeben, durch welche sie sich von allen übrigen projektiven Gruppen unterscheidet.

2. Die soeben aufgestellten Forderungen liegen auch den im vorigen Paragraphen durchgeführten Untersuchungen, sowie überhaupt denen des ersten und zweiten Abschnitts zu Grunde. Zudem haben wir dort die Annahme gemacht:

Es ist möglich, jede Ebene in sich zu bewegen, während irgend einer ihrer Punkte in Ruhe gehalten wird; dann bewegt sich aber jeder andere Punkt der Ebene nur noch in einer geschlossenen Linie.

Dafs diese Forderung in Verbindung mit den beiden ersten für unsern Zweck genügt, haben wir mehrmals bewiesen. Es würde also nicht erlaubt sein, weitere Forderungen, etwa über die Erhaltung gewisser Winkel, beizufügen. Im Gegenteil müssen wir fragen, ob die dritte Forderung nicht bereits zu weit geht und ob sie nicht durch enger begrenzte Voraussetzungen ersetzt werden kann. Denn man erkennt sehr leicht, dafs in der letzten Forderung aufserordentlich viele Einzelforderungen zusammengefafst sind. Erstens wird die angegebene Eigenschaft allen Ebenen beigelegt, und diese bilden eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit; zweitens kann in einer Ebene noch jeder Punkt in Ruhe gehalten werden, und endlich bildet die Gesamtheit der Linien, in denen sich bei der Ruhe eines Punktes die übrigen Punkte der Ebene bewegen, eine einfach unendliche Schar. So umfafst die dritte Voraussetzung eine sechsfache Unendlichkeit von Einzelforderungen.

Nun folgt aus den beiden ersten Forderungen, wie wir schon erwähnt haben, dafs die Gesamtheit der starren Bewegungen analytisch durch eine projektive Gruppe des Raumes dargestellt wird. Die Zahl der wesentlich verschiedenen projektiven Gruppen des dreidimensionalen Raumes ist aber eine endliche; man kann also jede einzelne dadurch vollständig bestimmen, dafs man ihr eine endliche Zahl von Eigenschaften beilegt. Somit genügt auch eine endliche Zahl von Bedingungen, um diejenige projektive Gruppe des Raumes zu charakterisieren, durch welche die starren Bewegungen dargestellt werden können.

Ehe wir dazu übergehen, ein derartiges System von Forderungen anzugeben, wollen wir einige projektive Gruppen der Ebene und des Raumes einer nähern Untersuchung unterziehen.

3. Satz. Wird bei der Ruhe eines Punktes durch eine eingliedrige projektive Gruppe eine Ebene so in sich bewegt, dafs ein zweiter Punkt in einer geschlossenen krummen Linie bewegt wird, so bewegt diese Gruppe jeden Punkt in einer geschlossenen Linie.

Wir betrachten eine eingliedrige projektive Gruppe, bei welcher ein Punkt A in Ruhe bleibt und ein zweiter Punkt B in einer geschlossenen Linie bewegt wird. Dabei ist es angebracht vorauszusetzen, dafs nicht blofs die Punkte A und B, sondern auch alle Lagen, welche der Punkt B bei den Transformationen der Gruppe erhält, dem Gebiet angehören, das wir von vorn herein unserer Untersuchung zu Grunde gelegt haben. Damit wird auch verlangt, dafs der Punkt B sich nicht in einer geraden Linie bewegt. Es ist also nicht rein willkürlich, dafs wir in unserm Lehrsatz die Bahn des Punktes B als krummlinig vorausgesetzt haben. Wir wollen jetzt zeigen, dafs jede projektive Gruppe, welche dieser Forderung für den Punkt B genügt, alle Punkte der Ebene in geschlossenen Linien bewegt und dafs alle Punkte zugleich ihre Anfangslage wieder annehmen.

Zum Beweise legen wir durch den Punkt A die beiden Achsen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ und zeigen auf die bereits im vorletzten Paragraphen (S. 119) durchgeführte Weise, dafs die unendlich kleine Transformation, aus der die genannte eingliedrige Gruppe hervorgeht, in der Form

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + l p_0 x_0$$

dargestellt werden kann. Bei der Bewegung, welche dieser Gruppe entspricht, bleibt nicht nur die Gerade $x_0 = 0$ in sich, sondern jeder ihrer Punkte kehrt auch in seine Anfangslage zurück. Da aber angenommen ist, dafs der Punkt B sich in einer krummen Linie bewegt, so ist es notwendig, die Bahnkurve für irgend einen anderen Punkt der Ebene zu untersuchen. Zu dem Ende schreiben wir die vorstehende unendlich kleine Transformation in der Form

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 - l\,(p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

durch welche die beiden Differentialgleichungen vertreten werden:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - lx_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = - x_1 - lx_1.$$

Hier führe man die beiden Variabeln r und u vermittels der Gleichungen ein:

$$x_1 = r \sin u, \; x_2 = r \cos u.$$

Alsdann nimmt die Gleichung der Linie, in der sich ein Punkt bewegt, die Form an:

$$r\, e^{lu} = C.$$

Für $C = 0$ wird nur der ruhende Punkt dargestellt. Soll die durch diese Gleichung bei irgend einem andern Werte von C bestimmte Gleichung geschlossen sein, so mufs der Koefficient l verschwinden. Dann bewegen sich aber alle Punkte in geschlossenen Kurven, wie im Lehrsatze behauptet wurde.

4. Indem wir die soeben benutzten Punkte A und B beibehalten, suchen wir diejenigen projektiven Gruppen der Ebene, welche folgenden Bedingungen genügen:

a) Bei der Ruhe des Punktes A soll sich der Punkt B in einer einzigen geschlossenen krummen Linie bewegen;

b) die Gruppe gestattet eine Bewegung des Punktes A.

Wie wir bewiesen haben, enthält die gesuchte Gruppe eine infinitesimale Transformation, der wir bei passender Wahl der Koordinaten die Form geben können:

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 .$$

Da der Punkt (1, 0, 0) nicht bei allen Transformationen der Gruppe in Ruhe gehalten wird, so mufs die Gruppe noch eine unendlich kleine Transformation enthalten:

$$p_0 \Sigma a_\varkappa x_\varkappa + x_0 \Sigma b_\varkappa x_\varkappa + \Sigma c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa, \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2)$$

worin die Koefficienten b_1 und b_2 nicht beide verschwinden. Wie wir in § 4, 2 bewiesen haben, sind jetzt drei Fälle möglich: entweder ist die Gruppe die allgemeine projektive Gruppe der Ebene oder sie ist dreigliedrig und enthält die drei Transformationen $p_1 x_2 - p_2 x_1$, $a_0 p_0 x_1 + b_0 p_1 x_0$, $a_0 p_0 x_2 + b_0 p_2 x_0$, wo der Koefficient b_0 nicht verschwindet, oder die Gruppe ist viergliedrig und wird durch die Transformationen $p_1 x_2 - p_2 x_1$, $p_1 x_0$, $p_2 x_0$, $p_0 x_0$ bestimmt. Der erste und der dritte Fall sind auszuschliefsen, da sie verlangen würden, dafs bei der Ruhe von A der Punkt B noch jede beliebige Lage annehmen könnte. Es bleibt also nur der zweite Fall. Da man zudem $b_0 = 1$, $a_0 = -k$ setzen darf, enthält die verlangte Gruppe die drei Transformationen

$$(1) \quad p_1 x_2 - p_2 x_1, \; p_1 x_0 - k p_0 x_1, \; p_2 x_0 - k p_0 x_2,$$

und keine weitere davon unabhängige Transformation. Demnach sind wir auf folgenden Satz geführt:

Wenn eine projektive Gruppe der Ebene die Eigenschaft hat, dafs bei der Ruhe eines festgewählten Punktes, der durch Transformationen der Gruppe noch bewegt werden kann, für einen zweiten, ebenfalls willkürlich aber fest gewählten Punkt die Bewegung nur in einer einzigen geschlossenen krummen Linie möglich ist, so ist die Gruppe dreigliedrig und wird durch die Transformationen (1) bestimmt. Dann kann man die Ebene noch in sich verschieben, während irgend ein anderer Punkt in Ruhe gehalten wird; hierbei beschreiben jedesmal die bewegten Punkte geschlossene Linien.

Die Konstante k in (1) kann noch jeden beliebigen Wert annehmen. Solange wir aber nur die Ebene für sich betrachten, kommt es nur auf das Vorzeichen, aber nicht auf die Gröfse dieser Konstanten an, da wir x_0 durch ax_0 ersetzen dürfen, wofern wir auch ap_1 für p_1 und ap_2 für p_2 schreiben. Wesentlich verschieden sind also nur die drei Fälle, dafs k gleich null oder positiv oder negativ ist. Wofern wir in einer Ebene nur die durch die Transformationen (1) bestimmte Gruppe betrachten, wollen wir in Ermangelung eines passenden Ausdrucks die Ebene selbst für $k = 0$ eine parabolische, für $k > 0$ eine elliptische und für $k < 0$ eine hyperbolische Ebene nennen.

5. Angenommen, im Raume gebe es eine Ebene von der in der vorigen Nummer betrachteten Eigenschaft. Indem wir sie zur Ebene $x_3 = 0$ wählen, enthält diejenige Gruppe, durch welche die Umgestaltungen des Raumes angegeben werden, die drei Transformationen:

$$(2)\quad \begin{aligned} &x_3\,(a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) + p_1x_2 - p_2x_1 \\ &x_3\,(b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3) + p_1x_0 - kp_0x_1 \\ &x_3\,(c_0p_0 + c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3) + p_2x_1 - kp_0x_2. \end{aligned}$$

Wir wollen untersuchen, ob sich nicht bereits aus dem Vorkommen dieser drei Transformationen Folgerungen ziehen lassen, und beschränken uns zunächst auf den Fall, dafs der Koefficient k von null verschieden ist.

Indem wir unter dieser Annahme je zwei der Transformationen (2) mit einander kombinieren, erhalten wir eine Transformation, die jedesmal mit der dritten grofse Ähnlichkeit hat, aber kein Glied mit $p_3 x_3$ enthält. Demnach kommen in der Gruppe auch Transformationen vor, welche die in (2) angegebene Form für $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ besitzen. Es ist also gestattet, diese Annahme für die Ausdrücke (2) selbst zu machen.

Soll jetzt jedesmal durch Kombination zweier Transformationen (2) die dritte erhalten werden, so mufs offenbar sein:

$$(3) \quad a_0 = b_2 = c_1 = 0,\ b_0 = ka_2,\ c_0 = -ka_1,\ c_2 = b_1.$$

Wenn diese Bedingungen nicht sämtlich erfüllt sind, so erhält man durch Subtraktion der neu gewonnenen von der entsprechenden Transformation (2) eine Transformation:

$$x_3 (e_0 p_0 + e_1 p_1 + e_2 p_2),$$

worin mindestens einer der Koefficienten e_0, e_1, e_2 von null verschieden ist. Diese neue Transformation kann man aber wieder mehrmals mit den drei Transformationen (2) kombinieren und erkennt, dafs die drei Transformationen $x_3 p_0$, $x_3 p_1$, $x_3 p_2$ der Gruppe angehören. Indem man diese je mit einem passenden Koefficienten multipliziert und von den Transformationen (2) abzieht, erkennt man, dafs in der Gruppe die Transformationen (1) vorkommen. Zudem kann noch die Transformation $x_3 p_3$ hinzutreten.

Hiernach ergeben sich für die Gesamtheit der Transformationen, bei denen die Ebene $x_3 = 0$ in der angegebenen Weise und unter der Annahme $k \gtreqless 0$ in sich verschoben wird, vier Möglichkeiten: sie bilden entweder eine dreigliedrige oder eine viergliedrige oder eine sechsgliedrige oder eine siebengliedrige Gruppe. Jede dieser Gruppen enthält bei passender Wahl der Koordinaten die Transformationen (1); zu ihnen tritt im zweiten Falle die Transformation $p_3 x_3$, im dritten $x_3 p_0$, $x_3 p_1$, $x_2 p_2$ und im letzten aufser diesen dreien noch $x_3 p_3$.

So interessant es auch wäre, jede der verschiedenen Möglichkeiten für sich zu verfolgen und zu untersuchen, welche weitern projektiven Transformationen man jedesmal mit den angegebenen verbinden kann, wofern man nur an der Forderung festhält, dafs die Ebene $x_3 = 0$ nur auf die bezeichnete Weise in sich bewegt werden kann, müssen wir doch davon Abstand nehmen, weil diese Untersuchung für die Erledigung unserer nächsten Aufgabe nicht unbedingt notwendig ist.

6. Wir fügen die Annahme bei, dafs eine weitere durch den Punkt A gehende Ebene bei der Ruhe dieses Punktes noch in sich verschoben werden kann, und dafs hierbei für einen festgewählten zweiten Punkt die Bewegung auf eine einzige geschlossene Linie beschränkt ist. Unter dieser Annahme sind, wie wir jetzt nachweisen wollen, die drei letzten Möglichkeiten ausgeschlossen; es müssen also die drei Transformationen (2) eine dreigliedrige Untergruppe bilden, und nur die ihr angehörenden Transformationen bewegen die Ebene $x_3 = 0$ in sich.

Zum Beweise gehen wir von den Transformationen (2) aus. Wenn dies nicht die einzigen von einander unabhängigen Transformationen sind, bei denen die Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird, so müssen zu ihnen entweder die Transformationen p_0x_3, p_1x_3, p_2x_3 oder p_3x_3 allein oder die letzte in Verbindung mit den drei ersten hinzutreten. Sobald wir nachgewiesen haben, dafs diese letzten drei Möglichkeiten ausgeschlossen sind, wissen wir, dafs die Transformationen (2) eine Untergruppe bestimmen und zwar die einzige, bei deren Transformation die Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird.

Nun ist in der Darstellung (2) der Ebene $x_2 = 0$ keine weitere Beschränkung auferlegt, als dafs sie durch den Punkt A geht. Wir können daher die zweite Ebene, die wir auf die angegebene Weise in sich verschoben werden lassen, zur Ebene $x_2 = 0$ wählen. Demnach enthält die Gruppe folgende Transformation:

$$(4)\quad x_2\,(\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3) + x_1\,(\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_3 p_3) \\ + x_3\,(\nu_0 p_0 + \nu_1 p_1 + \nu_3 p_3).$$

Damit ein Punkt der Ebene bei der aus dieser infinitesimalen Transformation hervorgehenden eingliedrigen Gruppe eine geschlossene Linie beschreibt, mufs der Ausdruck

$$(\mu_1 - \nu_3)^2 + 4\,\mu_3\nu_1$$

einen negativen Wert haben. Nun kann aber diese Diskriminante jedenfalls einen positiven Wert erhalten, sobald einer der vier Koefficienten μ_1, μ_3, ν_1, ν_3 ganz willkürlich gewählt werden kann. Hiernach darf die Gruppe neben der Transformation (4) jedenfalls keine der vier Transformationen x_1p_1, x_1p_3, x_3p_1, x_3p_3 enthalten, weil man diese sonst mit einem beliebigen Faktor multiplizieren und zu (4) hinzufügen dürfte. Sobald aber die Ebene

$x_3 = 0$ noch durch Transformationen in sich bewegt wird, die von den in (2) aufgestellten unabhängig wird, enthält die Gruppe die Transformationen $x_3 p_3$ und $x_3 p_1$ oder eine von ihnen. Man kann daher mindestens einen der Koefficienten ν_1 und ν_3 willkürlich wählen und so die Diskriminante positiv machen, was mit unserer Forderung unvereinbar ist.

Sobald also irgend eine zweite durch A gelegte Ebene eine Bewegung der angegebenen Art gestattet, gehören alle Transformationen, durch welche die zuerst gegebene Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird, der durch die drei Transformationen (2) bestimmten Untergruppe an. Hierin sind die Koefficienten a_3, b_3, c_3 gleich null; zwischen den übrigen Koefficienten bestehen die Bedingungen (3). Es ist infolge dessen möglich, das Koordinatensystem so zu wählen, dafs die Transformationen (2) die Form (1) annehmen.

7. Es dürfte angebracht sein, die Gesamtheit der durch diese Untergruppe hervorgerufenen Bewegungen etwas näher zu betrachten.

Da durch die Transformationen (1) die Form

$$\frac{x_0^2}{p} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ungeändert bleibt und das Zeichen p_3 darin nicht vorkommt, so werden für beliebige Werte von μ alle Flächen des Büschels

$$(5) \qquad \frac{x_0^2}{p} + x_1^2 + x_2^2 + \mu x_3^2 = 0$$

in sich verschoben. Jede Ebene, welche eine dieser Flächen berührt, bleibt bei allen Transformationen der Untergruppe Tangentialebene an dieselbe Fläche.

Soll durch eine Transformation der Gruppe (1) der Punkt (1, 0, 0, 0) in Ruhe bleiben, so mufs sie der aus $p_1 x_2 - p_2 x_1$ hervorgehenden eingliedrigen Untergruppe angehören. Daher bleibt jeder Punkt der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ in Ruhe; alle Punkte des Raumes bewegen sich in geschlossenen Linien und nehmen gleichzeitig die Anfangslage wieder ein. Jede Ebene, die eine der Flächen (5) in einem Schnittpunkte mit der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ berührt, deren Gleichung man also bei beliebigem Werte von α in der Form $x_3 = \alpha x_0$ schreiben kann, wird bei dieser Bewegung in sich verschoben.

Nun kann man aber, wie sich aus 3. ergiebt, so lange nur die Umgebung des Punktes A betrachtet wird, jeden Punkt der Ebene $x_3 = 0$ zum Anfangspunkte des Koordinaten-Systems machen und dann noch immer den Transformationen, durch welche die Ebene umgestaltet wird, die Form (1) geben. Die soeben gezogene Folgerung gilt also auch, wenn man von irgend einem anderen Punkte der Ebene ausgeht: bei seiner Ruhe werden alle Punkte einer Geraden sich nicht bewegen; die Tangentialebene, die in einem Schnittpunkte dieser Linie mit einer Fläche (5) an sie gelegt wird, wird in sich verschoben; alle Punkte des Raumes legen geschlossene Bahnen zurück.

Dasselbe erkennt man in folgender Weise: Die Punkte $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : x_3)$ bleiben bei festen Werten von ξ_0, ξ_1, ξ_2 und beliebigen Werten von x_3 in Ruhe, wenn der Raum derjenigen eingliedrigen Gruppe unterworfen ist, deren infinitesimale Transformation durch das Symbol

$$k\xi_0 (p_1 x_2 - p_2 x_1) + \xi_2 (p_0 x_1 - k p_1 x_0) - \xi_1 (p_0 x_2 - k p_2 x_0)$$

bezeichnet wird. Zugleich wird hierbei die Ebene

$$k\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \alpha x_3 = 0$$

für jeden beliebigen Wert von α in sich verschoben.

Beim Beweise dieser Sätze ist vorausgesetzt, dafs der Koefficient k von null verschieden ist und dafs die Untergruppe, bei deren Transformationen die Ebene $x_3 = 0$ in sich bewegt wird, nur drei Parameter enthält. Wir bemerken aber, dafs die Änderungen, welche diese Sätze erleiden, wofern die genannte Untergruppe mehrgliedrig ist, sich leicht angeben lassen.

8. Bevor wir weitergehen, wollen wir die gemachten Voraussetzungen und die daraus gezogenen Folgerungen nochmals kurz überblicken.

Durch einen Punkt A, dessen Bewegung durch die Gruppe gestattet ist, legen wir eine Ebene $x_3 = 0$ und nehmen an, dafs sie bei der Ruhe von A noch bewegt werden kann, dafs aber hierbei ein Punkt B dieser Ebene nur eine einzige geschlossene krumme Linie beschreibt. Die Bewegung dieser Ebene wird durch die Transformationen (1) bestimmt. Nehmen wir an, dafs hierin der Koefficient k von null verschieden ist, und fügen wir die Voraussetzung hinzu, dafs eine weitere durch A gelegte Ebene bei der Ruhe von A in sich verschoben werden kann, und dafs auch bei dieser Bewegung für einen Punkt C der zweiten Ebene nur eine einzige, und zwar eine geschlossene Bahnkurve möglich ist, so folgt, dafs bei der zuerst betrachteten Bewegung zugleich mit dem Punkte A noch die Punkte einer Geraden, die durch die in sich verschobene Ebene und den Punkt A bestimmt ist, in Ruhe gehalten werden. Demnach ist es jetzt gestattet zu fordern, dafs die zweite Ebene durch diese Gerade hindurchgeht. Bringen wir jetzt die Transformationen (2) auf die Form (1), so bleibt mit dem Punkte (1, 0, 0, 0) die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ in Ruhe; somit dürfen wir die Ebene $x_2 = 0$ mit derjenigen Ebene zusammenfallen lassen, die wir an zweiter Stelle betrachtet haben. Wir nehmen daher an, dafs der Gruppe aufser den Transformationen (1) noch die Transformation (4) angehört, und dafs zwischen ihren Koefficienten die Bedingung besteht:

$$(6)\quad (\mu_1 - \nu_3)^2 + 4\mu_1\nu_3 < 0.$$

Die Transformation (4) schreiben wir in der Form:

$$p_3 \Sigma a_\varkappa x_\varkappa + x_3 \Sigma b_\varkappa p_\varkappa + \Sigma c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa, \qquad (\iota, \varkappa = 0, 1, 2),$$

wobei wir wegen der Bedingung (6) voraussetzen, dafs a_1 und b_1 beide von null verschieden sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wenn jetzt der Koefficient k gleich eins ist, so können wir unter Vertauschung der Marken 0 und 3 den in § 4, 2 bewiesenen Satz anwenden. Weil aber für die dort eingeführten Konstanten a_0 und b_0 die Beziehung besteht: $a_0 : b_0 = a_1 : b_1$, so müssen drei neue Transformationen hinzutreten, die sich durch leichte Änderung von x_3 in die Form bringen lassen:

$$(7)\quad p_3x_0 - p_0x_3,\; p_3x_1 - p_1x_3,\; p_3x_2 - p_2x_3.$$

Nun benutzte unsere in § 4, 2 durchgeführte Untersuchung nur formelle Rechnungen, ohne die Realität zu berücksichtigen. Wir dürfen daher, wenn nur k von null verschieden ist, x_0 durch $x_0\sqrt{k}$ und entsprechend p_0 durch $\frac{p_0}{\sqrt{k}}$ ersetzen. Dadurch gelangen wir jetzt zu den Transformationen (7), in denen wir, um zu den Formen (1) zurückzukehren, die umgekehrte Substitution machen müssen. Demnach sind mit den Transformationen (1) noch die Transformationen zu verbinden:

$$(8)\quad p_3x_0 - kp_0x_3,\; p_3x_1 - p_1x_3,\; p_2x_3 - p_3x_2.$$

Die Gruppe kann keine von den sechs Transformationen (1) und (8) unabhängige Transformation enthalten, weil sie sonst die allgemeine projektive Gruppe sein würde und demnach jede der beiden betrachteten Ebenen auch noch auf andere Weise in sich verschoben werden könnte.

Die Transformationen (1) und (8) bestimmen diejenige Gruppe, von der wir im vorigen Paragraphen erkannt haben, dafs sie zu der starren Bewegung des metrischen Raumes pafst. Indessen ist bei der Herleitung noch die Annahme gemacht, dafs die in den Ausdrücken (1) auftretende Konstante k von null verschieden ist. Wir müssen also jetzt auch noch den Fall betrachten, dafs die Konstante k gleich null ist.

9. Wenn die Verschiebung der Ebene $x_3 = 0$ in sich durch die Transformationen (1) für $k = 0$ bestimmt wird, so enthält die Gruppe der räumlichen Umgestaltungen die Transformationen:

$$(9)\quad \begin{array}{ll} x_1 p_2 - x_2 p_1 & + x_3 (a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) \\ x_0 p_1 & + x_3 (b_0 p_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \\ x_0 p_2 & + x_3 (c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3). \end{array}$$

Indem man die erste Transformation mit jeder der beiden anderen kombiniert, erhält man jedesmal eine Transformation, die in ihrer Form der dritten ähnlich ist, aber kein Glied mit $x_3 p_3$ enthält. Demnach dürfen wir annehmen, dafs die Koefficienten b_3 und c_3 gleich null sind.

Sollen unter dieser Voraussetzung die drei Transformationen (9) eine dreigliedrige Gruppe bestimmen, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(10)\quad \begin{array}{lll} c_0 + a_3 b_0 = 0, & b_0 - a_3 c_0 = 0, & a_0 + a_3 b_1 + b_2 + c_1 = 0 \\ a_3 b_2 - b_1 + c_2 = 0, & a_3 c_1 + c_2 - b_1 = 0, & a_0 + a_3 b_2 - b_2 - c_1 = 0. \end{array}$$

Wenn nicht, wie es die beiden ersten Gleichungen verlangen, $b_0 = c_0 = 0$ ist, so enthält die Gruppe eine Transformation $x_0 (e_0 p_0 + e_1 p_1 + e_2 p_2)$, worin der Koefficient e_0 nicht verschwindet. Wie sich dann durch wiederholte Kombination mit (9) zeigt, mufs die Gruppe die Transformationen $x_3 p_0$, $x_3 p_1$, $x_3 p_2$ enthalten. Wenn aber die Koefficienten b_0 und c_0 verschwinden, ohne dafs die letzten Gleichungen (10) befriedigt werden, so kommen in der Gruppe die Transformationen $x_3 p_1$ und $x_3 p_2$ vor. Wir können daher sagen: Wenn die Transformationen (9) nicht eine Untergruppe bestimmen, so ist mit ihnen die Transformation x_3p_3 oder es sind x_3p_1 und x_3p_2 oder diese drei Transformationen verbunden.

Jetzt fügen wir wieder die Annahme hinzu, dafs aufser der Ebene $x_3 = 0$ noch eine weitere durch den Punkt (1, 0, 0, 0) gelegte Ebene bei der Ruhe dieses Punktes in sich verschoben werden kann und dafs dabei die Bewegung, wenigstens für einen Punkt, auf eine geschlossene krumme Linie beschränkt ist. Dann kann man die in 5. durchgeführte Untersuchung anwenden und findet, dafs die neue Annahme nur gültig sein kann, wenn die Transformationen (9) eine dreigliedrige Untergruppe bestimmen und wenn nur die ihr angehörenden Transformationen gestatten, die Ebene $x_3 = 0$ in sich zu bewegen.

10. Die Gleichungen (10) verlangen, wie bereits bemerkt, dafs $b_0 = c_0 = 0$ ist. Im übrigen aber kann man ihnen auf zwei verschiedene Weisen genügen, nämlich

a) für $a_3 = a_0 = 0$, $c_2 = b_1$, $c_1 + b_2 = 0$.

b) für $a_0 + a_3b_1 = 0$, $b_2 = c_1 = 0$, $c_2 = b_1$.

Durch eine leichte Änderung der Koordinaten kann man den Transformationen (9) im ersten Falle die Form geben:

(11) $x_1p_2 - x_2p_1$, $x_0p_1 - lx_3p_2$, $x_0p_2 + lx_3p_1$;

im zweiten Falle erhält man:

(12) $x_1p_2 - x_2p_1 + \varrho x_3p_3$, x_0p_1, x_0p_2.

Durch alle Transformationen der Gruppe (11) wird jede Ebene $x_3 + \alpha x_0 = 0$ in sich bewegt. Mit dem Punkte (ξ_0, ξ_1, ξ_2, 0) der Ebene $x_3 = 0$ bleiben alle Punkte in Ruhe, die auf der Geraden liegen:

$$\xi_0x_2 - \xi_2x_0 + l\xi_1x_3 = 0,\ \xi_0x_1 - \xi_1x_0 - l\xi_2x_3 = 0.$$

Auch bewegt jede eingliedrige in (11) enthaltene Gruppe, bei der ein Punkt der Ebene $x_3 = 0$ in Ruhe gehalten wird, alle Punkte des Raumes in geschlossenen Linien.

Im zweiten Falle, wo die angegebene dreigliedrige Gruppe durch die Transformationen (12) bestimmt ist, verschiebt jede Transformation, bei der ein Punkt (ξ_0, ξ_1, ξ_2, 0) in Ruhe gehalten wird, die Gerade $x_0 : x_1 : x_2 = \xi_0 : \xi_1 : \xi_2$ in sich. Hierbei werden nur die Punkte der Ebene $x_3 = 0$ in geschlossenen Linien bewegt, von allen anderen Punkten aber werden Raumkurven beschrieben, welche zu den Schraubenlinien gehören, wofern nicht die Konstante ϱ den Wert null annimmt.

Die Gruppen (11) und (12) sind im allgemeinen verschieden; sie werden nur für $l = \varrho = 0$ identisch.

11. Jetzt fügen wir dieselbe Forderung bei, die wir oben (Nr. 7) für $k \lesseqgtr 0$ aufgestellt haben, dafs nämlich diejenige Ebene, die bei der Ruhe des Punktes (1, 0, 0, 0) auf die mehrfach angegebene Weise in sich verschoben werden kann, diejenige Gerade enthält, die bei der Ruhe dieses Punktes zugleich ihre Anfangslage beibehält. Wir dürfen dann wieder diese Ebene zur Ebene $x_2 = 0$ wählen und annehmen, dafs zu (11) oder (12) die Transformation (4) hinzutritt:

$$x_2 (\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3) + x_1 (\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_3 p_3) \\ + x_3 (\nu_0 p_0 + \nu_1 p_1 + \nu_3 p_3),$$

wo die Diskriminante $(\mu_1 - \nu_3)^2 + 4\mu_3 \nu_1$ einen negativen Wert hat. Wie wir bereits gezeigt haben, darf die Gruppe keine der beiden Transformationen $x_3 p_3$ und $x_3 p_1$ enthalten; auch müssen die beiden Koefficienten μ_3 und ν_1 von null verschieden sein und entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Wir untersuchen an erster Stelle den Fall, dafs die dreigliedrige Gruppe für die Bewegung der Ebene $x_3 = 0$ in sich die an zweiter Stelle angegebene Form (12) besitzt. Dann kombinieren wir die Transformation (4) mit $x_0 p_1$ und $x_0 p_2$. Indem wir in der jedesmal erhaltenen Transformation die Glieder mit $x_0 p_1$ und $x_0 p_2$ weglassen, gelangen wir zu den Transformationen:

$$x_0 (\mu_0 p_0 + \mu_3 p_3) - p_1 (\lambda_0 x_2 + \mu_0 x_1 + \nu_0 x_3)$$

und

$$x_0 (\lambda_0 p_0 + \lambda_3 p_3) - p_2 (\lambda_0 x_2 + \mu_0 x_1 + \nu_0 x_3).$$

Die erste von ihnen multiplizieren wir mit λ_3, die zweite mit μ_3 und subtrahieren sie von einander; dadurch erhalten wir:

$$(\mu_0 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_0) x_0 p_0 - (\lambda_0 x_2 + \mu_0 x_1 + \nu_0 x_3) (\lambda_3 p_1 - \mu_3 p_2).$$

Indem man $x_0 p_0$ durch $-x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3$ ersetzt, sieht man, dafs die vorstehende Transformation den Punkt (1,0,0,0) in Ruhe läfst und die Ebene $x_3 = 0$ in sich verschiebt. Entweder müssen also hier alle Koefficienten verschwinden, oder die vorstehende mufs mit der ersten Transformation (12) identisch werden. Daraus folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dafs μ_3 von null verschieden ist, dafs die drei Koefficienten λ_0, μ_0, ν_0 verschwinden.

Demnach darf man jetzt unter Vertauschung der Marken 0 und 3 das Ergebnis von § 4, 3 auf $x_1p_2 - x_2p_1 + \varrho x_3p_3$ und die vorstehende Transformation (4) anwenden. Dabei entspricht der Koefficient μ_3 dem dort gebrauchten a_1 und ν_1 dem frühern b_1. Also enthält für $\varrho \gtrless 0$ die Gruppe u. a. die Transformationen x_3p_3 und x_3p_1, was mit unseren Forderungen nicht vereinbar ist.

Soll also unsere Gruppe die Transformationen (12) enthalten, so mufs der Koefficient ϱ gleich null sein.

12. Wir müssen jetzt in gleicher Weise die Untergruppe (11) mit der Transformation (4) kombinieren. Letztere schreiben wir in der Form:

$$x_0 \Sigma a_\varkappa p_\varkappa + p_0 \Sigma b_\varkappa x_\varkappa + \Sigma c_{\iota\varkappa} p_\iota x_\varkappa, \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

die wir in § 4, 2 zu Grunde gelegt haben. Dabei ist:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \; c_{21} = c_{23} = 0, \; b_1 = \mu_0 \; . \; . \; .$$

Wir haben aber bereits in § 4, 2 gesehen, dafs die vorstehende Transformation in Verbindung mit $x_1p_2 - x_2p_1$ die Transformation nach sich zieht:

$$(c_{12} + c_{21})\,(p_1x_1 - p_2x_2) - (c_{11} - c_{22})\,(p_1x_2 + p_2x_1).$$

Aus einem schon mehrmals angegebenen Grunde müssen hier die Koefficienten verschwinden, oder es mufs sein:

$$c_{12} + c_{21} = 0, \; c_{11} = c_{22}.$$

Berücksichtigen wir diese Beziehungen und die für einzelne Koefficienten angegebenen Werte, so folgt unmittelbar durch Kombination der obigen Transformation mit $x_1p_2 - x_2p_1$, dafs die Gruppe die Transformationen enthält:

$$(13) \quad \begin{array}{l} -b_2p_0x_1 + b_1p_0x_1 - c_{32}p_3x_1 + c_{31}p_3x_2 + c_{13}p_2x_3, \\ \quad b_1p_0x_1 + b_2p_0x_2 + c_{31}p_3x_1 + c_{32}p_3x_2 + c_{13}p_1x_3. \end{array}$$

Die Kombination dieser beiden Transformationen liefert:

$$\begin{array}{l} 2c_{13}x_3\,(b_2p_0 + c_{32}p_3) + c_{13}c_{31}\,(p_1x_2 - p_2x_1) \\ \qquad - c_{32}c_{13}\,(p_1x_1 + p_2x_2). \end{array}$$

Da aber bei dieser Transformation der Punkt (1, 0, 0, 0) in Ruhe bleibt und die Ebene $x_3 = 0$ in sich verschoben wird, so mufs sie mit $x_1p_2 - x_2p_1$ identisch sein. Demnach mufs, weil die Koefficienten c_{13} und c_{31} nicht verschwinden, $c_{32} = b_2 = 0$ sein.

Kombiniert man hiernach die erste Transformation (13) mit der zweiten Transformation (11), oder die zweite Transformation (13) mit der dritten Transformation (11), so erhält man jedesmal eine Umgestaltung des Raumes, bei welcher die Ebene $x_3 = 0$ in sich verbleibt. Die neue Form mufs also entweder nur verschwindende Koefficienten enthalten oder in der Gruppe (11) enthalten sein. Daraus folgt, dafs $b_1 = l = 0$ ist.

Hiernach gehen die Transformationen (13) über in

$$c_{31} p_3 x_2 + c_{13} p_2 x_3,$$
$$c_{31} p_3 x_1 + c_{13} p_1 x_3,$$

zu denen, wie die Kombination mit $x_0 p_1$ und $x_0 p_2$ zeigt, noch $x_0 p_3$ hinzutritt. Weil aber das Produkt $c_{13} \cdot c_{31}$ negativ ist, kann man durch eine leichte Änderung die Koefficienten entgegengesetzt gleich machen. Die Gruppe enthält also die sechs Transformationen:

$$(14) \quad x_0 p_\varkappa,\ x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3).$$

Dafs weitere, von diesen sechs unabhängige Transformationen der Gruppe nicht angehören können, ohne dafs die über die Bewegung der Ebenen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ getroffenen Festsetzungen ihre Gültigkeit verlieren, zeigt die Untersuchung in § 4, 2.

13. Hiernach können wir die Frage beantworten:

Wie können wir die Bewegung in der allgemeinen Bedeutung des Wortes beschränken, um diejenige Bedeutung des Wortes zu erhalten, welche die metrische Geometrie bedarf?

Zwei allgemeine Forderungen sind bereits in 1. aufgestellt. Aus den durchgeführten Untersuchungen ergiebt sich ein System von speciellen Forderungen, das für unsern Zweck hinzugenommen werden kann. An erster Stelle verlangen wir, dafs eine durch einen Punkt A gelegte Ebene bei der Ruhe von A noch in sich verschoben werden kann, und dafs die Gesamtheit der Lagen, welche hierbei ein zweiter Punkt B einnimmt, eine geschlossene Linie bildet. Daraus folgt, dafs die für den Punkt B vorausgesetzte Eigenschaft jedem Punkt der Ebene zukommt.

Fügen wir jetzt die Annahme bei, dafs der Punkt A überhaupt noch bewegt werden kann, so verliert auch dieser Punkt seine bevorzugte Lage in der Ebene: man kann nämlich die Ebene bei der Ruhe irgend eines in ihr gelegenen Punktes in sich bewegen, und dabei werden jedesmal alle Punkte geschlossene Bahnen beschreiben. Die Gruppe der zugehörigen Transformationen ist dreigliedrig und hängt nur noch von einer willkürlichen

Konstanten k ab, wie es die drei Möglichkeiten verlangen, die für die metrische Geometrie bestehen.

Sobald eine weitere durch den Punkt A gehende Ebene bei der Ruhe dieses Punktes so in sich verschoben werden kann, dafs für einen einzigen Punkt C der Ebene nur eine, und zwar eine geschlossene Bahnkurve existiert, läfst sich daraus eine wichtige Folgerung ziehen, nämlich: Wenn der Raum sich so bewegt, dafs die erste Ebene bei der Ruhe von A in sich verschoben wird, so bleibt eine durch A gehende Gerade g in Deckung mit ihrer Anfangslage. Hiernach lassen wir die zweite Ebene, die bei der Ruhe von A in sich auf die angegebene Weise verschoben werden soll, durch die Gerade g gehen. Wir setzen also noch voraus:

Eine zweite Ebene gehe durch diejenige Gerade, welche in Deckung mit ihrer Anfangslage bleibt, wenn die erste Ebene bei der Ruhe von A in sich verschoben wird; wird diese Ebene bei der Ruhe des Punktes A in sich bewegt, so beschreibt ein der Ebene angehörender Punkt C eine geschlossene Kurve und nimmt nur Lagen auf dieser Linie an.

Sobald der Begriff der Bewegung in der angegebenen Weise beschränkt wird, erfüllt er alle Bedingungen, welche die metrische Geometrie stellt.

Übrigens verdient bemerkt zu werden, dafs die letzte Voraussetzung nicht in ihrem ganzen Umfange benutzt wird.

14. Demnach kommt es im wesentlichen darauf hinaus, die Existenz zweier Kreise vorauszusetzen; nur wird man sie nicht willkürlich annehmen dürfen, sondern mufs fordern, dafs ihre Ebenen auf einander senkrecht stehen. Dieser letztere Begriff wird aber nicht etwa axiomatisch vorausgesetzt, sondern ergiebt sich im Verlauf der Untersuchung.

Sobald man nur einen einzigen Kreis annimmt, folgt daraus die Existenz aller Kreise, welche mit ihm in einer Ebene liegen und denselben Mittelpunkt haben. Nimmt man jetzt noch an, dafs der Mittelpunkt in der Ebene des Kreises bewegt werden kann, so ergiebt sich, dafs jeder Punkt zum Mittelpunkt eines Systems von Kreisen gewählt werden kann; die Ebene besitzt die metrischen Eigenschaften. Soll eine zweite Ebene, welche von der ersten geschnitten wird, einen Kreis enthalten, so ergeben sich gewisse Gesetze über die Art und Weise, wie der Raum bei der Verschiebung der Ebene in sich bewegt wird. Diese gestatten, jedem Punkt der Ebene eine feste, durch den Punkt gehende Gerade, die auf der Ebene errichtete Senkrechte, zuzuordnen. Durch diese Gerade läfst man die zweite Ebene hindurchgehen und setzt auch in ihr die Existenz eines Kreises voraus.

15. Wie wir in den §§ 6—11 des dritten Abschnitts (B. 1. S. 178 ff.) geometrische Ausdrücke für Sätze der Analysis gebrauchten und dadurch eine wesentliche Vereinfachung der Form erreichten, welche aufserdem bedeutend zur Erleichterung des Verständnisses beitrug, ohne im geringsten den Boden der Geometrie zu betreten, so dient in der vorstehenden Entwicklung der Gebrauch der Worte: Ruhe, Bewegung, Verschiebung, Bahnlinie u. dgl. nur dazu, eine einfache und übersichtliche Ausdrucksweise zu schaffen. Demnach stehen die Entwicklungen dieses Paragraphen ganz auf dem Boden der Projektivität, obwohl die äufsere Form einen metrischen Charakter zeigt.

Dafs die aufgestellten Forderungen durch manche andere ersetzt werden können, braucht wohl kaum bemerkt zu werden. Es handelt sich ja nur darum, die mehrfach genannte sechsgliedrige Gruppe, durch welche die starre Bewegung beschrieben wird, gegenüber den übrigen projektiven Gruppen einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu charakterisieren. Bei unserer Auswahl haben wir uns durch die hohe Bedeutung bestimmen lassen, welche der Kreis bei der gebräuchlichen Behandlung der Geometrie einnimmt. Vielleicht wäre es besser gewesen, direkt räumliche Transformationen in Betracht zu ziehen; für das passendste möchte ich es halten, die einschränkenden Forderungen in Zusammenhang mit den Untersuchungen des vierten Paragraphen zu bringen. Indessen würde das hier zu weit führen.

Die Übertragung der durchgeführten Untersuchung auf den mehr dimensionalen Raum dürfen wir wohl dem Leser überlassen.

§ 7.

Fanos Begründung der Projektivität.

Bei der Begründung der Projektivität macht die Beantwortung der Frage, ob zwei Gebilde gemeinschaftliche Elemente besitzen an manchen Stellen lästige Erwägungen nötig, die zu der sonst hervortretenden Einfachheit wenig passen. Es lohnt sich daher zu untersuchen, ob die Kleinschen Voraussetzungen nicht in der Weise geändert werden können, dafs man sofort die Existenz gemeinsamer Elemente erkennt.

Nach dieser Richtung liegen zwei beachtenswerte Aufsätze vor, die beide von Herrn Segre angeregt und auch wohl beeinflufst sind; die Ausführung verdanken wir den Herren d'Amodeo und Fano.[14]) Dafs die ersten Versuche noch manche Mängel zeigen, darf uns nicht wundern; es fragt sich, ob die Arbeiten einen guten Kern enthalten, der eine weitere Ausbildung gestattet. Um den Leser zur Prüfung dieser Frage anzuregen, wollen wir das System des Herrn Fano in seinen Grundzügen darlegen.

Nur der Begriff des Punktes wird von vorn herein vorausgesetzt; alle anderen Begriffe werden entweder durch ein Postulat oder durch eine Definition eingeführt. An erster Stelle (I) wird die Gerade postuliert als ein geometrisches Gebilde, das durch zwei Punkte in eindeutiger Weise bestimmt ist. Ist eine Gerade und ein ihr nicht angehörender Punkt gegeben, so kann man durch jeden Punkt der Geraden und den festen Punkt eine Gerade legen: Die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Punkte wird eine Ebene genannt. Für das hierdurch eingeführte Gebilde sollen die Postulate gelten:

II. Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, sobald sie zwei Punkte mit ihr gemein hat;

III. Wofern zwei Gerade in derselben Ebene liegen, haben sie stets einen Punkt gemeinschaftlich.

Diese Voraussetzungen würden nichts Neues liefern, wenn die Gerade (1, 2) nur in der Zusammenstellung der Punkte 1 und 2, und infolge dessen die Ebene (1, 2, 3) in der Zusammenfassung der Punkte 1, 2, 3 bestände. Demnach wird die Voraussetzung (IV) hinzugefügt, dafs jede Gerade mehr als zwei Punkte enthält.

Sind jetzt A, B, C drei Punkte einer geraden Linie, so können wir auf dieselbe Weise, wie im zweiten Abschnitt (B. 1. S. 99—101), den vierten harmonischen Punkt finden und beweisen auf dem dort angegebenen Wege, dafs dieser Punkt von der Wahl der benutzten Ebenen und Geraden unabhängig ist.

Auch zeigt die Konstruktion, dafs vier Ebenen eines Büschels jede beliebige Gerade, die nicht durch die Achse geht, in vier harmonischen Punkten schneiden, sobald sie eine einzige Gerade in vier harmonischen Punkten treffen. Ebenso ergiebt sich unmittelbar, dafs man von irgend einer Gruppe von vier harmonischen Punkten zu jeder zweiten solchen Gruppe durch eine endliche Zahl von Projektionen und Schnitten übergehen kann.

Ist D der zu C in Bezug auf das Punktepaar AB zugeordnete harmonische Punkt, so zeigt die Konstruktion, dafs der Punkt D von den Punkten A und B verschieden ist; aber man bedarf ein neues Postulat, um zu erkennen, dafs die Punkte C und D nicht zusammenfallen. Wird dies Postulat für ein einziges Quadrupel aufgestellt, so gilt es infolge der angegebenen projektiven Zuordnung, die durch Projizieren und Schneiden vermittelt wird, für jedes andere Quadrupel. Aber hiermit ist die Zahl der unbedingt notwendigen Postulate keineswegs erschöpft, wie Fano durch eine interessante Untersuchung zeigt. Wir wollen den Beweis hier nicht vollständig wiedergeben, aber wenigstens einigermafsen charakterisieren.

Von drei Punkten OA_1A_2 einer Geraden ausgehend, sucht man eine unbegrenzte Reihe von weiteren Punkten A_3, A_4 . . . A_n . . . durch die Forderung, dafs jedesmal die vier Punkte $OA_\varkappa\ A_{\varkappa-1}\ A_{\varkappa+1}$ harmonische Punkte sind. Wenn in dieser Reihe irgend ein späterer Punkt mit einem früheren zusammenfällt, so bleibt die Reihe bei unbegrenzter Fortsetzung endlich; es fällt also ein Punkt A_{n+1} mit A_1 zusammen oder die Reihe kehrt nach n Elementen in sich zurück. Dann mufs die Zahl n eine Primzahl sein; die Gerade enthält $n + 1$ Punkte, die Ebene $n^2 + n + 1$ Punkte und $n + 1$ Gerade. Diese Gesetze gelten wegen der projektiven Zuordnung für jede Gerade und jede Ebene.

Soll also die Gerade unendlich viele Punkte enthalten, so müssen wir (Postulat V) voraussetzen, dafs in der oben definierten Reihe kein Element mit einem früheren zusammenfällt. Es genügt nicht, eine entsprechende Annahme für irgend eine noch so grofse endliche Zahl zu machen; da die Zahl der Primzahlen unendlich ist, so umfafst das letzte Postulat seinem Wesen nach unendlich viele Voraussetzungen in sich.

Die Festsetzung, dafs O, $A_\varkappa$, $A_{\varkappa-1}$, $A_{\varkappa+1}$ vier harmonische

Punkte sein sollen, gestattet, auch der Zahl null und jeder ganzen negativen Zahl einen Punkt zuzuordnen. Bei der Gültigkeit des fünften Postulats wird auch keiner der hierdurch gewonnenen Punkte mit einem anderen zusammenfallen. Die durch Projizieren und Schneiden gewonnene Zuordnung der Punkte nötigt uns auch, jeder rationalen Zahl einen Punkt in der Weise zuzuweisen, dafs zwei Punkte nur dann zusammenfallen, wenn gleiche Zahlen zu ihnen gehören. (Es ist dies, wie beiläufig bemerkt werden mag, dieselbe Zuordnung, die wir in II § 3. B. 1. S. 107 ff. dargelegt haben.)

Nachdem so für eine einzelne Gerade eine Messung eingeführt ist, hat man die Möglichkeit, unter Benutzung eines Koordinatensystems die Lage der Punkte durch Zahlen zu bestimmen. Hierbei ist man aber durchaus auf »rationale Punkte« beschränkt; will man zu Punkten übergehen, für welche einzelne Koordinaten irrationale Werte annehmen, so kommt man ohne ein neues Axiom nicht aus. Fano möchte am liebsten den Raum durch die »rationalen Punkte« erschöpft sein lassen und die »irrationalen« durch eine blofse Definition einführen; indessen wollen wir ihm auf dies Gebiet nicht folgen.

Wir bemerken nur noch, dafs er seine Theorie auf eine beliebig grofse Zahl von Dimensionen überträgt und dafs hierbei keine wesentliche Änderung notwendig wird.

Es scheint uns zweifellos, dafs diese Art der Begründung dem Leser Interesse abgewinnt; dagegen dürfte die Frage, ob das aufgestellte System von Voraussetzungen auf Natürlichkeit Anspruch machen kann, wohl kaum allgemein bejaht werden. Indem ich mich jeder Kritik enthalte, will ich zum Schlufs noch bemerken, dafs Herr Fano aufser dem Wege, den ich hier in seinen Grundzügen skizziert habe, noch einen zweiten Weg angiebt, der ebenfalls in voller Strenge zur Projektivität führen und den Vorzug der Kürze besitzen soll. Ich bin nicht sicher, ob ich diesen Teil seiner Arbeit vollständig richtig aufgefafst habe; wenn aber meine Auffassung die richtige ist, so mufs ich gestehen, dafs dieser zweiten Art, die Projektivität zu begründen, schwere Bedenken entgegenstehen.

§ 8.

Rückblick.

Als wichtigstes Ergebnis des zweiten und des sechsten Abschnittes, die wir hier im Zusammenhang überblicken wollen, müssen wir den Nachweis hinstellen, dafs sich die projektive Geometrie vollständig aufbauen läfst, ohne metrische Beziehungen im geringsten zu benutzen. Damit ist ein Problem endgültig gelöst, auf das die Wissenschaft in neuerer Zeit immer stärker hingeführt ist und das Staudt zuerst in voller Klarheit ausgesprochen und dessen Lösung er bereits kräftig gefördert hat. Es wird gut sein, nochmals die einzelnen Teile, aus denen sich der Nachweis aufbaut, in aller Kürze anzugeben.

Die Sätze, von denen die projektive Geometrie ausgeht, sind ohne Zweifel sehr einfach. Sie bilden auch insofern ein abgeschlossenes Ganze, als es nicht möglich ist, sie auf ein geringeres Mafs zurückzuführen. Die zu Grunde gelegten Sätze gelten aber nicht blofs für die (etwa erfahrungsgemäfs gegebenen) Ebenen und Geraden des Raumes, sondern auch für zahlreiche andere Systeme von Linien und Flächen. Demnach lassen sich auch die Sätze der projektiven Geometrie auf mancherlei Systeme von Flächen und Linien übertragen. Wie in der metrischen, ist es auch in der projektiven Geometrie am besten, sich anfangs ganz auf einen gewissen endlichen Bereich zu beschränken und nicht von vornherein den Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde zu legen (VI § 1).

Bekanntlich beweist dieser Zweig der Geometrie seine Lehrsätze vermittelst der projektiven und im weiteren Verlauf vermittelst der kollinearen und der reciproken Zuordnung. Dafs die letzte Verwandtschaft in unserer Darlegung, wenigstens äufserlich, zurücktritt, darf uns nicht überraschen, da wir nur die Grundlagen darlegen konnten, für den weiteren Ausbau aber auf die Lehrbücher verweisen mufsten. Der einfachste Fall der Projektivität, die Perspektivität, führt uns auf die harmonischen Gebilde (II § 2). Nun genügt freilich nach Staudt die Theorie der harmonischen Gebilde, um die Projektivität allgemein zu begründen. Indessen mufs man zu dem Zweck den Satz benutzen, dafs man von irgend drei Punkten einer Geraden aus durch blofse Konstruktion des vierten harmonischen Punktes allmählich jedem Punkte der Geraden beliebig nahe kommen kann. Beim Beweise dieses Satzes wird man aber Untersuchungen nicht entbehren können, die uns gestatten, die Theorie der Doppelverhältnisse vollständig durchzuführen, wie wir es in II § 3 gethan haben. Hierbei tritt uns aber dieselbe Schwierigkeit entgegen, welche in der metrischen Geometrie die Messung der geraden Strecke augenblicklich noch bietet. Wir konstatieren aber ausdrücklich, dafs dies die einzige Lücke ist, welche noch nicht ganz hat ausgefüllt werden können; auch berechtigen die vielen Vorarbeiten, welche diesem Gegenstande in der letzten Zeit gewidmet sind, zu der Erwartung, dafs der Abschlufs dieser Untersuchungen nahe bevorsteht.

Nachdem die Doppelverhältnisse eingeführt sind, kann man die projektive Geometrie rein synthetisch aufbauen (II § 4). Es war für uns nicht nötig, dies im einzelnen durchzuführen; es genügte vielmehr, auf Reyes »Vorlesungen über die Geometrie der Lage« zu verweisen. Man hat aus diesem Werke nur die Partieen metrischen Charakters auszuschliefsen und die kleinen Änderungen vorzunehmen, welche dadurch bedingt sind, dafs Reye von vornherein den Raum als Ganzes untersucht, wir aber anfänglich nur einen endlichen Bereich betrachten.

Um die Geometrie eines endlichen Bereiches zum Abschlufs zu bringen, hat man den Begriff des Strahlenbündels in der Weise zu erweitern, die wir in VI § 2 dargelegt haben. Der Ausspruch der dort gewonnenen Sätze wird besonders einfach, wenn man die sogenannten idealen Gebilde einführt. Zwar mufs man, wenn man diese Ausdrücke gebraucht, bei Erweiterung des Gebietes einige Vorsicht anwenden; das mindert aber nichts an dem Interesse, welches die gefundenen Sätze für sich beanspruchen.

Zugleich führt die Benutzung der idealen Gebilde in einfachster Weise zu einer projektiven Raumform, die deshalb besonders wichtig ist, weil die für einen endlichen Raumteil zu Grunde gelegten Annahmen für den Raum als Ganzes möglichst ungeändert bleiben. In derselben haben nämlich irgend zwei Ebenen eine Gerade und zwei in derselben Ebene gelegenen Geraden stets einen Punkt gemein; natürlich kann dann der Raum nicht durch eine Ebene zerlegt werden. Diese Raumform wird vielfach als die einzige projektive Raumform angesehen. Wenn das auch nicht erlaubt ist, so bietet sie doch das geeignetste Mittel, um auch die übrigen projektiven Raumformen synthetisch zu beschreiben.

Neben die synthetische stellt sich die analytische Behandlung der projektiven Geometrie, die wir aus vielen Gründen glauben bevorzugen zu sollen (II § 5 u. 6). Die kollinearen Zuordnungen stellen sich durch homogene lineare Gleichungen zwischen den homogenen Koordinaten dar (VI § 1, 8). Besonders praktisch erweist sich die analytische Behandlung, um die verschiedenen projektiven Raumformen zu charakterisieren. Unter ihnen beanspruchen zwei ein hervorragendes Interesse (VI § 3).

So können wir denn sagen: Von überaus einfachen Voraussetzungen aus läfst sich die ganze projektive Geometrie in einer Weise aufbauen, die im wesentlichen strenge Konsequenz mit voller Natürlichkeit vereinigt. Zwar will es uns scheinen, als ob den zu Grunde gelegten Annahmen noch eine gewisse Willkür anhafte; auch bietet das System in seinem Aufbau noch eine Lücke. Aber die Vorzüge dieser Behandlungsweise überwiegen in einem solchen Mafse, dafs die kleinen Mängel höchstens zu dem Versuche anregen können, die Methode noch weiter zu vervollkommnen. Diejenigen Partieen, welche man heute vielfach als transcendent bezeichnet, werden auf ein äufserst geringes Mafs eingeschränkt. Nun liegen bereits Methoden vor, welche darauf ausgehen, solche Teile ganz aus der projektiven Geometrie zu entfernen. Wir können uns der Meinung nicht verschliefsen, dafs hierbei die Natürlichkeit ganz verloren geht, dafs also der Nachteil bei weitem überwiegt. Dennoch haben wir einen derartigen Versuch in seinen Hauptzügen gekennzeichnet (VI § 7).

Indessen hat die projektive Geometrie nicht blofs an sich hohe Bedeutung, sondern sie kann auch für die Metrik nutzbar gemacht werden. Ich erinnere an die Herleitung der Formeln für die Metrik, welche wir in II §§ 7—9 und in VI § 5 gegeben haben. Diese Entwicklung ist zwar nicht so einfach wie diejenige, welche wir in I §§ 24 u. 25 liefern konnten; aber dafür hat sie viele Vorzüge anderer Art.

Für besonders wichtig erachten wir es aber, dafs wir ganz unabhängig von allen metrischen Voraussetzungen ein System von Begriffen und Urteilen angeben können, das vollständig der metrischen Geometrie entspricht. Hierin erblicken wir geradezu einen principiellen Vorzug der Projektivität. Im fünften Abschnitt erkannten wir nämlich, welche Bedeutung die Kongruenz für die Geometrie hat; wir mufsten es deshalb für erlaubt halten, die Bewegung fester Körper unter die Grundbegriffe der Geometrie aufzunehmen. Ja, die dort durchgeführte Untersuchung konnte den Schein erwecken, als ob die Bewegung notwendig zu den Grundbegriffen gehöre, und als ob man gezwungen sei, die Gesetze der Bewegung zu benutzen, wenn man eine feste Grundlage für die Geometrie schaffen will. Die projektive Geometrie zeigt, dafs die letzte Ansicht unrichtig ist, da sich uns noch manche andere Wege eröffnen, auf denen wir in voller Strenge und sogar mit grofser Leichtigkeit zum Ziel gelangen.

Von diesen Wegen haben wir drei in voller Ausführlichkeit besprochen, und diese sollen hier nochmals charakterisiert werden.

Der erste läfst sich am einfachsten darlegen, wenn wir von der bereits mehrmals erwähnten projektiven Raumform ausgehen, in welcher jedem Verhältnis der vier homogenen Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ ein Punkt, und zwar ein einziger Punkt zugeordnet ist. In dieser Raumform denken wir eine reelle ungeradlinige oder eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung gegeben, indem wir uns im ersten Falle auf das Innere der Fläche beschränken. Zwei beliebige Punkte des Raumes verbinden wir durch eine gerade Linie und bestimmen ihre Schnittpunkte mit der Fläche. Den mit einer gewissen Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, in dem die beiden gegebenen Punkte zu den Schnittpunkten stehen, nennen wir den Abstand der beiden Punkte. Ebenso legen wir durch die Schnittgerade zweier Ebenen die beiden Tangentialebenen an die Fläche; den Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser vier Ebenen multiplizieren wir mit einer gewissen Konstante und nennen das Produkt den Winkel der beiden ersten Ebenen. Die Werte dieser Doppelverhältnisse lassen sich immer angeben, obwohl die Tangentialebenen stets und die Schnittpunkte im einen Falle imaginär sind. Gründet man auf die so gewonnenen Begriffe ein System, so entspricht demselben für eine reelle Fläche die hyperbolische, für eine imaginäre Fläche die elliptische Geometrie; die parabolische Geometrie ist die gemeinsame Grenze, der sich beide Systeme bei passender Veränderung einer gewissen Gröfse unbegrenzt nähern.

Statt auf diese Weise die Längen und Winkel direkt einzuführen, kann man sich auf solche projektive Transformationen beschränken, bei denen die gegebene Fläche in sich verbleibt. So führt folgende Festsetzung zur elliptischen Geometrie. Man ordnet durch eine reciproke Verwandtschaft jedem Punkte eine Ebene derartig zu, dafs kein Punkt in die entsprechende Ebene hineinfällt. Jetzt beschränken wir die kollinearen Umgestaltungen des Raumes durch die Forderung, dafs jedesmal, wenn ein Punkt α in einen Punkt α_1 übergeführt wird, auch die dem Punkte α entsprechende Ebene in die zu α_1 zugeordnete Ebene umgewandelt wird. Durch eine ähnliche Festsetzung gelangt man zur hyperbolischen Geometrie.

Demnach dürfen wir auch sagen: Wir betrachten nur diejenigen kollinearen Transformationen des Raumes, welche eine gegebene quadratische Form der Koordinaten ungeändert lassen. Ist es möglich, diese Form durch vier positive (oder vier negative) Quadrate darzustellen, so erhält man einen elliptischen Raum. Haben aber drei Quadrate ein anderes Vorzeichen als das vierte, so gelangt man zur hyperbolischen Geometrie. Die letzte Forderung zeigt, dafs es nicht nötig ist, den projektiven Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde zu legen, dafs es vielmehr genügt, irgend einen endlichen Bereich zu betrachten. Wir haben diese Methode in II § 10 u. 11 ausführlich dargelegt.

So schön dieser Übergang von der Projektivität zur Metrik ist, hat er doch einige Mängel. Erstens kann die parabolische Geometrie nicht genau auf demselben Wege definiert werden wie die beiden anderen. Zweitens liefert die Theorie keinen erkennbaren Grund, warum die geradlinigen Flächen ausgeschlossen werden oder warum das Innere der Fläche vor dem Äufseren bevorzugt wird.

Demnach ist es erwünscht, andere Wege angeben zu können, die zu demselben Ziele führen. Dafs dabei die Theorie der Transformations-Gruppen benutzt wird, ist kein Mangel, erschwert aber, solange diese Theorie nicht allgemein bekannt ist, vielfach das Verständnis.

Der in VI § 4 angegebene Übergang von der Projektivität zur Metrik geht von folgender Erwägung aus. Die kollinearen Umgestaltungen in ihrer Gesamtheit setzen jeden Punkt, jede Gerade und jede Ebene in Beziehung zu jedem Punkte, jeder Geraden und jeder Ebene. Es mufs daher als eine wesentliche Eigenschaft der allgemeinen projektiven Gruppe betrachtet werden, dafs sie nicht nur jeden Punkt in einen beliebigen Punkt, sondern auch jede Gerade und Ebene in eine beliebige Gerade und Ebene überführt. Will man demnach eine Beschränkung einführen, so liegt nichts näher, als die Forderung bestehen zu lassen, dafs wenigstens für einen gewissen Bereich alle Punkte, Geraden und Ebenen in einander transformiert werden können; man kann mit anderen Worten nach der kleinsten projektiven Gruppe fragen, welche dieser Forderung genügt. Dabei tritt die Vereinfachung ein, dafs man sich auf Ebenen beschränken darf, dafs man also nur die Forderung zu stellen braucht: Von der allgemeinen projektiven Gruppe des dreidimensionalen Raumes soll die kleinste Untergruppe gesucht werden, welche im stande ist, eine Ebene in jede andere zu transformieren, die mit ihr in einem festgewählten Bereiche liegt.

Um demnach zur Metrik überzugehen, wähle man einen Bereich ganz beliebig und bestimme die kleinste projektive Gruppe, deren Transformationen im stande sind, eine Ebene, welche teilweise in diesem Bereiche liegt, in jede andere Ebene überzuführen, welche teilweise demselben Bereiche angehört. In der Darstellung dieser Untergruppe tritt eine willkürliche Konstante auf, deren Verschwinden auf die parabolische Geometrie führt. Wählt man die Konstante so, dafs sie für die elliptische Geometrie positiv ist, so erhält sie für die hyperbolische Geometrie einen negativen Wert (VI § 4).

Von der Projektivität kann man auf einem dritten Wege zur Metrik übergehen, indem man nämlich den Transformationen, die einen Punkt und eine durch ihn hindurchgehende Ebene ungeändert lassen, eine gewisse Beschränkung auferlegt (VI § 6). Auch diese Methode liefert nur diejenigen Raumformen, die mit der Erfahrung vereinbar sind. Zugleich nähert sich dieser Weg in seiner äufsern Form der Metrik und beantwortet die Frage: Welche Eigenschaften mufs man mindestens der starren Bewegung noch beilegen, wenn man annimmt, dafs durch dieselbe das

System der Geraden und Ebenen nicht geändert wird? Es zeigt sich, dafs die Beschränkung im wesentlichen darauf hinauskommt, die Existenz zweier Kreise vorauszusetzen.

Dieser kurze Überblick zeigt, welch hohe Bedeutung der projektiven Geometrie zukommt. Indessen belehren uns die zahlreichen Versuche, welche in den letzten Jahrzehnten gemacht sind, um die Existenz der Geraden und Ebenen auf andere Principien zurückzuführen, dafs es vielen Geometern nicht recht gefällt, diese Gebilde axiomatisch vorauszusetzen. Hiernach scheint es geboten, in den beiden folgenden Abschnitten wieder an die früheren Entwicklungen, speciell an die des fünften Abschnitts, anzuknüpfen.

Siebenter Abschnitt.

Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.

§ 1.

Vorbemerkungen.

1. Die folgenden Darlegungen wollen in diejenigen Begriffe einführen, welche wir als die Grundbegriffe der Geometrie ansehen. Daſs wir dabei auch die Gerade und die Ebene, sowie den Winkel besprechen, bedarf wohl keiner Rechtfertigung. Zwar ist die Theorie dieser Gebilde noch nicht zum vollen Abschluſs gebracht; aber es muſs zur Klärung beitragen, wenn wir die wichtigsten Definitionen, welche darüber aufgestellt sind, zusammenstellen und einige kritische Bemerkungen beifügen. Eine absolute Vollständigkeit können wir nicht erstreben, da alsdann der Umfang des Buches zu sehr anwachsen würde; sie ist aber auch um so weniger notwendig, da wir den Leser auf das sorgfältig durchgeführte Werk verweisen können: Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts, das in zwei Bänden erschienen ist (Leipzig 1890 und 1893). Da hierin regelmäſsig angegeben ist, von welchen Gelehrten die verschiedenen Definitionen hauptsächlich vertreten werden, brauchen wir dies hier nicht jedesmal zu erwähnen.

Ehe wir zu unserm eigentlichen Gegenstande übergehen, möchten wir einige Bemerkungen vorausschicken.

2. Die Gerade kann man nach drei verschiedenen Beziehungen hin betrachten, und man ist übereingekommen, dementsprechend drei verschiedene Worte zu gebrauchen: (gerade) Strecke, Strahl oder Halbgerade, gerade Linie. Wenn man von einer Strecke spricht, setzt man beide Endpunkte als gegeben voraus, so daſs

das Gebilde kein veränderliches Element enthält; der Strecke kommt eine bestimmte Lage im Raume und eine bestimmte Länge zu. Wenn man aber von der Strecke AB den einen Endpunkt A festhält und es als zulässig ansieht, dafs der Punkt B ersetzt werde bald durch einen in der Strecke AB gelegenen Punkt C, bald durch einen Punkt D, der so liegt, dafs die Strecke AB in der Strecke AD enthalten ist, so spricht man vom Strahle oder von der Halbgeraden AB.*) Man sagt auch wohl, durch den Strahl AB solle eine gewisse vom Punkte A ausgehende Richtung bezeichnet werden. In der Euklidischen und der Lobatschewskyschen Raumform kann man die Strecke AB über B hinaus unbegrenzt verlängert denken, während der Punkt A festgehalten wird; das fällt in der Riemannschen Geometrie, ihrer Polarform und den meisten Clifford-Kleinschen Raumformen weg.

Drittens kann man bei einer Strecke AB von beiden Endpunkten absehen und gestatten, dafs sie durch irgend zwei Punkte ersetzt werden, die entweder auf der Strecke AB oder in der Verlängerung über A oder über B hinaus liegen. Um dies anzudeuten, spricht man von der geraden Linie AB. Demnach gehören zwei verschiedene Strecken AB und CD derselben geraden Linie an, wenn es eine dritte Strecke giebt, in der die beiden gegebenen Strecken enthalten sind.

3. Ganz entsprechende Unterscheidungen hat man bei der Ebene zu machen; nur ist die Zahl der einzelnen Fälle unendlich grofs. Indessen lassen sich dieselben wieder zu drei Klassen anordnen. An erster Stelle können wir eine allseits begrenzte ebene Fläche betrachten, wie das Innere eines Dreiecks oder eines Kreises. Zweitens gestatten wir eine Erweiterung des Gebietes, indem wir einen Teil der Grenze als fest oder doch nur insoweit als veränderlich ansehen, dafs derselbe stets einer bestimmten Linie angehört. In diesem Sinne sprechen wir vom Äufsern eines Kreises; dabei denken wir an ein ebenes Flächenstück, welches zum Teil

*) Das Wort Strahl drückt wegen der Beziehung zu der von einem Punkte ausgehenden Lichtwelle, die sich unbegrenzt fortsetzen kann, die hier in Betracht kommende Eigenschaft besonders scharf aus; dafs das Wort in der projektiven Geometrie eine andere Bedeutung erlangt hat, ist nicht gerade angenehm, kann aber kein Hindernis bieten, ihm in der metrischen Geometrie den obigen Sinn beizulegen, da ein Mifsverständnis nicht zu befürchten ist.

von einer gegebenen Kreislinie begrenzt wird und dessen übrige Begrenzung sich beliebig ändern kann. Bei der Halbebene denken wir eine Gerade unbegrenzt verlängert und verlangen, dafs auch die Verlängerung stets die Grenze sein soll. Diese Forderung können wir schärfer in folgender Weise aussprechen: Wir betrachten zwei ebene Flächen α und β als derselben Halbebene angehörig, wenn ein Teil der Grenze von α durch eine gewisse Strecke AB, ein Teil der Grenze von β durch eine Strecke CD gebildet wird, wenn diese Strecken in dem oben angegebenen Sinne derselben Geraden angehören, keine in dieser Geraden enthaltene Strecke in das Innere einer der beiden Flächen fällt, und wenn man endlich eine ebene Fläche bestimmen kann, der die beiden gegebenen Flächen als Teile angehören.

Endlich kann man die Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung betrachten. Man geht von einem ebenen Flächenstück A aus, nimmt ein zweites A_1 hinzu, welches einen Teil mit A gemeinschaftlich hat, aber zum Teil über dasselbe hinausgeht; eine weitere ebene Fläche A_2 falle wiederum zum Teil mit A_1 zusammen u. s. w.; auf diese Weise möge man zu einer ebenen Fläche B gelangen, die mit einem vorher gefundenen Flächenstück A_n einen Teil gemeinsam hat; alsdann betrachten wir die ebenen Flächen A und B als derselben Ebene angehörend. Hierbei sieht man ganz von der Begrenzung ab und verlangt nur, dafs die einzelnen Teile durch Erweiterung des Gebietes in einander übergeführt werden können. Meistens genügt folgende Festsetzung: Die ebenen Flächen A und B sollen derselben Ebene angehören, wenn es ein drittes ebenes Flächenstück giebt, dem sowohl die Fläche A wie die Fläche B als Teile angehören.

§ 2.

Der Winkel.

1. Für den Anfang der Geometrie genügt es, nur solche Winkel zu betrachten, die kleiner sind als zwei Rechte. Auch im weiteren Verlauf wird diese Beschränkung stets festgehalten, wofern nicht der Zusammenhang oder eine ausdrückliche Festsetzung es anders verlangt. Da man zudem den allgemeinsten Begriff des Winkels leicht herleiten kann, sobald man den ur-

sprünglichen Begriff entwickelt hat, so genügt es für unsern Zweck, was im folgenden stets geschehen soll, sich auf den nächsten Begriff des Winkels zu beschränken. Das thun auch alle diejenigen, welche den Winkel als »die Neigung zweier Geraden zu einander« oder als den »Unterschied ihrer Richtungen« definieren. Indessen ist diese Form ungenau, da zwei gerade Linien vier Winkel mit einander bilden, die sich allerdings zu zwei Paaren gleicher Winkel anordnen. Man muſs also von der Neigung zweier Halbgeraden (Strahlen) sprechen, die den Endpunkt gemeinsam haben. Jedoch hat man hiermit keine eigentliche Definition gegeben, da man den zu erklärenden Begriff auf einen anderen Begriff zurückführt, der selbst nicht näher erklärt wird. Damit soll nicht geleugnet werden, daſs es beim Unterrichte angebracht ist, diesen Ausdruck zur Erläuterung heranzuziehen, da dem Schüler klar gemacht werden muſs, daſs es für den Winkel nicht auf die Länge der Schenkel ankommt.

Man erklärt auch den Winkel als eine Figur, welche aus zwei in demselben Punkte begrenzten Strahlen besteht. Wenn man diese Erklärung aufstellt, muſs man beachten, daſs der Raum unbeweglich ist und daſs damit auch die Raumgebilde so lange unveränderlich sind, als man nur ihre Lage im Raume betrachtet. Zwar liebt man es vielfach, nur den Strecken eine unveränderliche Länge beizulegen, aber Strahlen beliebige Drehungen um ihren Endpunkt zu gestatten und die feste Lage erst durch die Hinzunahme weiterer Linien herbeizuführen. Eine derartige Festsetzung ist aber rein willkürlich; vielmehr hat der einzelne Strahl bereits eine feste Lage, die man natürlich durch Bewegung verändern kann. Sobald man von der Neigung zweier Strahlen spricht, faſst man zum mindesten ihre gegenseitige Lage als unveränderlich auf. Demnach enthält der Begriff der aus zwei Strahlen bestehenden Figur alles, was man mit dem Worte Neigung ausdrücken will.

2. Reicher wird indessen der Begriff des Winkels, wenn man die durch die Schenkel gelegte Ebene hinzunimmt. Diese Ebene wird durch die Schenkel in zwei Teile zerlegt. Um diese von einander zu unterscheiden, wähle man auf dem einen Schenkel einen Punkt A, auf dem anderen einen Punkt B; dann liegt die Strecke AB in einem der beiden Teile. Dieser Teil ist, wie man

leicht beweist, unabhängig davon, welche Punkte man auf den beiden Schenkeln gewählt hat. Demnach ist es angebracht, diesen Teil zu bevorzugen und als Winkelfeld zu bezeichnen. (Wie man diese Erklärung für die Riemannsche Geometrie, ihre Polarform und die Clifford-Kleinschen Raumformen umgestalten mufs, bedarf wohl keiner nähern Auseinandersetzung.)

Bei dieser Festsetzung gilt der Satz, dafs Winkel, deren Schenkel zusammenfallen, auch dasselbe Winkelfeld haben. Auch liegt es nahe, von zwei Winkelfeldern, die denselben Scheitel haben und von denen das eine einen Teil des andern bildet, das eine als das kleinere, das andere als das gröfsere zu bezeichnen. Dieser Ausdruck ist berechtigt, da die bestimmende Eigenschaft bei Erweiterung des Gebiets unverändert bleibt. Man darf die entsprechende Bezeichnung auch auf die Winkel selbst übertragen und sie als gleich, gröfser und kleiner unterscheiden. Will man zwei Winkel nach ihrer Gröfse mit einander vergleichen, so legt man sie mit dem Scheitel und dem einen Schenkel über einander (in dieselbe Halbebene); dadurch wird die Vergleichung ermöglicht, und man erkennt, dafs zwei beliebige Winkel entweder einander gleich sind, oder dafs der eine gröfser ist als der andere.

3. Die Messung des Winkels gehört an sich wohl nicht in den Anfang des geometrischen Unterrichts, sondern an eine viel spätere Stelle. Indessen empfiehlt es sich aus mancherlei Gründen, den Schüler recht früh im Gebrauch des Transporteurs zu üben und diejenigen Sätze anzugeben, auf die sich dies Instrument stützt.

Will man aber, was für manche Untersuchungen genügt, die Winkel nur nach gleich, gröfser und kleiner vergleichen, so bedarf man der Ebene nicht; es genügt, die beiden Sätze zu benutzen, dafs eine Drehung um eine Gerade möglich ist, und dafs diese soweit fortgesetzt werden kann, bis jeder Punkt seine Anfangslage wieder erreicht. Dreht man einen Winkel AOB um den einen Schenkel OA, so beschreibt der andere eine Fläche, welche zwei Teile des Raumes gegen einander abgrenzt. Einen zweiten Winkel CQD legt man so, dafs der Punkt Q auf O und der Strahl QC auf OA fällt; gehört dann der Punkt D der Fläche an, so werden die Winkel als gleich bezeichnet, weil sie mit einander zur Deckung gebracht werden können; wenn aber der

Punkt D in denjenigen Raumteil fällt, in dem der ruhende Strahl OA liegt, so soll der Winkel CQD kleiner sein als AOB.

Um diese Festsetzung als berechtigt nachzuweisen, hat man nur die Grundeigenschaften der geraden Linie und einige Sätze über die Bewegung, oder wenn man lieber will, einige Eigenschaften der Kugel zu benutzen; dagegen werden die Eigenschaften der Ebene nicht vorausgesetzt.

4. Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben, während die anderen derselben geraden Linie angehören, werden Nebenwinkel genannt; wenn zwei Nebenwinkel einander gleich sind, so heifst jeder von ihnen ein Rechter. Die Frage, ob es rechte Winkel giebt, beantwortet Euklid durch eine Konstruktion. Dabei werden aber, wie wir früher (V § 8 S. 41) hervorgehoben haben, einige Sätze benutzt, die sich auf das Princip der Stetigkeit stützen; es ist demnach gestattet, die Existenz des rechten Winkels direkt aus diesem Princip herzuleiten.

Man gehe von den beiden Nebenwinkeln AOC und BOC aus, wo OA und OB entgegengesetzte Richtung haben. Sind diese gleich, so ist jeder ein Rechter; ist aber etwa AOC < BOC, so ziehe man im Winkelfelde BOC einen Strahl OD so, dafs BOD = AOC ist; dann ist auch AOD = BOC. Läfst man jetzt einen Strahl OX sich in der Ebene um O aus der Lage OC in die Lage OD drehen, so ist bei Beginn der Bewegung der Winkel AOX kleiner als BOX, am Ende der Bewegung aber AOX gröfser als BOX; folglich mufs OX während der Bewegung eine Lage annehmen, in der die beiden Winkel einander gleich sind. Hiermit ist die Existenz des rechten Winkels bewiesen.

Es ist nicht nötig, bei dieser Herleitung die Ebene zu benutzen. Wenn die beiden Nebenwinkel AOC und BOC gegeben sind, so genügt es, den Strahl OD so zu ziehen, dafs BOD=COA ist, und im übrigen seine Lage willkürlich zu lassen. Geht jetzt der Strahl OX aus der Lage OC in die Lage OD stetig über, so mufs er mindestens einmal eine Lage annehmen, in welcher AOX = BOX ist.

5. Euklid verlangt in seinem vierten Postulat, dafs alle rechten Winkel einander gleich sind. Dies Postulat wird, soweit ich übersehen kann, von keiner Seite mehr als solches anerkannt; nur Herr Lindemann [15]) glaubt es retten zu sollen. Dieser Gelehrte

geht von folgender Überlegung aus: Wenn jemand von der starren Bewegung voraussetzt, dafs sie alle Geraden und Ebenen in einander überführt und zugleich alle Längen und Winkel unverändert läfst, so legt er mehr Voraussetzungen zu Grunde als notwendig sind, weil die hierbei angenommenen Eigenschaften zum Teil blofse Folgerungen aus den übrigen sind. Seines Erachtens genügt es, ohne Beweis anzunehmen, a) dafs alle Geraden und Ebenen in einander übergeführt werden können, b) dafs alle Längen ungeändert bleiben, und c) dafs alle rechten Winkel zur Deckung gebracht werden können. Wenn eine Bewegung diesen Forderungen genügt, so bleiben bei ihr auch, wie rein projektive Untersuchungen zeigen, alle Winkel ungeändert.

Demnach bezeichnet er es als unlogisch, »die einfacheren Grundsätze Euklids durch umfassendere Folgesätze zu ersetzen.« Diejenigen, welche den Begriff der starren Bewegung in voller Allgemeinheit voraussetzen, begehen nach seiner Ansicht denselben Fehler, wie diejenigen, welche etwa ein gleichschenkliges Dreieck als ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten und zwei gleichen Winkeln definieren wollten, da sie in die Definition Eigenschaften mit aufnehmen, welche blofse Folgerungen aus den übrigen Eigenschaften sind. Demnach stellt er das vierte Postulat Euklids geradezu neben die Annahme Riemanns von der Konstanz des Krümmungsmafses.

Lindemann übersieht aber hierbei, dafs er dem griechischen Mathematiker, den er verteidigen will, dem er sogar eine Ahnung der Kleinschen Entdeckungen beilegen möchte, einen logischen Fehler imputiert. Die starre Bewegung soll dadurch charakterisiert werden, dafs bei ihr die rechten Winkel ungeändert bleiben; der rechte Winkel wird definiert (Def. 10) als ein solcher, der seinem Nebenwinkel gleich ist; die Gleichheit wird erst durch die Möglichkeit der Deckung erkannt (Axiom 4), diese aber durch starre Bewegung vermittelt. Demnach setzt die Definition des rechten Winkels bereits die starre Bewegung voraus, während die letztere selbst erst durch die Gleichheit der rechten Winkel definiert werden soll. Ein derartiger Zirkel ist aber weit schlimmer als eine Definition, die sich nicht mit den unbedingt notwendigen Merkmalen begnügt.

Übrigens verfällt hier Lindemann in denselben Fehler, den er anderen vorwirft, indem er annimmt, dafs neben den Axiomen der Geraden, der Ebene und des Kreises, also neben den von Euklid in seiner vierten, siebenten und fünfzehnten Definition gemachten Voraussetzungen noch sein viertes Postulat notwendig sei. Wie wir in II § 7—9 (B. 1. S. 128—149) und in VI § 5 (S. 129 ff.) nachgewiesen haben, gestatten die Axiome der Geraden, der Ebene und des Kreises, den Winkel einzuführen und zu zeigen, dafs jede Bewegung, welche den genannten Axiomen genügt, die Winkel ungeändert läfst. Die Forderung, den rechten Winkel wieder in einen rechten Winkel überzuführen, ist also überflüssig.

Wir haben sogar bedeutend weiter gehen können, indem wir in VI § 6 (S. 153 ff.) zur Charakterisierung der starren Bewegung neben der Annahme, dafs alle Ebenen wieder in Ebenen übergehen, nur die Existenz zweier Kreise voraussetzten. Auch hierbei stellt sich die Erhaltung der Gröfse des Winkels als eine Folgerung aus den Prämissen heraus. So sehr wir es daher Herrn Lindemann als Verdienst anrechnen, darauf hingewiesen zu haben, dafs es nach Einführung der Geraden und der Ebene nicht mehr notwendig ist, axiomatisch vorauszusetzen, dafs alle Gröfsenbeziehungen bei der starren Bewegung erhalten bleiben, müssen wir doch seinen Versuch, das vierte Postulat Euklids als berechtigt nachzuweisen, als mifslungen bezeichnen.

Eine derartige Beschreibung der starren Bewegung ist indessen nur möglich, wenn man von der Projektivität ausgeht und das System der Geraden und Ebenen axiomatisch voraussetzt. Will man aber diese Gebilde aus allgemeineren Principien herleiten, so kann man den Begriff der starren Bewegung in seinem vollen Umfange nicht entbehren. In diesem Falle baut sich nämlich die Geometrie wesentlich auf diesem Begriffe auf, und es versteht sich von selbst, dafs ein Begriff, der einem solchen Lehrgebäude als Grundlage dient, einen reichen Inhalt haben mufs.

§ 3.

Über die Ebene und die Gerade als Raumgebilde.

1. Eine wahrhaft musterhafte Darlegung aller Voraussetzungen, welche über die Gerade und die Ebene gemacht werden müssen, wenn man daraus die weiteren Eigenschaften in voller Strenge

herleiten will, giebt Pasch in seinen Vorlesungen über die neuere Geometrie. Darin geht er von der (geraden) Strecke und entsprechend von der ebenen Fläche aus und gelangt erst allmählich zur unbegrenzten Gerade und zur Ebene. Seine Methode ist dadurch charakterisiert, dafs keine Definitionen aufgestellt, sondern nur hinreichend viele Eigenschaften der Gebilde vorausgesetzt werden. Demnach stellt er über die Gerade acht und über die Ebene vier Grundsätze auf. Es wird gut sein, dieselben hier mitzuteilen.

a) Grundsätze über die Gerade:

1. Zwischen zwei Punkten kann man stets eine gerade Strecke ziehen, und zwar nur eine.

2. Man kann stets einen Punkt angeben, der innerhalb einer gegebenen geraden Strecke liegt.

3. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so liegt der Punkt A aufserhalb der Strecke BC.

4. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so sind alle Punkte der Strecke AC zugleich Punkte der Strecke AB.

5. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so kann ein Punkt, der keiner der Strecken AC und BC angehört, nicht zur Strecke AB gehören.

6. Sind A und B beliebige Punkte, so kann man den Punkt C so wählen, dafs B innerhalb der Strecke AC liegt.

7. Liegt der Punkt B innerhalb der Strecken AC und AD, so liegt entweder der Punkt C innerhalb der Strecke AD, oder der Punkt D innerhalb der Strecke AC.

8. Liegt der Punkt B innerhalb der Strecke AC und der Punkt A innerhalb der Strecke BD, und wird CD durch eine gerade Strecke verbunden, so liegt der Punkt A auch innerhalb der Strecke CD.

b) Grundsätze über die Ebene:

1. Durch drei beliebige Punkte kann man eine ebene Fläche legen.

2. Wird durch zwei Punkte einer ebenen Fläche eine gerade Strecke gezogen, so existiert eine ebene Fläche, welche alle Punkte der vorigen und auch die Strecke enthält.

3. Wenn zwei ebene Flächen E, E′ einen Punkt gemein haben, so kann man einen anderen Punkt angeben, der sowohl

mit allen Punkten von E, als auch mit allen Punkten von E' je in einer ebenen Fläche enthalten ist.

4. Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte A, B, C durch die geraden Strecken AB, BC, AC paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke DE durch einen innerhalb der Strecke AB gelegenen Punkt gezogen, so geht die Strecke DE oder eine Verlängerung derselben entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

Diese Voraussetzungen gestatten, die projektiven Eigenschaften herzuleiten; um aber die Metrik zu begründen, werden zehn weitere Grundsätze beigefügt.

Die grofse Zahl dieser Voraussetzungen kann auf den ersten Blick auffallend erscheinen; aber man berücksichtige, dafs hier alle diejenigen Sätze aufgenommen sind, welche gewöhnlich aus den Principien der Teilung, der Stetigkeit u. s. w. hergeleitet werden. So kann der zweite Grundsatz über die Gerade auch die Form erhalten:

Man kann die Strecke in zwei Teile zerlegen; der Punkt, der die Grenze dieser Teile bildet, gehört der Strecke an.

Überhaupt wenden die Grundsätze 3, 4, 5, 7, 8 über die Gerade das Princip der Teilung auf die Strecke an, während der Grundsatz 6 die Verlängerung der Strecke begründet. Der vierte Grundsatz über die Ebene kommt auf das Princip der Stetigkeit hinaus.

Nun ist es gewifs sehr anzuerkennen, dafs alle Voraussetzungen, welche in dem genannten Werke benutzt werden, auf den ersten Seiten in solcher Vollständigkeit und Klarheit aufgestellt werden; aber es fragt sich, ob sie als Grundlagen der Geometrie genügen. Ehe man diese Frage bejaht, versuche man diejenigen Sätze, welche über die Gerade und die Ebene hinausgehen, mit gleicher Strenge herzuleiten. Ich will hier nur an die synthetische Begründung der Kegelschnitte vermittelst projektiver ebener Strahlenbündel erinnern. Hier kommt es doch wohl an erster Stelle darauf an, zu erkennen, dafs vermittelst dieser Konstruktion nicht blofs einzelne Punkte, sondern ein zusammenhangendes Gebilde, eine Linie, gewonnen wird. Auch mufs auf diese Linie wieder die Teilung angewandt werden; man mufs also zeigen, dafs für diese Linien im wesentlichen dieselben Sätze gelten, wie sie in den Grundsätzen 3—5, 7, 8 für die Gerade eingeführt sind. Auch die Art, wie die Lehre über den Schnitt einer Geraden mit einem Kegelschnitt und über die gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte gewöhnlich behandelt wird, läfst sich nicht ohne weiteres an die Entwicklungen des Herrn Pasch anschliefsen. Es bedarf daher noch einer eigenen Untersuchung, um darüber zu entscheiden, ob die angegebenen Grundsätze wirklich für den Aufbau der Geometrie genügen.

2. Euklid giebt für die Gerade und die Ebene folgende Definitionen, welche in den Vorbemerkungen zum ersten Buche die vierte und die siebente Stelle einnehmen:

»Die Gerade ist diejenige Linie, welche gegen die in ihr enthaltenen Punkte gleichförmig liegt.«

»Die Ebene ist diejenige Fläche, welche zwischen den in ihr enthaltenen Geraden gleichförmig liegt.«

Da in der letzten Definition die gleichförmige Lage zwischen den in einer Ebene enthaltenen Geraden gefordert wird, haben wir zunächst zu fragen, welche Geraden hierbei bereits vorausgesetzt werden. Der Wortlaut, sowie die Ähnlichkeit mit der Definition der geraden Linie, könnte uns veranlassen zu denken, dafs alle in der Ebene enthaltenen Geraden von vorn herein postuliert werden. Aber eine solche Auffassung dürfte nicht gestattet sein. Euklid will von vorn herein gewifs nur eine einfach unendliche Schar von Geraden betrachten und fügt die Forderung der gleichförmigen Lage hinzu, um die Ebene vor den übrigen Flächen auszuzeichnen, in denen unendlich viele gerade Linien enthalten sind. Wahrscheinlich vergleicht er die Ebene mit den verschiedenen Arten von Kegelflächen, indem er eine Schar von Geraden betrachtet, die durch einen festen Punkt gehen; dabei legt er ohne Zweifel zwei gerade Linien zu Grunde und bestimmt die übrigen Punkte (und Geraden) durch die Forderung der gleichförmigen Lage.

An zweiter Stelle müssen wir eine Erklärung des Ausdrucks »gleichförmige Lage« (ἐξ ἴσου κεῖσθαι) verlangen. Indessen suchen wir diese bei Euklid und überhaupt bei den Alten ganz vergebens. Proklus, der doch weitschweifig genug ist, geht auf diese Frage nicht ein; bei der Ebene begnügt er sich damit, die verschiedenen Arten der in sich verschiebbaren Flächen anzugeben;

betreffs der Geraden behauptet er, der Ausdruck solle heifsen, die gerade Strecke sei der kürzeste Weg zwischen je zwei ihrer Punkte, was ohne Zweifel Euklid ganz fern gelegen hat.

3. Augenblicklich scheinen folgende Definitionen sehr beliebt zu sein:

»Die Gerade ist diejenige Linie, welche durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist.«

»Die Ebene ist diejenige Fläche, welche durch eine Gerade und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt bestimmt ist.«

Manche ziehen für die Ebene die Form vor, sie sei durch drei Punkte bestimmt; hier mufs aber die Beschränkung beigefügt werden, dafs die drei Punkte nicht in einer geraden Linie liegen.

Man glaubt vielfach, hierdurch alles Axiomatische entfernt und diese Gebilde rein begrifflich eingeführt zu haben. Auch meint man jetzt folgern zu dürfen, dafs die Ebene jede zwischen zwei ihrer Punkte gezogene Gerade ganz enthält, und dafs zwei verschiedene Ebenen eine gerade Linie gemein haben.

Es will mir scheinen, als ob die Art, wie die Gerade und die Ebene in der projektiven Geometrie eingeführt worden, auf die Beliebtheit der angegebenen Definitionen von Einflufs gewesen sei. Indessen besteht zwischen der in der projektiven Geometrie geltenden Auffassung und derjenigen, welche sich in den aufgestellten Definitionen kundgiebt, ein wesentlicher Unterschied. Im letzteren Falle wird ein ganz bestimmtes System von Linien und Flächen verlangt; für die Projektivität kommt es nur darauf an, irgend ein System, welches den angegebenen Forderungen genügt, den weiteren Untersuchungen zu Grunde zu legen. Indem man sich aber, nachdem ein solches System einmal gewählt ist, ganz auf dasselbe beschränkt, dürfen wir jede einzelne Linie desselben durch zwei, jede seiner Flächen durch drei Punkte bestimmen (wo im letzten Falle die drei Punkte nicht derselben Linie des Systems angehören). Trotz der Ähnlichkeit in der äufsern Form besteht demnach in der Sache volle Verschiedenheit. Es geht also nicht an, die projektive Geometrie zur Rechtfertigung dieser Definitionen heranzuziehen.

Vielleicht hat auch ein anderer Umstand aut die Aufstellung der Definitionen eingewirkt. Nachdem für eine Kurve oder Fläche gewisse Eigenschaften festgelegt sind, besteht eine wichtige Aufgabe in der Ermittlung der Zahl von Punkten, durch welche man Kurven oder Flächen von der verlangten Eigenschaft nur in einer endlichen Anzahl legen kann. So gehen durch vier Punkte der Ebene zwei Parabeln hindurch. Hervorragende Wichtigkeit bietet der Fall, dafs durch eine gewisse Zahl von Punkten jedesmal eine, und zwar eine einzige Kurve oder Fläche gelegt werden kann; alsdann sagt man, das Gebilde sei durch die Punkte bestimmt. In diesem Sinne ist ein Kreis durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt, welche so in einer Ebene liegen, dafs keine drei unter ihnen einer geraden Linie angehören. Nun hat man versucht, die Aufgabe umzukehren und die Eigenschaften eines Gebildes aus der Zahl der dasselbe bestimmenden Punkte herzuleiten. Aber was kann denn der Ausdruck: Eine Linie oder eine Fläche ist durch eine gewisse Zahl von Punkten bestimmt, für einen Inhalt haben, solange man die Eigenschaften der Linie oder der Fläche nicht als bekannt voraussetzt? Vergebens sieht man sich nach einer Erklärung dieses Ausdrucks um, die doch gegeben sein mufs, ehe man mit der aufgestellten Definition operieren darf.

Auch mufs es auffallen, dafs man diese Definition auf die Gerade und die Ebene beschränkt und bei den übrigen Gebilden von anderen Definitionen ausgeht. Der Grund liegt einfach darin, dafs man mit der Erklärung nichts anfangen kann. Selbst die Versuche, die einfachsten Eigenschaften der Gerade und Ebene aus ihr herzuleiten, können auf Strenge keinen Anspruch machen. Wollte man aber weitergehen, so würde die Leere des Begriffs noch deutlicher hervortreten. So versuche man nur, der Untersuchung des Kreises die Eigenschaft zu Grunde zu legen, dafs er durch drei Punkte bestimmt sei; man wird schwerlich zum Ziele gelangen.

Selbst in der Beschränkung auf die Gerade und die Ebene würde die Definition nur dann einen Schein von Berechtigung beanspruchen können, wenn es nur ein System von Linien und Flächen gäbe, welches durch die Forderung charakterisiert ist, dafs durch irgend zwei Punkte des Raumes eine einzige Linie des Systems und durch jede Linie des Systems und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt eine einzige Fläche des Systems hindurchgeht. Wie wir aber früher (VI § 1. S. 77, 78) erkannt haben, giebt es ganz verschiedene Systeme, welche dieser Forderung genügen.

4. Wenn wir auch aus den angegebenen Gründen die aufgestellte Definition verwerfen müssen, so fragt es sich, ob in ihr nicht ein gesunder Kern enthalten sei. Nur wenn die Antwort bejahend ausfällt, ist die Beliebtheit dieser Definition zu begreifen. In der That glaube ich, dafs das folgende Postulat recht geeignet ist, die genannten Gebilde einzuführen:

»Es giebt ein System von Linien und Flächen, welches folgenden Forderungen genügt:

a) durch irgend zwei Punkte des Raumes geht eine und zwar eine einzige Linie des Systems;

b) durch eine Linie des Systems und einen nicht in ihr gelegenen Punkt geht jedesmal eine einzige Linie des Systems;

c) das System dieser Flächen und Linien bleibt bei allen Bewegungen ungeändert.«

Die dritte Forderung kann auch durch die folgende ersetzt werden: Jede Fläche des Systems bleibt bei einer Bewegung entweder in Deckung mit seiner Anfangslage oder geht in eine andere Fläche des Systems über.*)

Scheinbar hat die neue Definition denselben Inhalt wie die frühere; in Wirklichkeit besteht zwischen ihnen eine wesentliche Verschiedenheit, und die Ähnlichkeit beruht nur in der Form. Indem man die Gerade durch zwei Punkte bestimmt sein läfst, erweckt man den Anschein, als ob die Gerade rein begrifflich, ohne jedes Axiom eingeführt werden könne. Man operiert mit dem Ausdruck »bestimmt sein durch Punkte« wie mit einem Grundbegriff; man erklärt es für selbstverständlich, dafs durch einen einzigen Punkt eine Linie noch nicht bestimmt sein könne, dafs aber zwei Punkte hierfür genügen müfsten. Auf entsprechende Weise führt man die Ebene ein und wird sich nicht bewufst, neue Axiome eingeführt zu haben. Dagegen legt man bei der zuletzt gegebenen Definition ausdrücklich ein Axiom zu Grunde und nimmt dadurch einen principiell entgegengesetzten Standpunkt ein.

*) Ich brauche wohl nicht zu bemerken, dafs man sich auch bei der Aufstellung dieser Forderungen auf einen gewissen endlichen Bereich beschränken mufs.

5. Veronese giebt eine Definition der Geraden, welche äufserlich eine Vereinigung der Euklidischen Definition mit der an zweiter Stelle besprochenen darstellt, indem er sagt:

»Es giebt ein in der Position seiner Teile identisches Punktsystem einer Dimension, welches durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt wird und stetig ist. Dies System heifst gerade Linie oder Gerade.«

Unter dem Ausdruck »in der Position seiner Teile identisch« soll hier aber nicht dasselbe verstanden werden, was Euklid mit den Worten „ἐξ ἴσου κεῖσθαι“ bezeichnet; denn bei Euklid ist dieser Ausdruck auf die Gerade und die Ebene beschränkt; bei Veronese dagegen sind auch die Kreis- und die Schraubenlinie in der Position ihrer Teile identische Systeme einer Dimension. Wenn er nicht die Bewegung aus der reinen Geometrie ganz ausschliefsen wollte, so würde er sagen, die Gerade solle in sich bewegt werden können.

Übrigens verlangt Veronese, der von vornherein den Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde legt, keineswegs, dafs eine Gerade durch je zwei ihrer Punkte bestimmt sei; vielmehr läfst er auch Punktepaare zu, durch welche die Gerade nicht bestimmt wird. Nur setzt er fest, dafs jeder Punkt, der einer geraden Linie nicht angehört, mit jedem ihrer Punkte eine neue Gerade bestimmt.

Auf die Art, wie Veronese die Ebene einführt, gehen wir erst an einer späteren Stelle (§ 6) ein, wenn wir sein System im Zusammenhang darlegen.

6. Mit dem Begriff der Geraden hängt der der Richtung eng zusammen. Viele möchten die letztere als Grundbegriff gelten lassen und definieren dann die Gerade als diejenige Linie, welche überall dieselbe Richtung hat. Nun hat aber die Gerade nicht eine, sondern zwei Richtungen, die einander entgegengesetzt sind; deshalb mufs an der Definition eine kleine Änderung angebracht werden. Andererseits geht aber hieraus auch hervor, dafs der Begriff der Richtung einfacher ist als der der geraden Linie; der einfachere Begriff mufs aber als der natürlichere angesehen werden. Hiernach dürfte es angebracht sein, den Begriff der Geraden auf den der Richtung zurückzuführen. Leider ermangeln aber alle bisher in diesem Sinne gemachten Versuche der Strenge; daher

ist es vorläufig notwendig, von der geraden Linie auszugehen und daraus den Begriff der Richtung herzuleiten.

7. Eine ganz merkwürdige Definition der Ebene stellt Schotten auf, indem er in dem oben angeführten Werke sagt:[16])

»Die Ebene ist diejenige Fläche, welche in ihrer Gesamtheit (in allen ihren Teilen) nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt ist (die überall nach denselben beiden Hauptrichtungen ausgedehnt ist).«

Wenn er glaubt, hiermit zuerst die wahre Erklärung der Ebene gefunden zu haben, so werden ihm gewifs nur wenige beistimmen. Ich möchte vor allem die Frage aufwerfen: Giebt es Flächen, die nach drei Dimensionen ausgedehnt sind, oder solche, die in einzelnen Teilen nach zwei, in anderen nach drei Dimensionen ausgedehnt sind?

Wie unklar die Definition ist, scheint der Verfasser selbst gefühlt zu haben, da er sonst nicht versucht hätte, durch die beigefügten Klammern den Sinn zu erläutern. Ich glaube daher der weiteren Besprechung gerade die in Klammern eingeschlossenen Worte zu Grunde legen zu sollen. Hier geht der Verfasser von zwei Richtungen aus, die er als Hauptrichtungen bezeichnet (allerdings ohne im geringsten anzugeben, was er unter diesem Ausdruck versteht). Nun soll die Ebene überall nach denselben beiden Richtungen ausgedehnt sein. Dann mufs man wissen, wann zwei Richtungen identisch sind, die von ganz verschiedenen Punkten ausgehen. Ich fürchte, hier sei unbewufst der Begriff des rechten Winkels und die Parallelentheorie vorausgesetzt.

Endlich mufs ich noch auf folgenden Umstand hinweisen. Schotten spricht sich mit der gröfsten Entschiedenheit dafür aus, dafs man die Ebene vor der Geraden einführen müsse; indem er aber in der Definition der Ebene die »Hauptrichtungen« benutzt, geht er seiner Forderung entgegen von der geraden Linie aus.

8. Setzt man die Gerade als bekannt voraus, so lassen sich alle Eigenschaften der Ebene aus den beiden folgenden herleiten:

a) Eine gerade Linie, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, fällt ganz in sie hinein;

b) durch jede gerade Linie und einen beliebigen, ihr nicht angehörenden Punkt läfst sich eine Ebene legen.

Aus dem ersten Satze folgt, dafs zwei verschiedene Ebenen höchstens eine Gerade gemein haben, und dafs zwei verschiedene Ebenen sich jedesmal in einer geraden Linie schneiden, sobald sie einen Punkt gemeinschaftlich haben (V § 8, 2. S. 43). Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit der zweiten Voraussetzung, dafs durch eine Gerade und einen nicht in ihr liegenden Punkt (oder was dasselbe ist, durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen) eine einzige Ebene hindurchgeht.

Die beiden angegebenen Sätze kommen darauf hinaus, die Ebene als diejenige Fläche zu definieren, in welche eine gerade Linie jedesmal ganz hineinfällt, sobald sie zwei Punkte mit ihr gemein hat, und damit das Postulat zu verbinden: Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte läfst sich eine Ebene legen.

Nun braucht man nur die Lage einer geraden Linie sich stetig ändern zu lassen, um eine Fläche zu erhalten, der eine einfach unendliche Schar von Geraden angehört. Auch können diese Flächen noch ganz verschieden sein je nach dem Gesetze, durch welches die Bewegung der Geraden geregelt wird. Aber es ist unmöglich, irgend ein Gesetz für die Veränderung einer Geraden anzugeben, welches gestattet, alle in der Ebene vorausgesetzten Geraden als einer einzigen Fläche angehörig unmittelbar in Evidenz treten zu lassen. Will man daher die Existenz der Ebene nicht einfach aus der Erfahrung herübernehmen, so mufs man eine Fläche durch eine einfach unendliche Schar von Geraden derartig bestimmen, dafs auch die Verbindungsgerade von irgend zwei der Fläche angehörenden Punkten ganz in sie hineinfällt.

9. Zu dem Zwecke hat man versucht, folgende Erzeugung zu Grunde zu legen: Man läfst die Gerade sich so um einen ihrer Punkte drehen, dafs sie stets eine den Punkt nicht enthaltende Gerade schneidet. Allerdings, wenn man die Existenz der Ebene voraussetzt, so bedarf es keines Nachweises, dafs diese Konstruktion eine Ebene liefert. Thut man das aber nicht, so mufs man dem festen Punkte und der festen Ebene ihre bevorzugte Stellung nehmen und nachweisen, dafs dieselbe Fläche erhalten wird, wenn der Punkt durch irgend einen andern Punkt der Fläche, die Gerade durch irgend eine ihrer Geraden ersetzt wird. Das ist allerdings von Crelle[16]) versucht worden; aber sein Nachweis kann nicht als streng angesehen werden.

10. Bedeutsamer ist ein Versuch, den Deahna[16]) zuerst gemacht hat. Auch er setzt die Existenz der Geraden voraus und fügt die der Kugel hinzu als einer Fläche, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte gleichen Abstand haben. Endlich nimmt er an, dafs die Kugel bei der Ruhe irgend eines Durchmessers noch bewegt werden kann und dafs dabei jeder Punkt eine geschlossene Linie beschreibt. Hierdurch erhält man auf der Kugel eine Schar von Kreisen, von denen jeder bei der Drehung desselben Durchmessers in sich verschoben wird. Unter diesen Kreisen giebt es einen, der die Kugelfläche in zwei kongruente Teile zerlegt. Die geraden Linien, welche vom Mittelpunkte der Kugel nach den Punkten dieses Kreises gezogen werden können, erzeugen eine Fläche, und zwar, wie nachzuweisen versucht wird, eine Ebene.

Im vorigen Paragraphen (S. 171) haben wir die Existenz des rechten Winkels nachgewiesen, ohne die Eigenschaften der Ebene vorauszusetzen. Demnach können wir an der Deahnaschen Herleitung eine kleine Änderung anbringen und einfach definieren:

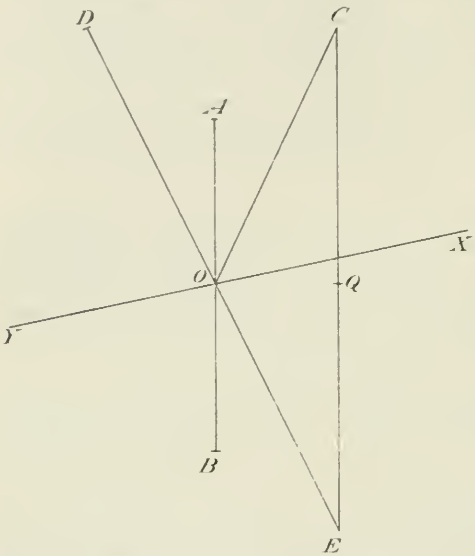
»Dreht sich ein rechter Winkel um den einen Schenkel, so beschreibt der andere Schenkel eine Ebene.«

Diese Entstehungsweise wird in manchem neueren Lehrbuche angegeben; einen Beweis habe ich nur in dem von Worpitzky gefunden. Nur geht er von weit mehr Voraussetzungen aus, als für die Herleitung erforderlich sind. Indessen läfst sich sein Beweisverfahren so modifizieren, dafs man mit den Deahnaschen Annahmen ausreicht; es sei gestattet, die Grundzüge des Beweises mitzuteilen.

Da der Punkt C, welcher der Geraden AB nicht angehören soll, bei der Drehung um AB eine geschlossene Linie beschreibt, so giebt es in dem Kreise, in dem sich C bei der Ruhe von AB bewegt, einen Punkt D von der Eigenschaft, dafs die Bogen CD und DC, in welche der Kreis durch diese beiden Punkte zerlegt wird, einander gleich sind, oder dafs, wie wir uns auch ausdrücken dürfen, während der Drehung einmal die Punkte C und D ihre Lage vertauschen. Demnach läfst sich jeder Winkel so bewegen, dafs die Schenkel ihre Lage vertauschen. Daraus geht hervor, dafs jeder Winkel seinem Scheitelwinkel gleich ist.

Jetzt lasse man den rechten Winkel AOX sich um den

Schenkel AO drehen. In der Verlängerung von AO wähle man den Punkt B so, dafs BO = OA ist. Ist C ein beliebiger Punkt des Raumes, der weder der Geraden AB noch der durch die Drehung von OX erzeugten Fläche angehört, so bestimme man denjenigen Punkt D, der bei der Drehung einmal seine Lage mit C vertauscht. Sobald C die Lage von D erhält, möge der Punkt X auf Y zu liegen kommen. Dann haben die Strecken OX und OY entgegengesetzte Richtung. Man ziehe noch die Strecken OC und OD und verlängere die letztere um OE = OD.



Offenbar ist

$\sphericalangle$ COX = DOY,

und da der letztere als Scheitelwinkel gleich EOX ist, so ist auch COX = EOX und CX = EX. Läfst man jetzt die Schenkel des Winkels CXE ihre Lage vertauschen, so nimmt die Mitte Q der Strecke CE die Anfangslage wieder ein. Daraus folgt, dafs auch die beiden Nebenwinkel CQX und EQX einander gleich sind. Nun ist X ein beliebiger Punkt der erzeugten Fläche; dieselbe Fläche wird also auch erhalten, wenn man den rechten Winkel CQX um den Schenkel QC dreht. Der erzeugten Fläche gehört also eine gerade Linie ganz an, sobald sie mit ihr zwei Punkte gemein hat.

12. Da der angegebene Weg gestattet, die Existenz der Ebene aus der der Geraden in einer recht einfachen Weise herzuleiten, liegt es nahe, auch die Gerade selbst mit der Bewegung in Zusammenhang zu bringen. Man geht zu dem Ende von folgendem Axiom aus:

»Wird ein Punkt eines starren Körpers in Ruhe gehalten, so kann man jeden anderen Punkt des Körpers bewegen; sobald aber zwei Punkte des Körpers in Ruhe gehalten werden, bleiben zugleich alle Punkte einer Linie in Ruhe. Diese Linie heifst eine Gerade. Bleibt aufser den beiden ersten Punkten noch ein Punkt in Ruhe, welcher nicht der durch die beiden ersten Punkte gehenden Geraden angehört, so verbleibt der Körper selbst in Ruhe.«

Dies Axiom hat den grofsen Vorzug, dafs man aus ihm alle Eigenschaften der geraden Linie ohne Schwierigkeit herleiten kann. Dem entgegen darf der kleine Mangel, dafs die Linie nicht unmittelbar als Grenze zweier Flächenteile auftritt, doch wohl nicht in Betracht kommen.

13. Es kann unsere Aufgabe nicht sein, jede Erklärung, welche über die Gerade und die Ebene gegeben ist, hier zu besprechen. Demnach gehen wir auch nicht auf die Erklärung der Ebene als einer in sich verschiebbaren und umkehrbaren Fläche ein. Dagegen müssen wir einige Worte sagen über die Versuche, welche gemacht sind, um die Theorie der Geraden und der Ebene aus der des Kreises und der Kugel herzuleiten. Vielfach werden folgende Definitionen aufgestellt:

»Eine Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei festen Punkten gleichen Abstand haben.«

»Konstruiert man um zwei feste Punkte als Mittelpunkte jedesmal gleiche Kugeln, so liegen ihre Schnittlinien auf einer Fläche, welche als Ebene bezeichnet wird.«

Um die gerade Linie zu erhalten, geht man wohl von drei Punkten aus, die gleichen Abstand von einander haben; man beschreibt um diese drei Punkte jedesmal gleiche Kugeln und bestimmt ihre Schnittpunkte; diese gehören sämtlich einer geraden Linie an.

Zur Geraden versucht man auch auf folgendem Wege zu gelangen. Man betrachtet eine Bewegung, bei der zwei Punkte in Ruhe gehalten werden; dann zeigt man, dafs hierbei auf jeder Kugel, die einen der beiden Punkte zum Mittelpunkt hat, zwei Punkte unbewegt bleiben und dafs alle diese Punkte eine Linie bilden. Sobald man auf diese Weise die Gerade eingeführt hat, kann man entweder vermittelst einer der zuletzt angegebenen Definitionen oder auf dem in 10. mitgeteilten Wege zur Ebene gelangen.

Meistens wird eine dieser Definitionen nur aufgestellt und daran die Bemerkung geknüpft, dafs sich alle Eigenschaften der Geraden und der Ebene daraus sehr leicht herleiten lassen. Nur in ganz seltenen Fällen wird der Beweis wirklich versucht; aber von allen diesen Versuchen, soweit sie mir bekannt geworden sind, kann keiner als befriedigend betrachtet werden.

Dennoch sind diese Versuche ohne Zweifel schon aus dem Grunde als dankenswert anzuerkennen, weil sie zeigen, in welch enger Beziehung der Kreis und die Kugel zur Geraden und Ebene stehen; auch spricht das Interesse, welches Gaufs ihnen zuwandte, für ihre hohe Bedeutung. Wir würden uns daher freuen, wenn die Theorie der Geraden und der Ebene aus der Kugel in voller Strenge und mit Beschränkung auf die unentbehrlichen Axiome durchgeführt würde. Dennoch möchten wir davor warnen, die Bedeutung einer solchen Herleitung zu hoch anzuschlagen. Gerade und Ebene stehen in besonders enger Beziehung zur Projektivität; ihre Existenz vermittelst metrischer Voraussetzungen herzuleiten kann also nicht als der natürlichste Weg bezeichnet werden.

§ 4.

Die Gerade als die kürzeste Linie.

1. Während Euklid aus den Sätzen über den Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln in demselben Dreieck den Satz herleitet, dafs die Summe zweier Seiten eines Dreiecks gröfser ist als die dritte Seite, stellt Archimedes in seinem Buche über Kugel und Cylinder neben vier anderen Postulaten das folgende auf: »Von allen Linien, welche in denselben Punkten begrenzt werden, ist die Gerade die kürzeste.« Man weifs aber nicht sicher, ob er in dem Satze ein wirkliches Axiom erblickt oder ihn nur deshalb an die Spitze stellt, weil er ihn bei seinen Untersuchungen fortwährend gebraucht. Proklus meint, Euklids Definition der Geraden als derjenigen Linie, welche gegen ihre Punkte gleichförmig liege, besage nichts weiter, als dafs sie die kürzeste Linie sei. Nachdem in neuerer Zeit Legendre die Gerade als die kürzeste Linie definiert hat, ist diese Definition in fehr viele neuere Lehrbücher übergegangen. Eine unbefangene Prüfung zeigt aber, dafs diese Definition unstatthaft ist, wofern man nicht eine Reihe neuer Axiome einführt, und zwar

a) weil von vornherein die Möglichkeit der Messung für alle Linien vorausgesetzt wird, was nicht angeht,

b) weil vor Ausführung der Messung ein Mafsstab vorhanden sein mufs, dieser aber erst durch die gerade Linie gegeben wird,

c) weil die Existenz eines Minimums nicht evident ist, vielmehr nur axiomatisch gefordert werden kann.

Diese drei Punkte sollen jetzt näher besprochen werden.

2. Es ist nicht gestattet, die Möglichkeit der Messung von Linien von vornherein zu postulieren. Zwar sagt man wohl, man könne einer Linie, ohne ihre Gröfse zu ändern, jede beliebige Gestalt geben. Dabei denkt man gewifs an einen unausdehnbaren, vollkommen biegsamen Faden. Aber so mannigfaltig auch die Gestalt sein mag, die man einem solchen Faden noch geben kann, es ist unrichtig, dafs er jede Gestalt erhalten könne. Das würde nur dann richtig sein, wenn man jede beliebige Linie messen könnte. Um die Länge einer Linie auf analytischem Wege zu finden, führt man im allgemeinen eine gewisse Integration aus. Das geht aber nur an, wenn die Kurve durch eine Funktion dargestellt wird, die eine Ableitung hat. In manchen Fällen haben die in die Kurve eingezeichneten gebrochenen Linien, die wir in V § 4 (S. 16) angegeben haben, einen endlichen Grenzwert, auch wenn die Kurve im allgemeinen keine Tangenten besitzt. Aber vielfach ist es geradezu unmöglich, von der Länge einer Linie zu sprechen. Um uns davon zu überzeugen, gehen wir etwa wieder von der Funktion aus, die wir bereits im ersten Bande (S. 172) erwähnt haben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi),$$

wo x eine reelle Variabele, b eine positive Konstante < 1 und a eine ungerade ganze Zahl ist, welche der Bedingung genügt: $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Jetzt betrachten wir x und y als die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten in einer Euklidischen Ebene. Für jeden Punkt (x, y) dieser Ebene ist $y \lesseqgtr f(x)$. Demnach bestimmt diese Funktion eine Teilung der Ebene in zwei Teile, indem man dem einen Teile diejenigen Punkte zuordnet, für welche $y > f(x)$ ist, und dem anderen Teile alle Punkte angehören läfst, für welche

$y < f(x)$ ist. Diese beiden Teile werden gegen einander abgegrenzt durch die Gesamtheit der Punkte, welche durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmt sind. Alle diese Punkte gehören demnach der Grenze zweier Flächenteile oder einer Linie an. Nun zeigen die bereits früher erwähnten Arbeiten, dafs man bei dieser Linie nicht von Länge sprechen kann. Derartige Beispiele lassen sich in grofser Zahl bilden. Es ist also nicht gestattet anzunehmen, dafs man jede Linie messen kann.

3. Ehe man eine Messung ausführen kann, mufs man einen Mafsstab haben. Als solcher dient für alle Linien die gerade Strecke. Will man also die Gerade als die kürzeste Linie definieren, so mufs man zunächst den Mafsstab angeben, durch den gemessen werden soll. Im andern Falle läuft man Gefahr, einen Zirkel zu machen, weil man die gerade Linie, die man definieren will, als Mafsstab bereits voraussetzt. Zur Beseitigung dieser Schwierigkeit ist noch nichts geschehen, obwohl sie auch im zweiten Bande von Lindemanns »Vorlesungen über Geometrie« hervorgehoben ist. Gelänge dies aber auch auf künstlichem Wege, so hätte man kaum etwas erreicht, da man im späteren Verlaufe wieder die gerade Strecke als Mafsstab benutzen mufs.

4. Wenn es aber auch möglich sein sollte, die angegebenen Schwierigkeiten zu beseitigen, so bedürfte man ein neues Axiom, um zur geraden Linie zu gelangen. Betrachtet man nämlich die Gesamtheit aller mefsbaren Linien, die zwischen zwei festen Punkten gezogen werden können, so lehrt die allgemeine Gröfsenlehre, dafs es für sie eine untere Grenze giebt; aber wir dürfen keineswegs schliefsen, dafs die untere Grenze auch wirklich erreicht wird, oder dafs, wie man sich ausdrückt, ein Minimum existiert; denn es ist auch möglich, dafs man der unteren Grenze wohl beliebig nahe kommen, aber sie nie erreichen kann.

Ehe wir dazu übergehen, diesen Satz zu beweisen, wollen wir ihn an einfachen Beispielen erläutern:

Für die Gesamtheit der Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \cdots$, wo n eine ganze positive Zahl ist, bildet die Null die untere Grenze, aber diese wird von keiner der Menge angehörenden Gröfse erreicht.

In einer Euklidischen Ebene zeichne man den einen Zweig einer Hyperbel und ziehe zu der einen Asymptote eine Parallele, welche den Zweig nicht schneidet. Die Abstände der Punkte des Zweiges von der Geraden haben eine untere Grenze, nämlich den Abstand der Geraden von der Asymptote, ohne dafs diese Grenze von einem Punkte der Hyperbel wirklich erreicht wird.

Um jetzt ein Beispiel zu liefern, welches mit der Gesamtheit der zwischen zwei Punkten verlaufenden Kurven im wesentlichen übereinstimmt, nehmen wir an, $\varphi(x)$ sei eine reelle, eindeutige und stetige Funktion von x im Intervalle $(-1 \ldots +1)$ von der Beschaffenheit, dafs ihre Ableitung zwischen denselben Grenzen stetig ist und dafs $\varphi(-1) = a$, $\varphi(+1) = b$ ist, wo $a \gtreqless b$ sein soll. Wir betrachten die Gesamtheit aller Funktionen $\varphi(x)$, welche dieser Forderung für gegebene Werte von a und b genügen, und suchen die untere Grenze des Integrals

$$J = \int_{-1}^{+1} \left(x \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx,$$

welches offenbar keinen negativen Wert annehmen kann.

Bezeichnen wir mit ε eine willkürlich anzunehmende positive Gröfse, so ist offenbar für

$$J_1 = \int_{-1}^{+1} (x^2 + \varepsilon^2) \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx$$

J_1 gröfser als J.

Ferner genügt die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

nebst der Ableitung

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{b-a}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

den aufgestellten Forderungen, sobald festgesetzt wird, dafs die Funktion $\operatorname{arctg} y$ für reelle Werte von y nur Werte zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ annehmen soll.

Für diese specielle Funktion wird aber

$$J_1 = \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon dx}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\text{und } J < \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Für hinlänglich kleine Werte von ε kann man den Wert von $\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}$ beliebig nahe an $\frac{\pi}{2}$ bringen; somit wird sich auch der Wert von J der Null beliebig nähern. Aber es giebt keine Funktion, für welche das Integral diesen Wert wirklich erreicht. Denn alsdann müfste $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ im ganzen Intervall verschwinden oder es müfste $\varphi(x)$ eine Konstante sein. Das ist aber mit der Annahme unvereinbar, dafs die Werte a und b, welche die Funktion an der Grenze annimmt, von einander verschieden sind.

Ebenso wenig wie hier eine Funktion $\varphi(x)$ wirklich existiert, für welche das Integral seinen kleinsten Wert annimmt, darf man es als selbstverständlich voraussetzen, dafs unter allen Linien, welche zwischen zwei festen Punkten gezogen werden können, eine existiert, für welche die untere Grenze der überhaupt möglichen Längen wirklich erreicht wird.[17])

5. Die angegebenen Bedenken richten sich nur gegen den Versuch, rein begrifflich die gerade Strecke als kürzeste Linie einzuführen. Dagegen kann man die Gerade als kürzeste Linie einführen, wenn man geeignete Axiome aufstellt. Das hat Bettazzi[18]) in einer sorgfältig durchgeführten Arbeit gethan, und es wird nicht überflüssig sein, ihren Inhalt kurz anzugeben.

Den Ausgang der Untersuchung bildet als erstes Postulat die Definition der Kugel: Bewegt man den einen Punkt eines Punktepaares, während der andere fest ist, so kann der bewegte Punkt alle Lagen auf einer geschlossenen Fläche erhalten, in deren Innern der unbewegliche Punkt liegt. Auch wird vorausgesetzt, dafs die Punkte eines Paares mit einander vertauschbar sind.

Der Kürze wegen wollen wir jede in zwei Punkten begrenzte Linie eine Strecke (tratto) nennen. Die Kugel, welche der eine

Endpunkt einer Strecke bei der Ruhe des anderen beschreibt, soll die Öffnungskugel der Strecke heifsen. Wenn in einer Reihe von Strecken jede folgende mit der vorangehenden einen Endpunkt, aber keinen weitern Punkt gemein hat, so soll sie eine Gruppe von Strecken genannt werden. Aus jeder Strecke A_0B_0 kann in der mannigfaltigsten Weise eine Gruppe von Strecken gebildet werden, indem man sie 1. durch beliebige auf ihr gewählte Punkte A_1, A_2, A_3 . . . A_n, die nur in dieser Reihe auf einander folgen müssen, in die Teile A_0A_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$, A_nB_0 zerlegt, und indem man 2. die einzelnen Teile beliebige Bewegungen ausführen läfst, die nur der Bedingung unterliegen, dafs die einzelnen Teile in Zusammenhang bleiben. Jede einzelne auf diese Weise erhaltene Gruppe von Linien nennt Bettazzi eine Brechungslinie (linea di spezzamento) der gegebenen Strecke.

Ebenso nennt Bettazzi eine Lineargruppe von Körpern eine Reihe von Körpern, von denen jeder mit dem vorangehenden und nachfolgenden einen Teil der Oberfläche gemein hat, während die Körper im übrigen ganz von einander getrennt sind.

Dieser Begriff wird benutzt, um aus einer gegebenen Strecke aufser den Brechungslinien noch weitere Linien herzuleiten. Zu dem Ende wird folgende Definition aufgestellt: Wenn eine Strecke l gegeben ist, so nennen wir eine andere Linie l' erzeugt von l, sobald für jeden willkürlich gewählten Körper S aus festen Körpern S_1, S_2 . . . S_n, die entweder S selbst oder Teilen von S gleich sind, sich eine Lineargruppe von Körpern konstruieren läfst, welche folgenden Bedingungen genügt: a) innerhalb des Körpers, der aus den Teilen S_1 . . . S_n besteht, ist die Strecke l' und eine passend gewählte Brechungslinie λ von l eingeschlossen; b) in jedem Körper S_α liegt nur eine einzige Strecke sowohl von l' wie von λ; c) die Öffnungen aller dieser Linien λ unterscheiden sich beliebig wenig von denen der Strecken l'. Die Brechungslinien und die erzeugten Linien sollen jetzt, wie das zweite Postulat verlangt, ein geschlossenes System bilden, in welchem jede Linie durch eine beliebige andere Linie des Systems ersetzt werden kann.

Alle Linien des so bestimmten Systems sollen den einen Endpunkt 0 gemeinschaftlich haben. Beschreibt man jetzt für alle die Öffnungskugeln, so sind zwei Fälle möglich: entweder bleiben alle auf diese Weise erhaltenen Kugeln innerhalb einer um 0 beschriebenen Kugel, oder es giebt keine um 0 beschriebene Kugel, welche alle diese Kugeln umfafst; im ersten Falle wird das System endlich, im zweiten unendlich genannt. Für ein endliches System werden die vier Postulate aufgestellt, welche in der Arbeit die dritte bis sechste Stelle einnehmen:

III. Wenn die Strecke l_1 ein Teil der Strecke l ist, die zu einem endlichen System gehört, so ist jede Strecke des aus l_1 hergeleiteten Systems ein Teil einer aus l hergeleiteten Strecke.

IV. Wenn l_1 und l_2 Strecken aus endlichen Systemen sind, so ist auch das System endlich, welches die aus l_1 und l_2 gebildete Gruppe enthält.

V. Wenn zwei endliche Systeme nicht identisch sind, so giebt es in einem der beiden eine Strecke, die einen Teil einer dem andern System angehörenden Strecke bildet.

VI. Für jedes endliche System giebt es eine einzige Kugel, welche die obere Grenze für die sämtlichen Öffnungskugeln des Systems bildet.

Diese Postulate ermöglichen es, den Begriff der Länge in voller Strenge zu begründen. Um zur geraden Strecke zu gelangen, werden die weiteren Postulate hinzugenommen:

VII. Unter allen Strecken mit denselben Endpunkten giebt es ein einziges System, dessen Länge kleiner ist als die irgend einer anderen zwischen denselben Endpunkten möglichen Strecke; diese kleinste Strecke heifst die gerade Strecke.

VIII. Wenn zwei gleiche gerade Strecken einen Endpunkt und einen weitern Punkt gemein haben, so fallen sie ganz zusammen.

Um endlich die gerade Linie einzuführen, wird als neuntes Axiom der Satz beigefügt:

»Es giebt eine Linie, von der jedes Stück eine gerade Strecke ist.«

6. Der Raum gestattet uns nicht, die einzelnen Folgerungen, welche Bettazzi aus seinen Postulaten zieht und mit deren Hilfe er zunächst die Mefsbarkeit von Linien und dann die Eigenschaften der Geraden beweist, im einzelnen anzuführen. Indessen bieten diese Entwicklungen für uns geringeres Interesse. Dagegen müssen wir den Postulaten selbst einige Worte widmen.

Zunächst dürfen wir daran erinnern, dafs es immer mifslich ist, eine einzelne Frage, wie hier die nach der Mefsbarkeit von Linien und nach der Existenz der Geraden, abgesondert vom ganzen Lehrgebäude der Wissenschaft zu behandeln. Dadurch werden Mängel herbeigeführt, die sich bei einer andern Behandlungsweise leicht beseitigen lassen.

Was nun die Bettazzischen Postulate selbst betrifft, so können wir nicht billigen, dafs hier von vornherein der Raum als unendlich vorausgesetzt wird. Noch weniger gefällt es uns, dafs mit dem ganzen System der aus einer krummen Strecke erzeugten Strecken operiert wird. Auch läfst sich nicht übersehen, ob die aufgestellten Postulate von einander unabhängig sind.

Jedenfalls mufs die grofse Zahl von Postulaten einiges Erstaunen erregen. Dem Leser drängt sich unwillkürlich der Gedanke auf, es sei wahrscheinlich einfacher, über die Kugel einige Voraussetzungen zu machen, mit ihrer Hilfe auf dem Wege, der am Schlufs des vorigen Paragraphen angedeutet wurde, die Theorie der Geraden zu begründen und alsdann die Messung von beliebigen Linien in der Weise herzuleiten, welche in V § 4 (S. 16) entwickelt worden ist. Diesen Weg wird man um so lieber vorziehen, da auch Bettazzi unter seine Postulate zahlreiche Sätze über die Bewegung aufgenommen hat, während die Beliebtheit der Definition: »Die gerade Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten«, wohl hauptsächlich in der Unabhängigkeit von der Bewegung begründet ist.

§ 5.

Fläche, Linie und Punkt.

1. Auf die Frage, wie man am geeignetsten die Fläche, die Linie und den Punkt definiere, sind wir bereits früher (III § 3. B. 1. S. 172) eingegangen. Wir haben dort gesehen, dafs es nicht gestattet ist, vom Punkte auszugehen und die Linie durch Bewegung eines Punktes, die Fläche durch Bewegung einer Linie und den Raumteil durch Bewegung eiuer Fläche entstehen zu lassen. Denn erstens wird uns der Körper und der Raumteil durch die Natur gegeben, während der Punkt erst durch Abstraktion gewonnen werden kann. Zweitens ist es nicht richtig, dafs jede Linie durch Bewegung eines Punktes, jede Fläche durch

Bewegung einer Linie erhalten wird. Auch kann ein bewegter Punkt (B. 1. S. 170) eine Fläche oder einen Körper beschreiben. Demnach definieren wir die Fläche als die Grenze zweier Raumteile, die Linie als die Grenze zweier Flächenteile und den Punkt als die Grenze zweier Linienteile. Es wird nötig sein, auf diese Definition hier etwas näher einzugehen.

2. Ein Raum A sei in zwei Teile B und C zerlegt und ein Körper k, der ganz dem Raume A angehört, möge in gleichzeitiger teilweiser Deckung mit B und C sein; ein Teil von k möge also entweder den Raum B selbst oder einen Teil desselben decken, und ein anderer Teil von k möge im Raume C liegen. In diesem Falle sagen wir, der Körper k liege auf der Grenze der den Raum A bildenden Raumteile B und C.

Dieser Festsetzung entspricht es zu sagen, zwei Raumteile M und N hingen zusammen oder grenzten an einander, wenn es einen Raumteil P giebt, der in die beiden Teile M und N zerlegt werden kann; dementsprechend dürfen M und N einerseits keinen Teil gemeinschaftlich haben, andererseits müssen sie einen einzigen Raumteil bilden.

Von B trennen wir Teile ab, die nicht mit C zusammenhangen; so sei B in die beiden Teile B′ und B″ zerlegt, von denen der letztere nicht an C grenzen möge. Dann gehört der Körper k, der auf der Grenze von B und C liegt, auch der Grenze von B′ und C an. Ebenso dürfen wir von C einen Teil C″ abtrennen, der nicht mit B zusammenhängt, ohne die gegenseitige Grenze zu verändern. Auch ist es gestattet, diese Operation unbeschränkt fortzusetzen. Hierbei sind zwei Fälle möglich: entweder bilden die übrigbleibenden Teile B′ und C′, die mit einander in Verbindung stehen, bei jeder Abtrennung von Teilen, die nicht an den andern Raumteil grenzen, stets einen einzigen Raum; oder, wenn man von den beiden Teilen B und C solche Teile abtrennt, welche jedesmal mit dem andern Teile keinen Zusammenhang haben, so bestimmen die übrig bleibenden Teile mehrere Körper. Im zweiten Falle kann man vom Raume A mehrere Räume A_1, A_2 . . . abgetrennt denken, die unter einander nicht in Zusammenhang stehen, von denen aber jeder durch die vorhin ausgeführte Teilung in zwei Teile zerfällt, etwa A_1 in B_1 und C_1, A_2 in B_2 und C_2 u. s. w. Diesen Teilen soll die weitere Eigenschaft zukommen, dafs jeder Körper, der auf der Grenze von B und C liegt, in gleichzeitiger teilweiser Deckung mit zwei Teilen ist, in die einer der Räume A_1, A_2 . . . zerfällt. Im ersten Falle sagen wir, die Grenze der Raumteile B und C bestehe aus einer einzigen Fläche, im zweiten lassen wir die Grenze in mehrere Flächen zerfallen. Die Teilung des Raumes A in die beiden Teile B und C liefert daher eine einzige Fläche (B, C), wenn man in ganz beliebiger Weise von jedem der beiden Teile solche Gebiete abtrennen kann, die nicht an den anderen Teil grenzen, ohne dafs der übrigbleibende Teil in mehrere Räume zerfällt. Besteht die Grenze aus mehreren Flächen, so kann man jede für sich untersuchen.

3. Ein Raumteil A führe durch seine Zerlegung in die Teile B und C auf die Fläche (B, C); ebenso sei ein Raumteil L in die beiden Teile M und N zerlegt, die in einer einzigen Fläche (M, N) an einander grenzen. Die Fläche (B, C) ist identisch mit der Fläche (M, N), wenn jeder Körper, der ganz im Raume A liegt und mit den beiden Räumen B und C in gleichzeitiger teilweiser Deckung ist, auch die beiden Raumteile M und N teilweise deckt. Wir können in diesem Falle auch sagen: Indem wir von B Teile abtrennen, die nicht mit C zusammenhangen, und von C Teile entfernen, die nicht an B grenzen, und in entsprechender Weise mit den beiden Raumteilen M und N verfahren, läfst sich, wofern die Flächen zusammenfallen, durch die angegebene Operation erreichen, dafs der übrigbleibende Teil von B mit dem übrigbleibenden Teile von M (bezw. N) und der übrigbleibende Teil von C mit dem von N (bezw. M) identisch wird.

In ähnlicher Weise sagen wir, die Fläche (M, N) bilde einen Teil der Fläche (B, C), wenn jeder Körper, der auf der Grenze von M und N liegt, auch mit den Raumteilen B und C in gleichzeitiger teilweiser Deckung ist, während ein Körper auf der Grenze von B und C liegen kann, ohne der Grenze von M und N anzugehören.

Eine Fläche (B, C) ist in die beiden Flächen (M, N) und (P, Q) zerlegt, wenn jeder Körper, welcher auf der Grenze von B und C liegt, entweder der Grenze von M und N oder der Grenze von P und Q oder beiden Grenzen angehört. Wir dürfen demnach sagen, die Fläche (B, C) bestehe aus den Flächen (M, N) und (P, Q), wenn a) jeder Körper, der mit M und N in teilweiser Deckung ist, auch auf der Grenze von B und C liegt, b) jeder Körper, der auf der Grenze von P und Q liegt, auch für B und C dieselbe Eigenschaft hat, und c) jeder Körper, der mit B und C in teilweiser Deckung ist, teilweise entweder den vier Räumen M, N, P, Q oder den beiden Räumen M und N oder den beiden Räumen P und Q angehört.

In derselben Weise, wie wir hier den Raumteil A in die beiden Teile B und C zerlegt haben und dadurch zu der Fläche (B, C) gelangt sind, können wir auch einen Körper a in zwei Teile teilen und dementsprechend eine Fläche als Grenze zweier Teile eines Körpers erhalten. Eine Fläche (b, c), die auf dem letzteren Wege gewonnen wird, deckt eine durch zwei Raumteile erhaltene Fläche (B, C), wenn jeder Raumteil, mit dem die Körper b und c in gleichzeitiger teilweiser Deckung sind, sowohl mit B wie mit C einen Teil gemeinschaftlich hat. Hiernach braucht man nicht zu definieren, was es heifse, eine Fläche decke einen Teil einer andern u. dgl.

4. Der weiteren Untersuchung legen wir wieder die Annahme zu Grunde, dafs durch die Zerlegung von A in die Teile B und C eine einzige Fläche (B, C) gewonnen wird. Dann können wir B in zwei Teile D und E zerlegen, die beide mit C zusammenhangen. Da die Raumteile C und D einen einzigen Raum bilden, so bestimmen sie eine Fläche (C, D); ebenso führen die an einander grenzenden Raumteile C und E auf eine Fläche (C, E). Nun überzeugen wir uns sehr leicht, dafs die Fläche (B, C) in die beiden Teile (C, D) und (C, E) zerfällt. Dieselbe Operation, welche wir vorhin mit den Raumteilen B und C vorgenommen haben, können wir jetzt auf die Flächen (C, D) und (C, E) übertragen: wir können von der Fläche (C, D) einen Teil abtrennen, der nicht mit (C, E) zusammenhängt, und ebenso von (C, E) beliebige Flächenteile entfernen, die nicht mit der Fläche (C, D) in Verbindung stehen. Durch diese Überlegung werden wir auf die Grenze zweier Flächenteile geführt, die entweder aus einer einzigen Linie besteht oder sich in mehrere Linien zerlegt.

5. Es wird gut sein, diesen Gedanken durchzuführen, ohne den Begriff der Fläche zu benutzen. Der Raumteil A sei in drei

Teile C, D, E derartig zerlegt, dafs jeder Teil an die beiden anderen grenzt. Zugleich soll aber, indem wir etwa von C beliebige Teile abtrennen, die weder mit D noch mit E in Zusammenhang stehen, mindestens ein Teil übrig bleiben, der sowohl mit D wie mit E zusammenhängt. Wofern diese Bedingungen erfüllt sind, sagen wir, jeder der drei Teile läge auf der gemeinschaftlichen Grenze gegen die beiden anderen.

Jetzt teilen wir C in zwei Teile C′ und C″, von denen der zweite höchstens mit einem der Teile D und E in Zusammenhang steht. Ebenso trennen wir von D einen Teil D″ ab, der entweder an keinen der Teile C und E oder nur an einen von ihnen grenzt, und nennen den übrigen Teil D′. In entsprechender Weise sei E in die beiden Teile E′ und E″ zerlegt. Die drei auf diese Weise erhaltenen Raumteile C′, D′, E′ bilden entweder einen einzigen Raumteil A′, oder man gelangt zu getrennten Räumen, von denen jeder sowohl einen Teil von C′ als auch von D′ und von E′ enthält. Es genügt offenbar, den ersten Fall allein zu betrachten und anzunehmen, dafs, wie man auch immer von den drei Raumteilen C, D, E Gebiete abtrennt, welche nicht der gemeinschaftlichen Grenze gegen die beiden anderen angehört, der übrigbleibende Teil jedesmal einen einzigen Raum bildet. In diesem Falle sagen wir, die gemeinschaftliche Grenze der drei Raumteile sei eine Linie. Wir können jetzt genau in derselben Weise, die wir für die Flächen dargelegt haben, definieren, was es heifse, zwei Linien seien identisch, eine Linie sei ein Teil einer anderen, eine Linie sei in zwei Teile zerlegt u. dgl. Auch können wir wieder eine Linie durch Teilung eines Körpers entstehen lassen und die weiteren Untersuchungen, die wir oben für die Fläche angestellt haben, mit Leichtigkeit auf die Linie übertragen.

Hierbei müssen wir noch auf folgenden Umstand hinweisen. Wenn die Teilung des Raumes A in die drei Teile C, D, E eine einzige Linie bestimmt, so sind für die Teilung des Raumes C in zwei Teile C′ und C″ drei Fälle möglich: entweder grenzt einer der beiden Teile an D und E oder beide Teile grenzen an D und E oder einer der beiden Teile grenzt nur an D und der andere an E. Im dritten Falle möge C′ mit D, C″ mit E zusammenhangen. Denken wir jetzt die Teile C″ und E zu einem neuen Raume E_1 vereinigt, so bestimmt die Teilung (C', D, E_1) dieselbe Linie, wie die Teilung (C, D, E).

6. Durch die vorangehenden Entwicklungen sind alle Momente gegeben, welche bei der Definition des Punktes in Betracht kommen. Wir können von einer Linie ausgehen und sie in zwei Teile zerlegen; von jedem Teile trennen wir Stücke ab, welche nicht an den anderen Teil grenzen; dadurch werden wir auf die Grenze zweier Linienteile geführt, welche in einem Punkte besteht oder in mehrere Punkte zerfällt. Auch können wir unmittelbar von einem Raumteil A ausgehen und ihn so in vier Teile zerlegen, dafs jeder Teil mit den drei anderen in Zusammenhang steht und dieser Zusammenhang bestehen bleibt, wie auch von jedem der Teile Gebiete abgetrennt werden, welche nicht an die anderen Teile grenzen. Die Durchführung dieser Gedanken ist so leicht, dafs wir nicht näher darauf einzugehen brauchen.

§ 6.

Wundts Definition des Raumes.

Wenn wir auch die Behandlung aller philosophischen Fragen von unserem Werke ausschliefsen, so müssen wir doch auf Wundts Raumtheorie[19]) etwas näher eingehen, da dieser Philosoph, wie überhaupt auf die übrigen Wissenschaften, so auch auf die Ergebnisse der mathematischen Forschung sorgfältig Rücksicht nimmt. Indessen müssen wir uns Beschränkung auferlegen, indem wir die Raumtheorie rein für sich und auch so nur nach ihrer mathematischen Seite betrachten. Somit wollen wir unser Hauptaugenmerk auf seine Definition des Raumes und die ihr entsprechenden Axiome der Geometrie richten und alles andere nur soweit berücksichtigen, als es für die Beurteilung der Raumtheorie nicht entbehrt werden kann.

Bei der Definition, welche Wundt vom Raume giebt, verlangt er mit vollem Rechte, dafs darin keine Begriffe vorkommen, die bereits in irgend einer Weise den Raum voraussetzen. Demnach geht er von den fünf Begriffen aus: 1. Gröfse, 2. Richtung, 3. Stetigkeit, 4. Veränderung, 5. Zahl, und zwar in einem Sinne, der nichts specifisch Räumliches einschliefst. Darauf gründet er folgende Definition:

»1. Der Raum ist eine stetige und unbegrenzte Gröfse, in welcher das Einzelne, welches nicht in weitere Bestandteile zerlegt werden kann, durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt wird. Das unzerlegbar Einzelne im Raume heifst **Punkt**. Die Bestimmung irgend eines Einzelnen im Raume durch die drei unabhängigen Richtungen heifst **Lage**. 2. Jeder beliebige Teil des Raumes kann vom übrigen Raum abgesondert gedacht werden. Ein solcher abgetrennter Teil des Raumes (ein zusammengesetztes Einzelnes) heifst ein **Raumgebilde**. 3. Jedes Raumgebilde kann in veränderter Lage gedacht werden, ohne dafs dadurch das wechselseitige Lagenverhältnis beliebig in ihm angenommener Punkte verändert wird. Diese Eigenschaft des Raumes heifst **Kongruenz**. 4. Zu jeder Richtung im Raume existiert eine entgegengesetzte Richtung von übereinstimmender Lage, und die Lage zweier zusammengehöriger entgegengesetzter Richtungen heifst eine **Gerade**.«

Den wesentlichen Inhalt dieser Begriffsbestimmungen glaubt er in folgender Weise zusammenfassen zu können: »Der Raum ist eine stetige, in sich kongruente unendliche Gröfse, in welcher das unzerlegbare Einzelne durch drei Richtungen bestimmt wird.«

Diese Definition wird an einer späteren Stelle durch die folgenden vier Axiome ersetzt: »1. Die Lage eines jeden Punktes ist durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt. 2 Die Lage jedes beliebigen ausgedehnten Raumgebildes wird durch die Lage dreier willkürlich in ihm angenommener Punkte bestimmt. 3. Jedes Raumgebilde bleibt mit sich kongruent, wenn es beliebig in veränderter Lage gedacht wird. Zwei Raumgebilde sind daher kongruent, wenn das eine aus einer blofsen Lageänderung des andern entstehen kann. 4. Jede beliebige Richtung im Raume kann als eine ins Unendliche zunehmende Gröfse gedacht werden.«

Wir glauben unser Interesse hauptsächlich der ausführlichen Definition zuwenden zu sollen. Ehe wir aber zur Besprechung des ersten Satzes derselben übergehen, müssen wir eine Bemerkung vorausschicken. Man hat es vielfach als einen Mangel der analytischen Geometrie bezeichnet, dafs durch die Einführung der Koordinaten etwas Fremdes in die Wissenschaft hineingebracht werde, dafs die ganze Untersuchung gleichsam einen Umweg mache, indem man dasjenige Gebilde, dessen Eigenschaften ermittelt werden sollen, nicht für sich, sondern in seiner Lage gegen ein anderes, davon durchaus unabhängiges Gebilde, das Koordinatensystem, untersucht. Wenn man auf diesen Vorwurf auch erwidern kann, dafs man die Lage eines Gebildes überhaupt erst dann bestimmen kann, wenn man die Lage eines anderen als gegeben betrachtet, so behält er doch immer seine Berechtigung. Mag der Vorteil, den die Anwendung der Analysis für die Geometrie bietet, noch so grofs sein, mag es vielfach gelingen, das Koordinatensystem in organischen Zusammenhang mit dem zu untersuchenden Gebilde zu bringen, oder mag man sich von dem gewählten System unabhängig machen können: an sich ist die Koordinatenbestimmung dem Raume fremd. Eine Definition des Raumes, bei der diese Bestimmung zur eigentlichen Grundlage gemacht wird, kann demnach nicht als natürlich angesehen werden.

Für die Fassung des ersten Satzes der Definition ist ohne Zweifel das Cartesisehe Koordinatensystem bestimmend gewesen. Dabei legt man bekanntlich drei Richtungen zu Grunde, die von einem Punkte ausgehen, ohne einer Ebene anzugehören; durch je zwei der angenommenen Achsen legt man eine Ebene, zieht von dem zu bestimmenden Punkte aus die Parallele zu jeder der drei Achsen bis zum Schnittpunkt mit der durch die beiden anderen Achsen gelegten Ebene und mifst die drei auf diese Weise erhaltenen Strecken durch dasselbe Mafs. Offenbar kann aber diese Konstruktion in ihrer Ausführlichkeit hier nicht gemeint sein, da sonst schon der Raum und seine Eigenschaften vorausgesetzt würden, während der Begriff der Richtung nur in einem Sinne postuliert wird, der auf Raum, Zeit, Zahl, Empfindungsintensität in gleicher Weise anwendbar ist. Demnach kann der angegebene Satz nur den Sinn haben, dafs man überhaupt von drei Richtungen ausgehend jedem Punkte drei Zahlen zuordnen könne, ohne dafs der Weg, auf dem dies möglich sein soll, wirklich angegeben wird. Das ist aber höchst mifslich; denn entweder wird der Leser unwillkürlich die Cartesischen Koordinaten heranziehen und dadurch den angewandten Begriffen räumliche Eigenschaften beilegen, oder er wird von der Definition nicht befriedigt sein, da ihm die Möglichkeit der Messung nicht einleuchtet. Zu wenig in die Definition hineinzulegen, dürfte auch nicht angehen; so können wir kaum glauben, der Raum solle hier, um einen treffenden Ausdruck Lies zu gebrauchen, nur als eine dreifach ausgedehnte Zahlenmannigfaltigkeit bezeichnet werden.

Überhaupt ist der Verfasser im Irrtum über die Bedeutung der Zahl der Dimensionen, wenn er darin nur die Zahl der Elemente erblickt, welche zur Bestimmung der Lage eines Punktes notwendig sind, wenn er sie also, wie er einmal ausdrücklich sagt, für Hilfsgröfsen der geometrischen Forschung hält. Dem gegenüber müssen wir beachten, dafs diese Zahl von der höchsten realen Bedeutung ist, indem der Ausdruck, der Raum hat drei Dimensionen, besagt, dafs eine dreimal wiederholte Teilung in der früher angegebenen Weise (S. 198) auf das unteilbare Gebilde, den Punkt, führt. Im dritten Abschnitt (B. 1. S. 168—172) haben wir zudem erkannt, dafs wir die Punkte des Raumes durch jede beliebige Zahl von Gröfsen bestimmen können, dafs z. B. für diesen Zweck die Zahlen einer einzigen Reihe ausreichen. Auch in anderer Hinsicht leiden die Angaben Wundts über die mehrdimensionale Geometrie an so vielen Ungenauigkeiten, dafs es unmöglich ist, sie einzeln zu besprechen.

Soviel glauben wir aber hier bewiesen zu haben, dafs wir unmöglich den ersten Satz als eine geeignete Grundlage für die Definition des Raumes anerkennen können. Vielleicht bietet aber der dritte Satz der Definition noch gröfsere Schwierigkeiten. Wie wir sehen, will der Verfasser zur Erklärung der Kongruenz den festen Körper nicht heranziehen. Er erklärt in den vorangehenden Erläuterungen ausdrücklich, die Geometrie als die abstrakte Wissenschaft der Raumelemente habe von denjenigen Erscheinungen abzusehen, welche aus der physikalischen Konstitution der Körper hervorgehen; auch könne der Satz, dafs es absolut feste Körper giebt, um deswillen eine physikalische Vorstellung nicht sein, weil er physikalisch unrichtig sei. Über diesen Punkt glauben wir uns im fünften Abschnitt ausführlich genug ausgesprochen zu haben; wir wiederholen hier nur: Der Geometrie kommt es einzig und allein auf die Vergleichung der Raumteile an; ob man dazu einen festen Körper benutzen oder sie in anderer Weise vermittelt denken will, ist an sich gleichgültig; nur mufs die Vergleichung, von der die Geometrie ausgeht, denselben Gesetzen folgen wie die Bewegung fester Körper. Demnach haben wir zu untersuchen, ob es Wundt gelungen sei, ohne Benutzung der festen Körper eine genügende Grundlage der Kongruenz zu schaffen.

Um diese Frage zu beantworten, beachten wir zuerst die Erläuterungen, welche der Verfasser auf den der Definition vorangehenden Seiten seines Werkes giebt. Hier operiert er fortwährend mit der »Translocierung von Raumteilen«; er denkt geradezu einem abgegrenzten Teile des Raumes eine andere Lage gegeben und setzt voraus, dafs derselbe infolge dieses Lagenwechsels seine räumlichen Eigenschaften nicht verändert. Das ist aber höchst bedenklich; denn erstens ist der Raum und mit ihm jeder seiner Teile durchaus unbeweglich; zweitens gehört doch die Lage im Raume zu den räumlichen Eigenschaften (so ist die Lage, durch die sich zwei kongruente Würfel unterscheiden, doch wohl eine räumliche Eigenschaft); es ist also unstatthaft zu sagen, ein Raumgebilde verändere durch Lagenänderung seine räumlichen Eigenschaften nicht.

Indessen wäre es unrecht, an solche der Erklärung gewidmete Partieen den Mafsstab der äufsersten Strenge zu legen. Wundt betrachtet an den erwähnten Stellen ohne Zweifel zwei Raumgebilde von verschiedener Lage, die in allen übrigen räumlichen Eigenschaften übereinstimmen. Was das zu bedeuten habe, soll dann durch den dritten Satz seiner Definition erklärt werden. Zwar deuten die ersten Worte: »Jeder Raumteil kann in veränderter Lage gedacht werden«, wieder auf eine Dislocierung hin. Wenn aber ein Raumgebilde seine Lage nicht ändern kann, so darf es auch nicht in geänderter Lage gedacht werden. Somit müssen wir das Hauptgewicht auf die Worte legen, das wechselseitige Lagenverhältnis beliebig in einem Raumgebilde angenommener Punkte werde nicht verändert. Wir fragen uns daher: Wann gilt das wechselseitige Lagenverhältnis in verschiedenen Raumgebilden als gleich? Nach dem ersten Satze der Definition, der das Wort Lage erklären will, müssen wir beidemal drei Richtungen zu Grunde legen und mit ihrer Hilfe den einzelnen Punkten Koordinatenwerte zuordnen. Gewifs ist diese Erklärung ausreichend, wenn wir beidemal ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde legen und beidemal dieselbe Längeneinheit gebrauchen. Das dürfen wir hier aber nicht voraussetzen; denn alsdann hätten wir den Begriff der Kongruenz vorweggenommen, der doch hier erst erklärt werden soll. Der erste Satz der Definition sagt nichts vom Winkel der Koordinatenachsen und von der Längeneinheit. Wir haben somit kein Mittel, die beiden Koordinatensysteme mit einander zu vergleichen. Hiernach bleibt die Möglichkeit, dafs das eine Raumgebilde durch ein rechtwinkliges, das andere durch ein schiefwinkliges Koordinatensystem bestimmt sei; auch braucht nicht beidemal dieselbe Längeneinheit benutzt zu werden. Mit Hilfe solcher Systeme seien den einzelnen Punkten des ersten Gebildes die Wertsysteme (x_1, x_2, x_3) und den Punkten des zweiten Gebildes die Wertsysteme (y_1, y_2, y_3) zugeordnet. Läfst man jetzt dem Punkte (x_1, x_2, x_3) denjenigen Punkt (y_1, y_2, y_3) entsprechen, für den $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ ist, so müssen nach der Definition die Raumgebilde als kongruent angesehen werden, während sie es in Wirklichkeit nicht sind.

Der vierte Satz definiert die Gerade durch zwei einander entgegengesetzte Richtungen von übereinstimmender Lage. Hier hat das Wort »Lage« doch offenbar eine ganz andere Bedeutung als im ersten Satze der Definition; es fehlt jede Andeutung, wie dies Wort denn überhaupt verstanden werden soll. Danach sucht man auch in der beigefügten Fufsnote vergebens; im Gegenteil giebt diese zu weiteren Bedenken Veranlassung.

Über die Axiome möchten wir zunächst bemerken, dafs die Übereinstimmung zwischen ihnen und den beiden Definitionen doch weit geringer ist, als Wundt annimmt: nur würde es zu weit führen, dies hier zu beweisen. Dagegen glaube ich die Aufmerksamkeit des Lesers auf das zweite Axiom hinlenken zu sollen. In der aufgestellten Form halte ich dasselbe geradezu für unrichtig, da jedes Raumgebilde an sich eine feste Lage hat, diese also nicht erst durch Punkte bestimmt werden kann. Das Axiom mufs demnach zum mindesten an die dritte Stelle gesetzt werden, indem man ihm die Bedeutung beilegt, dafs ein Gebilde, welches einem gegebenen kongruent sein soll, vollständig bestimmt ist, sobald man die Lage von drei Punkten kennt. Aber selbst in dieser Form ist es nicht geeignet, die scharfen Forderungen Helmholtz' zu ersetzen; denn mit der Wundtschen Form wäre es u. a. vereinbar, dafs die Lage des dritten Punktes noch ganz willkürlich ist, nachdem man die der beiden ersten beliebig gewählt hat.

Man mufs es bedauern, dafs Wundt nicht die Folgerungen aus seiner Definition so weit gezogen hat, bis er wenigstens die Existenz der Ebene und die Parallelentheorie begründet hätte. Dann würde er wohl genötigt gewesen sein, auf die wirkliche Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie einzugehen. Was er jetzt darüber sagt, trifft nicht ihre Theorie selbst, sondern richtet sich gegen unrichtige Ansichten, die er sich darüber gebildet hat. So glaubt er, man stelle sich vor, die Gerade sei ein Bestandteil des objektiven Raumes, der darum, weil er unabhängig von uns existiere, auch gelegentlich seine Eigenschaften verändern könne. Eine Andeutung Riemanns in seiner Habilitations-Vorlesung versteht er dahin, als halte es dieser Mathematiker für möglich, dafs durch ein Zurückgehen auf das unmefsbar Kleine eine der wesentlichen Eigenschaften des Raumes sich verändern könne. Dem entgegen darf ich daran erinnern, dafs auch für den Mathematiker die Gleichförmigkeit des Raumes oberstes Princip ist.

Überhaupt bleiben alle Eigenschaften des Raumes, die Wundt für wesentlich hält, in den nicht-euklidischen Raumformen ungeändert; nur verlangt er in der kürzeren Definition und im vierten Axiom, dafs der Raum unendlich sein solle. Dadurch werden allerdings manche Raumformen ausgeschlossen; aber Wundt selbst kann diese Eigenschaft nicht für wesentlich ansehen, da er in der ausführlichen Definition nur verlangt, dafs der Raum unbegrenzt sein soll; die letztere Eigenschaft kommt aber allen Raumformen gleichmäfsig zu.

§ 7.

Eine Arbeit Überwegs.

Wir müssen hier auf eine Abhandlung Überwegs [20]) über die Grundlagen der Geometrie eingehen, die allerdings auf die weiteren Entwicklungen dieser Theorie keinen bemerkbaren Einflufs ausgeübt hat, die aber als Vorläuferin der bekannten Helmholtzschen Arbeiten Beachtung verdient, da sie siebzehn Jahre früher erschienen ist und im Grundgedanken eine merkwürdige Übereinstimmung zeigt.

Schon die Stellung und Rechtfertigung der Aufgabe bietet Interesse. Überweg vermifst in den Principien der Mathematik wissenschaftliche Strenge, da sich darin Begriffe ohne Definitionen, Sätze ohne Beweise (Axiome), Forderung der Lösung von Aufgaben ohne Nachweis der Mittel (Postulate) finden. Nun glaubt er, die Arithmetik bedürfe keiner Axiome, wofern nur die genügenden Definitionen vorausgeschickt würden. Aber aus den Principien der Geometrie könne nicht alles Unbewiesene eliminiert werden. Dementsprechend machen sich seiner Ansicht nach zwei Forderungen geltend, die eine: zwischen den mannigfaltigen gangbaren Grundbegriffen, Axiomen, Postulaten durch eine wissenschaftliche Ableitung einen Zusammenhang nachzuweisen; die andere: den Grund der Gewifsheit des mathematisch Unbeweisbaren darzuthun. Dem zweiten Problem werden nur wenige Seiten gewidmet; Überweg will eingehend nur die erste Aufgabe behandeln. Dabei bieten sich zwei Wege dar, von denen der eine von der philosophischen Bestimmung des Raumes, der zweite von einer bestimmten empirischen Anschauung ausgeht. Da der erste erst eingeschlagen werden kann, nachdem mehrere philosophische Fragen endgültig gelöst sind, will der Verfasser den zweiten verfolgen; er will mit anderen Worten von einem Experimente ausgehen. Nun erfolgt die Sonderung des Raumes aus der sinnlichen Totalanschauung nur durch Wahrnehmung von Bewegungen. Demnach erachtet er die Bewegung als ein wesentliches Element seines Experimentes und glaubt speciell das nachstehende seiner Einfachheit wegen empfehlen zu sollen:

Ein materieller fester Körper kann nach dem Zeugnis der Sinne, I. wenn er unbefestigt ist, überallhin gelangen, wo sich nicht etwa schon ein anderer fester Körper befindet; II. derselbe, an einer einzelnen Stelle festgehalten, kann sich nicht mehr unbeschränkt überallhin bewegen, ist aber doch nicht aller Bewegung beraubt; III. aufserdem noch an einer zweiten Stelle festgehalten, kann derselbe an keiner Stelle mehr alle bei (II) möglichen Bewegungen machen, aber doch immer noch bewegt werden; IV. wird aber eine dritte Stelle des Körpers befestigt, die bei (III) noch bewegt werden konnte, so wird alle Bewegung desselben überhaupt unmöglich.

Mit diesem Experimente verbindet er, indem das Zeugnis der

Sinne idealisiert wird, das Axiom oder die Hypothese, daſs die vorstehenden Bestimmungen mit absoluter Genauigkeit gelten. Dann sucht er daraus mit mathematischer Strenge analytisch zurückzuschlieſsen auf die Grundbestimmungen des Raumes. Sind diese gefunden, so tritt endlich von ihnen aus das synthetische Verfahren ein, welches den ganzen Reichtum der Geometrie erzeugt. Streng auszuschlieſsen ist hierbei jede Anschauung, jedes Axiom, jedes Postulat, überhaupt jede Bestimmung, die nicht in dem Obigen liegt.

Aus dem ersten Teile des Experimentes werden die Definitionen des Ortes, der unendlich kleinen Gröſse, der Stetigkeit hergeleitet und die Gleichartigkeit, Kontinuität und Unendlichkeit des Raumes erschlossen. Der zweite Teil führt auf den Punkt, den Weg eines Punktes, auf den kugeligen Ort (die Kugelfläche), auf den allgemeinen Begriff der Fläche und liefert zahlreiche Sätze über diese Gebilde.

Uns interessiert besonders eine Stelle, worin der Verfasser zeigt, daſs er mit vollem Bewuſstsein mehr aus der Erfahrung erschlieſsen will, als er in der obigen Skizzierung seines Experimentes ausdrücklich angegeben hat. Er will alle Bewegungen untersuchen, die noch möglich sind, wenn eine Stelle eines festen Körpers festgehalten wird. Zu dem Zwecke geht er ausdrücklich wieder auf die Erfahrung zurück und erklärt: »Die Erfahrung zeigt uns, daſs, wenn mehrere Orte befestigt sind, andere Erscheinungen als die angeführten, nämlich die beiden folgenden Teile unseres Experimentes eintreten. . . . Die bleibende Stelle kann also kein endlicher Teil des Raumes sein; sie kann selbst keine zweite gleichartige Stelle in sich unterscheiden lassen und ist daher das absolut einfache Raumelement.« Auch die Annahme, daſs mit der Ruhe eines Punktes ein durch denselben hindurchgehendes Gebilde regelmäſsig in sich verbleibt, wird an einer spätern Stelle ausgeschlossen, indem hervorgehoben wird, die Kugel mit dem Mittelpunkte α könne ins Unendliche abnehmen, indem ihr Grenzwert der Punkt α sei, »dessen Gröſse $= 0$ vorgestellt wird«.

Auf die Folgerungen, welche Überweg aus dem dritten und vierten Teile seines Experimentes zieht, wollen wir nicht eingehen. Wir bemerken nur, daſs er zum Schluſs seiner analytischen

Untersuchung auf die gerade Linie geführt wird, indem er den Lehrsatz zu beweisen sucht: »Bei jeder Drehung eines Körpers um zwei feste Punkte giebt es eine, aber auch nur eine Linie, die unbewegt bleibt; die beiden festen Punkte fallen in sie hinein.« Demnach definiert er die Gerade als diejenige Linie, welche bei der Drehung um zwei ihrer Punkte in sich verbleibt, und giebt dann dem vorstehenden Satze die Form: »Zwischen je zwei Punkten giebt es eine, aber auch nur eine gerade Linie, die über beide hinaus ins Unendliche verlängert werden kann.«

Die synthetische Untersuchung, welche sich jetzt anschliefst, will zunächst zeigen, dafs der Raum drei Dimensionen hat, sucht dann den Begriff der Richtung zu begründen, definiert die Ebene als den Ort der gleichen Abstände von zwei Punkten und glaubt daraus die Fundamentaleigenschaft der Ebene herleiten zu können. Der Begriff der Richtung führt auf den Winkel und liefert, wie Überweg meint, eine weitere Grundlage für die Parallelentheorie.

Wie wir sehen, hat die Arbeit zahlreiche Mängel; das Experiment, aus dem alle Eigenschaften des Raumes hergeleitet werden sollen, genügt keineswegs; noch weniger können die Beweise als befriedigend anerkannt werden. Immerhin bleibt dieser Versuch, der noch älter ist als Riemanns bekannte Vorlesung, von hohem Interesse, um so mehr, da sich der Verfasser, wie er sagt, nur in einzelnen Partieen an eine Schrift von Erb anschliefsen konnte, im Plane des Ganzen aber ohne Vorgänger war. Zudem zeigt Überwegs »Experiment« grofse Ähnlichkeit mit den »Thatsachen«, von denen Helmholtz viele Jahre später ausging. Ob der letztere die vorliegende Arbeit gekannt hat, wird sich wohl nicht ermitteln lassen; nur ist es auffallend, dafs Helmholtz häufig den Ausdruck »kugelige Flächen« gebraucht, wie Überweg von »kugeligen Orten« spricht; jedenfalls müssen wir wohl beachten, dafs die Voraussetzungen, von denen Helmholtz ausgeht, weit schärfer und umfassender, und dafs seine Beweise von ganz anderer Natur sind.

Zum Schlufs dieses kurzen Überblicks müssen wir unserm Bedauern Ausdruck geben, dafs Überweg durch seinen frühen Tod verhindert wurde, diese Abhandlung (und einige weitere) in neuer Bearbeitung herauszugeben, was er nach einer Mitteilung von Theodor Toeche in seinen letzten Lebensjahren beabsichtigt hat.

§ 8.

Tillys Grundlagen der Geometrie.

Wir wenden uns jetzt zu einer Arbeit von de Tilly,[21]) die ohne Zweifel durch Helmholtz' Untersuchungen beeinflufst ist, deren Ziel aber darauf hinauskommt, die von Helmholtz gemachten Voraussetzungen zu vereinfachen und die rechnende Beweismethode des letzteren durch eine geometrische zu ersetzen.

1. Tilly glaubt nach Begründung der Begriffe von Fläche, Linie und Punkt die ganze Geometrie auf dem Begriffe der Entfernung aufbauen zu können. Wie er sagt, ist jedesmal mit irgend zwei Punkten A und B des Raumes eine gewisse Gröfse, die Entfernung AB, derartig verbunden, dafs

a) alle Entfernungen gleichartige Gröfsen sind, die verschiedenen Entfernungen also der Gesamtheit der positiven Zahlen zugeordnet werden können, und dafs

b) die Entfernung AB nur null wird, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Es möge hier bemerkt werden, dafs Tilly im Grunde genommen nicht die Entfernung r selbst seiner Untersuchung zu Grunde legt, sondern eine beliebige Funktion f (r), welche für alle positiven Werte von r eindeutig und stetig ist, für $r = 0$ verschwindet und mit wachsendem Argument selbst wächst; derartige Funktionen können aber in der mannigfaltigsten Weise gebildet werden.

Mit der Entfernung werden diejenigen Bewegungen in Zusammenhang gebracht, bei denen jedes System von Punkten in sich unverändert bleibt. Demnach stellt Tilly folgendes Axiom auf:

»Die Entfernung ändert sich im Raume auf stetige Weise, d. h. wenn man eine beliebige von zwei Punkten A und B begrenzte Linie betrachtet, so verändert sich die Entfernung der Punkte dieser Linie vom Endpunkte B auf eine stetige Weise von AB bis null.«

»Ist im Raume eine beliebige Figur gegeben, welche die Punkte A und B enthält, hat ferner der Punkt B' von A dieselbe Entfernung wie der Punkt B, so kann man die Figur bei der Ruhe des Punktes A so bewegen, dafs das System unverändert bleibt und dafs der Punkt B die Lage des Punktes B' erhält.«

Diese Voraussetzungen fafst Tilly als erstes oder Haupt-Axiom zusammen; daran schliefst er das zweite Axiom, nach welchem die Entfernung zweier Punkte unbegrenzt wächst.

Aus diesen beiden Axiomen glaubt er die Geometrie einwurfsfrei herleiten zu können.

2. An erster Stelle beweist er den Satz, dafs, wenn in einer Figur die Punkte A und B, und in einer zweiten Figur die Punkte A' und B' derartig gewählt sind, dafs die Entfernungen AB und A'B' einander gleich sind, man jedesmal der zweiten eine neue Lage geben kann, in welcher der Punkt A' auf A, B' auf B fällt. Zu dem Ende verbindet er die Punkte A und A' durch eine beliebige Linie; hierin mufs ein Punkt O liegen, für den OA = OA' ist. Nun genügt eine zweimalige Anwendung des Hauptaxioms, die Richtigkeit des Satzes zu erkennen.

3. Hieran schliefst sich eine Untersuchung, die für das Werk eine fundamentale Bedeutung hat. Wenn der Punkt X eine beliebige Linie (AB) beschreibt, sich etwa vom Punkte B zum Punkte A hinbewegt, so ändert sich die Entfernung XB des Punktes X von B stetig; sie braucht nicht fortwährend zu wachsen, kann vielmehr Maxima und Minima haben; da aber die Entfernung gleich null wird, wenn man den Punkt X mit B zusammenfallen läfst, so mufs es in der Nachbarschaft des Punktes B einen Bereich BB' geben, auf dem die Entfernung stets zunimmt, wofern der Punkt X auf ihr von B weggeht. Diesen Bereich nennt Tilly die r é g i o n d e c r o i s s a n c e c o n t i n u e.

Aus dieser Behauptung schliefst er, dafs es zwischen zwei Punkten A und B mindestens eine Linie giebt, auf der die Entfernung vom Endpunkte A fortwährend wächst. Erstreckt sich nämlich auf einer beliebigen zwischen A und B gezogenen Linie (AB) der Bereich fortwährenden Wachstums vom Punkte A bis zu einem Punkte M, so ist die Entfernung AM entweder gleich der Entfernung AB oder gröfser oder kleiner als dieselbe. Ist AM = AB, so kann man die Figur so um A drehen, dafs M auf B fällt; dann hat die neue Linie die vorgeschriebene Eigenschaft. Wenn aber AM > AB ist, so giebt es in AM einen Punkt B', für den AB' = AB ist; jetzt kann man die Linie (AB') so bewegen, dafs B' auf B fällt; der Satz ist also ebenfalls bewiesen. Wofern aber endlich AM < AB ist, mufs es, weil für den Punkt M die Entfernung aufhört zu wachsen, einen Punkt M′ in der Linie zwischen M und B geben, für den AM′ = AM ist und von dem aus die Entfernung XA zunächst wächst, wenn sich X von M′ aus auf dem Zweige (M′B) bewegt. Nun dreht man die Linie (AM), bis M auf M′ fällt, und betrachtet statt der Linie (AB) diejenige Linie, welche aus der mit (AM) kongruenten Linie (AM′) und dem ursprünglichen Zweige (M′B) besteht. Dadurch ist der Bereich fortwährenden Wachstums gröfser geworden. Wiederholt man also die angegebene Operation, so mufs man schliefslich eine Linie (AB) erhalten, welche die geforderte Eigenschaft besitzt.

4. Aber nicht blofs auf jeder Linie, sondern auch auf jeder Fläche giebt es nach Tilly um jeden Punkt A herum einen Bereich fortwährenden Wachstums der Entfernung. Um das zu beweisen, zieht er auf der Fläche von dem Punkte aus unendlich viele, einander unendlich nahe Linien. Auf jeder Linie giebt es einen endlichen Bereich fortwährenden Wachstums; die Entfernungen der einzelnen Endpunkte von A bestimmen eine Mannigfaltigkeit von Gröfsen, unter denen es ein von null verschiedenes Minimum giebt; betrachtet man auf jeder Linie nur den Punkt, dem diese kleinste Entfernung zukommt, so begrenzt die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Punkte einen Bereich von der verlangten Eigenschaft.

5. Nachdem die Kugel in bekannter Weise definiert ist, werden folgende Sätze bewiesen:

»Wird der Mittelpunkt der Kugel festgehalten und bleibt ein Teil der Oberfläche unbewegt, so kann überhaupt kein Teil der Kugel bewegt werden.«

»Wenn bei der Ruhe des Mittelpunktes eine auf der Kugelfläche gezogene Linie in Ruhe bleibt, so mufs auch die Kugel als Ganzes unbewegt bleiben.«

»In einem bewegten System bleibt kein Raumteil und keine Oberfläche in Ruhe.«

»Zwei verschiedene Kugelflächen können keinen Teil ihrer Oberflächen gemeinschaftlich haben.«

Was den Beweis dieser Sätze betrifft, so bemerken wir nur, dafs Tilly regelmäfsig von den Bereichen fortwährenden Wachstums auf einer Linie und auf einer Fläche Gebrauch macht.

6. Durch eine unendlich kleine Drehung eines unveränderlichen Systems um einen festen Punkt O gelangt ein Punkt A auf einen Punkt B, zugleich aber der Punkt B auf C, C auf D u. s. w. Alle diese Punkte A, B, C, D . . . liegen nicht nur auf derselben Kugel, sondern gehören auch sämtlich einer Linie an, welche bei der Bewegung in sich verschoben wird. Diese Linie mufs entweder unendlich oder geschlossen sein. Der erste Fall kann nicht eintreten, da die Linie einerseits einem endlichen Raumteile angehört, andererseits sich keinem Punkte unbegrenzt nähern kann, ohne ihn zu erreichen. Demnach bedeckt sich jede Kugel, die O zum Mittelpunkt hat, bei der angegebenen Bewegung mit geschlossenen in sich verschiebbaren Linien. Die Grenze dieser Linien ist, wie weiter gezeigt wird, ein Punkt, der bei der Bewegung in Ruhe verbleibt.

7. Nun führt Tilly auf der Kugel um jeden Punkt A herum neben dem Bereiche fortwährenden Wachstums noch einen weiteren Bereich ein, der die Eigenschaft hat, dafs alle Punkte, welche ihm nicht angehören, von A weiter entfernt sind als die Punkte des Bereiches. Mit Hilfe dieses neuen Begriffes zeigt sich, dafs auf jeder Kugel noch ein zweiter Punkt liegt, der bei der angegebenen Bewegung in Ruhe bleibt. Daraus folgt weiter der Satz:

»Bei der Ruhe zweier Punkte ist noch Bewegung möglich; dann beschreibt jeder Punkt auf einer Kugel, die einen der ruhenden Punkte zum Mittelpunkt hat, eine geschlossene Linie. Alle Punkte vollenden ihren Umlauf gleichzeitig, und alle Punkte einer gewissen Linie, der Geraden, bleiben bei der Bewegung in Ruhe.«

Nachdem dann noch gezeigt ist, dafs es zwischen zwei Punkten eine einzige gerade Linie giebt, und dafs die Entfernung AB gleich der Entfernung BA ist, bietet der weitere Ausbau der Geometrie keine Schwierigkeit mehr.

8. Das hierdurch skizzierte System Tillys kann als Versuch, für den es sich durch den Titel ausgiebt, lebhaftes Interesse beanspruchen; auch enthält es ohne Zweifel manche Keime, welche bei weiterer Entwicklung sich für die Grundlagen der Geometrie als nützlich erweisen können. Aber die übertriebenen Lobsprüche, mit denen die Arbeit von ihrem Erscheinen an bis in die jüngste Zeit überschüttet worden ist, zwingen uns, eine sachliche Prüfung

eintreten zu lassen und wenigstens einigen Bedenken, die wir gegen die Arbeit hegen, offenen Ausspruch zu geben.

9. Tilly will eine rein geometrische Methode anwenden; er ordnet nicht, wie Helmholtz, den einzelnen Punkten Wertsysteme zu, um dann auf rechnerischem Wege geometrische Sätze zu erhalten, sondern er will auch in seinen Beweisen ganz auf dem Boden der Geometrie verbleiben. Während Helmholtz eine gröfsere Anzahl von Axiomen voraussetzt, glaubt Tilly im wesentlichen nur ein einziges zu bedürfen. Aber während Helmholtz' Voraussetzungen einen geometrischen, oder wenn man lieber will, einen mechanischen Charakter an sich tragen, stellt Tillys Axiom eine Mischung von Algebra und Geometrie dar, die unmöglich natürlich sein kann. Nachdem ein Punkt O gegeben ist, wird jedem Punkte A eine gewisse Zahl zugeordnet; diese Zahl bleibt für die Punkte einer gewissen Fläche ungeändert; sie ändert sich stetig, wenn der Punkt A irgend eine Bewegung ausführt. Eine solche Festsetzung trägt vollständig den Stempel der Willkür an sich. Noch weniger erhält man eine Antwort auf die Frage, wie sich denn die Entfernung bestimmen lasse. Auch sind die Beweise keineswegs geometrisch, sondern, wie Veronese treffend hervorhebt, rein analytischer Natur.

10. Nun könnte man denken, die Entfernung als Zahlgröfse könne durch gewisse geometrische Annahmen ersetzt werden; die Benutzung des Abstandes sei demnach nur ein überflüssiges Beiwerk, welches leicht entfernt werden könne. In der That, sobald man die Annahme macht, dafs die Kugel eine geschlossene Fläche ist, in deren Innerem der Mittelpunkt liegt, kann man jeder beliebigen Reihe von Punkten A_1, A_2, A_3 . . . A_λ . . . A_μ . . . eine Reihe von Zahlen a_1, a_2, a_3 . . . a_λ . . . a_μ . . . zuordnen, welche allen Anforderungen Tillys genügt. Man braucht ja zu dem Ende nur die Forderung zu stellen, dafs, wofern A_μ aufserhalb der durch A_λ, aber innerhalb der durch A_ν gelegten Kugel liegt, die Zahl $a_\mu > a_\lambda$, aber $a_\mu < a_\nu$ sein soll. Hiernach sollte man denken, die Möglichkeit, jedem Punkte des Raumes in der von Tilly geforderten Weise eine Zahl zuzuordnen, sei eine blofse Folgerung aus dem hier gemachten rein geometrischen Axiom. Indessen würde man sich vergeblich bemühen, wenn man aus dem neuen Axiom die Folgerungen ziehen wollte, die Tilly aus

dem seinigen herleitet. Das legt den Gedanken nahe, dafs Tillys System sich nicht auf die angegebene Grundlage stützt, sondern fremde Voraussetzungen hinzunimmt.

11. In der That gründet sich sein Beweisverfahren darauf, dafs es auf jeder Linie und jeder Fläche um einen beliebigen Punkt herum einen Bereich fortwährenden Wachstums giebt. Dieser Satz gilt aber keineswegs für jede Linie, da er sich auf die Annahme stützt, dafs, wofern die Entfernung der einzelnen Punkte einer Linie von dem einen Endpunkte Maxima und Minima besitzt, die Zahl derselben stets endlich ist. Dafs diese Annahme nicht gemacht werden darf, ergiebt sich aus Sätzen, welche in neuerer Zeit nach Weierstrafs' Vorgange für die reellen stetigen eindeutigen Funktionen einer reellen Variabeln aufgefunden und welche durch Dinis Lehrbuch der Funktionentheorie für jeden leicht zugänglich gemacht sind. Ich erinnere nur an die ebene Linie, welche in Cartesischen rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung:

$$y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} b^{\varkappa} \cos (a^{\varkappa} x \pi)$$

unter den früher angegebenen Bedingungen (S. 187) dargestellt wird. Solche Linien müssen bei dem Verfahren Tillys von vornherein ausgeschlossen werden, was kaum angeht.

12. Noch weit bedenklicher ist der entsprechende Satz für Flächen. Tilly zieht auf der Fläche durch den angenommenen Punkt eine Reihe von Linien, sucht auf jeder den Bereich fortwährenden Wachstums und bestimmt die untere Grenze der einzelnen Bereiche. Durch diese Erwägung erhält er einen gewissen Teil der Fläche und nimmt an, dafs derselbe in einer festen Beziehung zu der Fläche steht, während man diesem Gebiete der Fläche nur dann eine von der Auswahl der Linien unabhängige Eigenschaft beilegen darf, wenn alle von dem Punkte ausgehenden Linien in Betracht gezogen werden. Aber selbst für eine einzige Schar von Linien fehlt der Nachweis, dafs die untere Grenze der Entfernungen von null verschieden ist, und ein solcher Nachweis läfst sich gar nicht führen. Um das zu erkennen, nehmen wir die einfachste Fläche, die Euklidische Ebene, wählen in ihr einen Punkt A, legen durch A eine Gerade und ziehen alle Kreise,

welche diese Gerade in A berühren. Auf beiden Seiten werden die Radien der Kreise und damit die Bereiche fortwährenden Wachstums immer kleiner; es existiert also keine von null verschiedene untere Grenze. Nun beruhen die weiteren Beweise darauf, dafs für jede Fläche der Bereich fortwährenden Wachstums von null verschieden ist, stützen sich also auf einen Satz, der unmöglich richtig sein kann.

13. Die Annahme, dafs es in jeder Fläche um einen beliebigen Punkt einen Bereich fortwährenden Wachstums giebt, darf hiernach wohl als der fundamentale Fehler in Tillys System bezeichnet werden. Wenn im Vergleich hiermit die übrigen Mängel des Werkes auch weniger in Betracht kommen, so möchten wir doch die Art und Weise noch erwähnen, wie diejenige Drehung um einen Punkt eingeführt wird, bei der jeder Punkt eine in sich verschiebbare Linie beschreibt. Bei einer solchen Bewegung soll die Veränderung betrachtet werden, die in einem Augenblick vor sich geht; da, heifst es, werde der Punkt A durch einen Punkt B ersetzt, B durch C u. s. w. Eine solche Darstellung wäre nur gestattet, wenn auf jeden Augenblick ein anderer unmittelbar folgte, und wenn es in einer Linie zu jedem Punkte einen bestimmten unmittelbar vorangehenden und einen unmittelbar folgenden gäbe. Da beides nicht der Fall ist, kann man den Beweis nicht für genügend erachten.

§ 9.

Veroneses Aufbau der Geometrie.

Das grofse Werk Veroneses »Fondamenti della Geometria«, welches vor kurzem auch in einer deutschen Ausgabe erschienen ist,[22]) zerfällt nach einer Einleitung in zwei Teile, von denen der erste »die Gerade, die Ebene und den Raum von drei Dimensionen im allgemeinen Raum« behandelt, während der zweite Teil dem »Raum von vier und n Dimensionen im allgemeinen Raume« gewidmet ist. Ein Anhang befafst sich mit historisch-kritischen Untersuchungen über die Principien der Geometrie. So wichtig die Einleitung, in der die »Fundamentalsätze über die abstrakten mathematischen Formen« entwickelt werden, auch für das ganze System sind, müssen wir uns doch versagen, darauf hier einzugehen. Zwei besonders wichtige Kapitel sind im fünften

Abschnitt besprochen; in gleicher Weise den Inhalt der übrigen Kapitel mitzuteilen, würde zu weit führen. Noch weniger dürfen wir uns mit dem Anhang beschäftigen; dagegen müssen wir dem Leser einen Einblick zu vermitteln suchen in die interessante und originelle Art und Weise, in der die Geometrie von Veronese aufgebaut wird. Zu dem Zwecke will ich die ersten Definitionen, Axiome und Sätze wesentlich in der vom Verfasser eingehaltenen Reihenfolge geben; natürlich mufs ich darauf verzichten, die Erläuterungen und Beweise ebenfalls mitzuteilen. Für den späteren Inhalt des Werkes begnüge ich mich mit einem zusammenfassenden Überblick. Selbstverständlich behalte ich die Nomenklatur des Verfassers auch da bei, wo sie von der meinigen durchaus abweicht.

1. Den Anfang bilden folgende Definitionen und Axiome:

Def. Das Grundelement, aus welchem sich die Formen zusammensetzen, heifst Punkt.

Ax. I. Es giebt verschiedene Punkte. Alle Punkte sind identisch.

Def. Jede Form, deren Grundelement der Punkt ist, nennen wir Figur oder geometrisches Ding oder Gebilde.

Def. Der allgemeine Raum ist durch ein System von Punkten gegeben, derart, dafs, wenn eine beliebige seiner Figuren von n Dimensionen in ihm gegeben ist, es wenigstens einen Punkt aufserhalb dieser Figur giebt. Die Wissenschaft, die sich mit den Figuren (und daher mit dem allgemeinen Raum) beschäftigt, heifst Geometrie.

Ax. II. Es giebt ein in der Position seiner Teile identisches Punktsystem einer Dimension, welches durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt wird und stetig ist. Das System heifst gerade Linie oder Gerade. Es giebt Punkte aufserhalb der Geraden. Jeder Punkt, welcher nicht der Geraden angehört, bestimmt mit jedem Punkte derselben eine andere Gerade.

Ax. III. Wenn zwei beliebige Gerade einen Punkt A gemeinschaftlich haben, so ist mit einem beliebigen Segment (AB) der ersten ein Segment (AB') der zweiten, und den Vielfachen von (AB) die Vielfachen von (AB') identisch.

Daraus werden u. a. folgende Sätze hergeleitet:

»Die Gerade ist einfach geschlossen oder einfach offen.«

»Wählt man einen Punkt X der Geraden, so giebt es nur zwei einem beliebigen anderen Segment gleiche Segmente, welche das Element X zum gemeinschaftlichen Ende haben und gleich gerichtet sind.«

»Wenn zwei Punkte die Gerade nicht bestimmen, so enthält jede Gerade, die den einen Punkt enthält, auch den anderen. Jedes geradlinige Segment ist ein Teil einer einzigen Geraden. Alle durch einen Punkt gehenden Geraden bestimmen den allgemeinen Raum. Zwei beliebige Gerade sind identisch.«

Die weitere Entwicklung geht nach der Definition des Dreiecks von folgenden Definitionen aus:

»Unter der Umgebung eines gegebenen Punktes A verstehen wir das Gebiet, welches durch alle von A ausgehenden Segmente, die einem beliebigen noch so kleinen Segment ε gleich sind, bestimmt wird. Der Abstand 2ε heifst die Ausdehnung der Umgebung von A.«

»Ein Punkt L heifst Grenzpunkt einer Punktgruppe (X) oder einer Reihe von Punkten (X_n), wenn in jeder beliebigen Umgebung von L in beliebig kleiner Ausdehnung ein Punkt der Gruppe oder der Reihe liegt, falls n so grofs genommen wird, dafs jeder Punkt X_{n+r} in die genannte Umgebung fällt.«

Der Ausdruck »ein veränderliches Dreieck« soll soviel bedeuten als eine Reihe von Dreiecken.

Hiernach wird das Axiom aufgestellt:

Ax. IV. Wenn eine Seite eines beliebigen Dreiecks unbegrenzt klein wird, so wird die Differenz der beiden anderen Seiten ebenfalls unbegrenzt klein,

und daraus werden folgende Sätze hergeleitet:

»Wenn zwei Punkte A und B einen Punkt C zum Grenzpunkt haben, so strebt ihr Segment auf jeder durch sie gehenden Geraden der Null zu. Wenn eine Punktreihe (X_n) einen Grenzpunkt L hat, so nimmt das Segment $(X_n X_{n+r})$ bei konstantem r und unbegrenzt wachsendem n unbegrenzt ab. Der Punkt X_n der Reihe (X_n), welche L zum Grenzpunkt hat, kann sich bei unbegrenzt wachsendem n nur dem Punkte L unbegrenzt nähern. Wenn der Abstand eines Punktes R von den Punkten X einer Geraden unbegrenzt abnimmt, so gehört der Punkt R der Geraden an.«

»Wenn eine Punktgruppe (A) der Geraden derart gegeben ist, dafs,

1. wählt man ein beliebiges Segment, dessen Enden Punkte der Gruppe sind, die Enden der konsekutiven diesem System gleichen Systeme in der gegebenen Richtung von jedem Punkte der Gruppe als Anfang an, der Gruppe selbst angehören,

2. ein Punkt A um (A) nicht einen ersten konsekutiven Punkt der Gruppe in jeder Richtung hat, so giebt es in jedem willkürlich kleinen Segment der Geraden stets einen Punkt der Gruppe.«

Von diesen Sätzen aus gelangt der Verfasser, allerdings erst noch durch zahlreiche Zwischenstufen hindurch, zu folgendem Ergebnis:

»Wenn die Gerade offen ist, so bestimmt jedes Punktepaar die Gerade. Wenn die Gerade geschlossen ist, so wird sie durch zwei beliebige ihrer Punkte bestimmt mit Ausnahme des möglichen Falles, dafs diese Punkte entgegengesetzt sind (d. h. dafs die geschlossene Linie durch die beiden Punkte halbiert wird).«

2. Nachdem auf diesem etwas weitläufigen Wege die Theorie der Geraden zum Abschlufs gebracht ist, aber zugleich zahlreiche Sätze bewiesen sind, die in den folgenden Abschnitten fortwährend benutzt werden, wird ein Gedanke entwickelt, der an sich ganz einfach ist, der auch schon in anderen Werken manche Anwendung gefunden hat, dessen konsequente Durchführung aber für das Veronesesche System charakteristisch ist. Dieser Gedanke besteht darin, dafs mit einer Figur jedesmal die Gesamtheit aller durch irgend zwei ihrer Punkte begrenzten geraden Segmente betrachtet wird. Hierbei stützt sich der Verfasser auf folgende Sätze:

»Jede Figur gehört einer geradlinigen Figur an. In zwei gleichen Figuren . . . ABC . . . M . . . und . . . A'B'C' . . . M' . . . sind die durch Gruppen sich entsprechender Punkte bestimmten Figuren gleich. Zwei geradlinige, durch andere gleiche Figuren bestimmte Figuren . . . ABC . . . M . . . und . . . A'B'C' . . . M' . . . sind gleich, wenn sich zwischen ihren Punkten ein eindeutiger Zusammenhang derart feststellen läfst, dafs die geradlinigen Segmente (und damit auch die Abstände) der entsprechenden Punkte der Reihe nach gleich sind. Zwei Figuren, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.«

Zu den einfachsten Figuren ist das Strahlenpaar und das Geradenpaar zu rechnen, von denen das erstere aus zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen (Halbgeraden), letzteres aus zwei sich schneidenden Geraden besteht. Mit jedem Strahlenpaar wird das Scheitelpaar zusammengestellt. Der Verfasser beweist folgende Sätze:

»Wenn zwei Geradenpaare gleich sind, so mufs in ihrem Identitätszusammenhang erstens dem Schnittpunkt des einen der Scheitelpunkt des zweiten entsprechen; zweitens entspricht einem Strahl oder einer Richtung der Geraden des einen Paares ein bestimmter Strahl der Geraden des zweiten Paares; drittens bestimmen zwei sich entsprechende Punktepaare gleiche Segmente. Wenn zwei Strahlenpaare gleich sind, so sind auch die Scheitelpaare gleich. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn zwei Seiten und das durch sie bestimmte Paar bezüglich gleich sind.«

An dieser Stelle glaubt Veronese sein fünftes Axiom aufstellen zu müssen, dem er folgenden Ausdruck giebt:

Ax. V. Wenn man in zwei Strahlenpaaren AB, AC und A′B′, A′C′ zwei Punktepaare B und C, B′ und C′ derart auswählt, dafs (AB) = (A′B′), (AC) = (A′C′) ist, und wenn dann das Segment (BC) mit dem Segment (B′C′) identisch ist, so sind die beiden Strahlenpaare identisch.

Daraus ergeben sich folgende Sätze:

»Das Strahlenpaar (ab) ist dem Paar (ba) gleich. Zwei Scheitelpaare von Strahlen sind gleich. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn ihre Seiten zu je zweien bezüglich gleich sind. Wenn die Summe der Abstände eines Punktes von zwei Punkten dem Abstande dieser Punkte gleich ist, so liegen die drei Punkte in gerader Linie.«

3. Auf den weiteren Inhalt des Werkes können wir nicht in gleicher Ausführlichkeit eingehen, wie wir es soeben für einen nicht eben grofsen Abschnitt gethan haben. Wir möchten nur bemerken, dafs selbstverständlich die Gerade auch in Bezug auf die verschiedenen Einheiten untersucht wird. Die Lobatschewskysche Geometrie, die nach der Meinung des Verfassers mit seinen allgemeinen Hypothesen nicht vereinbar ist, wird nicht eigens

behandelt; Veronese begnügt sich damit, einige Eigenschaften ihrer Ebene mitzuteilen. Dagegen wird die Euklidische und die Riemannsche Geometrie recht ausführlich besprochen. Bei dem Ausgangspunkte, den der Verfasser gewählt hat, weicht die Beweisführung durchweg von der gebräuchlichen ab; er ist daher genötigt, alle Beweise in voller Ausführlichkeit zu entwickeln. Wie bemerkt, können wir ihm auf diesem Wege aus mancherlei Gründen nicht folgen. Wir ziehen es daher vor, kurz darzulegen, worin wir das Charakteristische seiner Methode erblicken, und dasjenige hervorzuheben, was wir als den hervorstechenden Vorzug des Werkes ansehen möchten. Wir hoffen uns dabei, wenn auch die Färbung etwas subjektiv sein mag, von dem Wesen seiner Anschauungen nicht zu weit zu entfernen. Dabei müssen wir auch diejenigen Teile wieder berücksichtigen, von denen wir eben bereits einen kurzen Abrifs gegeben haben.

4. Veronese glaubt die Bewegung aus der reinen Geometrie verbannen zu müssen; die Benutzung eines festen Körpers scheint ihm der Würde der Wissenschaft ganz zu widerstreiten. Dagegen erachtet er es für das angemessenste, sein ganzes System auf Hypothesen und Axiome zu gründen, die an sich rein willkürlich sind und nur der Bedingung genügen, dafs die späteren weder aus den vorangehenden folgen noch ihnen widerstreiten. Demnach mufs er zunächst eine arithmetische Grundlage schaffen; er untersucht also in der Einleitung die Zahl, die Grundform, sowie die unbegrenzt grofsen und unbegrenzt kleinen Segmente. In der Geometrie bildet ebenfalls der Begriff der Gleichheit den eigentlichen Grundbegriff, aber das Interesse wendet sich sogleich von Anfang an der Geraden als der geometrischen Grundfigur zu. Veronese setzt ihre Existenz voraus und nimmt an, dafs man jede gerade Strecke messen und dementsprechend Segmente verschiedener Geraden mit einander vergleichen kann. Auf die Gerade wird auch jede andere Figur zurückgeführt, indem je zwei Punkte derselben durch eine Gerade verbunden und das zwischen ihnen enthaltene Segment betrachtet wird; das neue, auf diese Weise erhaltene Gebilde wird als eine geradlinige Figur bezeichnet. Um demnach zwei verschiedene Figuren mit einander zu vergleichen, werden die aus ihnen hervorgehenden geradlinigen Figuren mit einander verglichen. Kann zwischen den einzelnen

Punkten der gegebenen Figuren eine eindeutige Zuordnung derartig hergestellt werden, dafs das von irgend zwei Punkten der ersten Figur begrenzte Segment jedesmal dem zwischen den entsprechenden Punkten der anderen Figur enthaltenen Segmente gleich ist, so sind die Figuren selbst gleich. Die Möglichkeit, auf diese Weise die Gleichheit zu bestimmen, ergiebt sich aus dem fünften Axiom, welches im wesentlichen darauf hinauskommt, den dritten Kongruenzsatz Euklids axiomatisch als richtig vorauszusetzen. Im Anschlufs daran wird zuerst das Strahlenpaar untersucht; darauf geht die Untersuchung zum Strahlenbüschel und von da zur Ebene über; die aufgestellten Principien gestatten leicht, die Gleichheit beliebiger ebener Figuren zu begründen. Der Übergang zum dreidimensionalen Raume läfst sich sehr einfach dadurch bewerkstelligen, dafs man von einem Punkte aus alle Geraden nach den Punkten einer Ebene zieht, die den gegebenen Punkt nicht enthält. In entsprechender Weise läfst sich der Raum von n Dimensionen gewinnen. Als besondere Vorzüge müssen wir die Einheitlichkeit der Behandlung und die Einheitlichkeit der Beweisführung rühmen: fast regelmäfsig wird das neue Gebilde erhalten, indem man zwischen den Punkten bereits bekannter Gebilde gerade Linien zieht, und der Beweis gründet sich fast regelmäfsig auf das fünfte Axiom.

5. Indessen gelangt man auf diesem Wege zunächst nur zu g l e i c h e n Figuren, also zu Gebilden, die in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen. Die Geometrie teilt aber derartige Gebilde in k o n g r u e n t e und s y m m e t r i s c h e Figuren ein: wenn zwei Figuren in allen Gröfsenbeziehungen übereinstimmen, so unterscheidet man noch, ob sie zur Deckung oder in symmetrische Lage gebracht werden können. Man sollte denken, es werde kaum möglich sein, auf dem angegebenen Wege, der wesentlich nur die Messung gerader Strecken benutzt, diesen Unterschied begründen zu können. Um so angenehmer wird man überrascht, zu sehen, wie leicht es Veronese wird, diese Schwierigkeit zu beseitigen. In der Ebene genügt folgende Betrachtung. Den Umfang eines Dreiecks ABC kann man in doppelter Weise beschreiben: entweder von A nach B, von B nach C und von da nach A zurück, oder in der umgekehrten Richtung von A nach C, von C nach B und von da nach A. Jedesmal ist es gleichgültig,

an welcher Stelle man die Bewegung beginnen läfst. Um die erstere Richtung zu kennzeichnen, bezeichnen wir das Dreieck durch die Folge ABC oder BCA oder CAB, während jede andere Permutation die andere Art des Umlaufs darstellt. Jeder Winkel des Dreiecks soll in demselben Sinne beschrieben werden, in dem man die gegenüberliegende Seite durchlaufen denkt. Dem zuerst angegebenen Sinne entspricht es daher, wenn der Winkel BAC in der Richtung von AB nach AC, der Winkel CBA in der Richtung von BC nach BA durchlaufen wird. Den so bestimmten Winkeln eines Dreiecks wird gleicher Sinn oder gleiche Richtung beigelegt. Die Richtung eines Winkels bestimmt aber auch die Richtung eines Büschels, dessen Scheitel mit dem des Winkels zusammenfällt. Diese beiden Festsetzungen erlauben, nachdem die Richtung eines Winkels gegeben ist, jedem anderen Winkel in der Ebene eine feste Richtung zuzuweisen. Man braucht nur ein beliebiges Dreieck zu benutzen, von dem zwei Eckpunkte in die Scheitel der beiden Winkel hineinfallen. Es zeigt sich, dafs die Zuordnung von der Wahl des dritten Eckpunktes unabhängig ist, und dafs zwei Winkel, welche zu demselben dritten Winkel gleiche Richtung haben, auch unter einander gleiche Richtung besitzen. Man kann daher auch von dem Sinn einer Ebene sprechen und denselben durch irgend einen Winkel bestimmen. Dem entsprechend werden gleiche ebene Figuren, welche denselben Sinn haben, kongruent genannt, während gleiche Figuren von entgegengesetztem Sinn symmetrisch heifsen.

In ähnlicher Weise verfährt Veronese im dreidimensionalen Raume. Zunächst wird auf dieselbe Weise, wie der Sinn einer Ebene durch einen ihrer Winkel, so auch der Sinn eines Strahlenbündels durch den Sinn eines seiner Keile (Winkel zwischen zwei Ebenen) bestimmt. Durch die Richtung, die man einem Keile eines Tetraeders beilegt, ist demnach die Richtung (der Sinn) für diejenigen beiden Strahlenbündel bestimmt, deren Scheitel in der Ache des Keils liegen. Wir sind somit genötigt, die Richtungen in den beiden Bündeln als gleich anzusehen. Ein einzelner Keil eines Tetraeders bestimmt hiernach die Richtungen der übrigen Keile des Tetraeders. Der doppelte Sinn, den man dementsprechend dem Tetraeder beilegen kann, hängt aber zusammen mit der Folge, in der man die vier Eckpunkte schreibt. So möge die Folge ABCD bezeichnen, dafs für den von A ausgehenden Strahlenbündel die Reihe B, C, D bestimmend ist, dafs also für den Keil, dessen Achse AB ist, die Ebene ABC längs der Kante CD in die Ebene ABD übergeführt werden soll; ebenso soll die Ebene ACD in die Lage ACB übergehen längs DB. Dieselbe Bezeichnung des Tetraeders verlangt, dafs für den Keil, dessen Achse BC ist, die Ebene BCD längs der Kante DA in BCA übergeht. Jede gerade Permutation der Buchstaben A, B, C, D führt auf dieselbe Richtung des Tetraeders.

Diese Festsetzung gestattet, nachdem ein Keil und seine Richtung gegeben ist, jedem anderen Keil eine gewisse Richtung beizulegen, die der gegebenen gleich sein soll. Wir können daher im dreidimensionalen Raume selbst zwei Richtungen unterscheiden und nennen wiederum gleiche Figuren von demselben Sinne kongruent, gleiche Figuren von entgegengesetztem Sinne symmetrisch.

6. Hiermit glauben wir die wichtigste Seite des Werkes genügend skizziert zu haben. Wie wir früher gesehen haben, haben die Alten die Kongruenz beliebiger geradliniger Figuren auf die von Dreiecken zurückgeführt und demnach die Bewegung für den weiteren Aufbau vielfach entbehrlich gemacht, nachdem sie zum Beweise des ersten Kongruenzsatzes benutzt war. Indessen wurde es bei der Untersuchung krummer Gebilde fast regelmäfsig wieder notwendig, auf die Bewegung direkt zurückzugehen. Auch konnte der Unterschied zwischen kongruenten und symmetrischen Gebilden, selbst bei Benutzung kongruenter Dreiecke, nicht begründet werden, ohne offen oder versteckt die Bewegung anzuwenden. Dem gegenüber bedeutet Veroneses Werk einen ganz aufserordentlichen Fortschritt, für den alle Mathematiker, die sich nicht blofs für die Resultate, sondern auch für die Grundlage ihrer Wissenschaft interessieren, dem Verfasser in hohem Grade dankbar sein werden. Nachdem die Theorie der geraden Linie begründet ist, gelingt es ohne Benutzung der Bewegung, die Geometrie einwurfsfrei aufzubauen und sogar die starre Bewegung zu beschreiben.

7. Trotz der hohen Bedeutung, die hiernach Veroneses Werk besitzt, mufs man zum mindesten Verwahrung dagegen einlegen, dafs der Verfasser an vielen Stellen sein System als das einzig berechtigte hinstellt. Selbst wenn es ihm gelungen wäre, von

seinen Principien aus fehlerlose Definitionen aufzustellen und wirklich strenge Beweise zu liefern, so würde sein System meines Erachtens eben dieselbe Bedeutung haben wie andere Systeme, die sich einer gleichen Strenge rühmen können. Wir wären also noch immer berechtigt, zu versuchen, ob es nicht gelingt, auf einem anderen Wege eine ebenso einwurfsfreie Grundlage zu schaffen. Nun aber giebt Veroneses Werk zu den schwersten Bedenken Veranlassung.

Ich will nicht nochmals auf die arithmetische Grundlage, die Einleitung, eingehen; ich mufs aber an erster Stelle hervorheben, dafs der Begriff der Gleichheit von Figuren ganz allgemein vorausgesetzt wird, ohne dafs dafür ein wirkliches Kennzeichen angegeben wird. Wenn es aber von vornherein klar ist, was es heifst, zwei Figuren sind im Veroneseschen Sinne gleich, so bedingt es schliefslich keinen bedeutenden Fortschritt mehr, dafs die Unterscheidung der gleichen Figuren in kongruente und symmetrische begründet werden kann. Auch müssen wir befürchten, dafs die Beweise manche Lücke aufweisen, wenn ein so komplizierter Begriff ohne jede nähere Bestimmung zur Grundlage des ganzen Systems gewählt wird. Nun denke man aber nicht, der Begriff der Gleichheit werde nur für die gerade Linie gefordert; nachdem er in dieser Beschränkung vorausgesetzt sei, führe der Verfasser mit Hilfe seiner geradlinigen Figuren darauf die Gleichheit beliebiger Gebilde zurück. Bei Veronese ist die Behauptung, zwischen gleichen Figuren könne ein eindeutiges Entsprechen von Punkten derart festgesetzt werden, dafs jedesmal das zwischen irgend zwei Punkten der einen Figur enthaltene geradlinige Segment dem zwischen den entsprechenden Punkten der anderen Figur enthaltenen Segment gleich sei, keine Definition, sondern ein Lehrsatz. Das entspricht auch der ganzen Anlage des Werkes und speciell der Definition der Geraden, welche mit dem Kreise und der Schraubenlinie als ein in der Position seiner Teile gleiches System von einer Dimension vorausgesetzt wird.

8. Sollen die Voraussetzungen, auf denen man die Geometrie aufbauen will, naturgemäfs sein, so müssen sie auf alle Raumformen führen, die mit der Erfahrung vereinbar sind. Das ist aber bei Veronese nicht der Fall. Um wenigstens neben der Euklidischen noch die Riemannsche Geometrie zu erhalten, führt

er seine sechste Hypothese ein, obwohl dieselbe, wie er selbst sagt, für die Euklidische Geometrie nur eine bloſse Übereinkunft ist. Aber hierdurch wird die Polarform des Riemannschen Raumes ausgeschlossen, die an sich gleiche Berechtigung mit der Riemannschen Raumform hat, wenn auch ihre Bedeutung für die Räume höherer Dimension geringer ist. Von der Lobatschewskyschen Geometrie sagt Veronese ausdrücklich, daſs sie mit seinen Hypothesen unvereinbar sei.

Wie steht es aber mit den Clifford-Kleinschen Raumformen? Man denke nicht etwa, daſs sie deshalb fehlen, weil die darauf bezügliche Mitteilung Kleins Veronese bei der Abfassung seines Werkes nicht bekannt sein konnte; die deutsche Ausgabe will auch die neueren Erscheinungen berücksichtigen und erwähnt in der That die Arbeit Kleins an mehreren Stellen. Die genannten Raumformen können eben in Veroneses System keinen Platz finden, schon aus dem Grunde nicht, weil von vornherein der Raum als Ganzes der Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Demnach ist jeder, der die Berechtigung dieser Raumformen anerkennt, genötigt, Veroneses System zu verwerfen.

Im ersten, zweiten und sechsten Abschnitte unseres Werkes (B. 1. S. 80—89, 142—162 und B. 2. S. 121—156) traten uns für einen begrenzten Teil des Raumes die parabolische, die elliptische und die hyperbolische Geometrie als gleichberechtigt entgegen. Zu demselben Ergebnis wird uns der folgende Abschnitt führen. Für Veronese sind nur der Euklidische und der Riemannsche Raum berechtigt, und zwar auch nur infolge einer rein äuſserlichen Festsetzung. Ein Band, welches sich uns von den verschiedensten Seiten her als natürlich, ja als notwendig darstellt, ist hier vollständig zerrissen — Beweis genug, daſs wir es nur mit künstlichen, nicht mit natürlichen Voraussetzungen zu thun haben.

Ich möchte sogar noch weiter gehen. Bei der engen Beziehung, die zwischen den eigentlichen Raumformen und denjenigen Wissenschaften besteht, die ich im uneigentlichen Sinne auch noch als Raumformen bezeichne (§ 11), kann ein Ausgangspunkt nur dann als natürlich angesehen werden, wenn er auch zu den letzteren führt. Das ist bei Veronese ganz ausgeschlossen; im Gegenteil, ihm ist es nicht einmal möglich, die projektive

Geometrie selbständig zu begründen. In derjenigen zweidimensionalen Raumform, die Helmholtz zuerst betrachtet hat und in der die Abstandsfunktion die Gestalt erhalten kann:

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\; e^{\alpha \operatorname{arctg} \frac{x-x'}{y-y'}}$$

gilt doch, soweit sich irgend übersehen läfst, der Begriff der Gleichheit in demselben Sinne wie in der Euklidischen Geometrie. Da aber hier die Veroneseschen Sätze über gleiche Figuren ihre Gültigkeit verlieren, so mufs der wahre Grund für diese auffallende Erscheinung ermittelt werden, wenn man nicht gezwungen sein will, diesen Sätzen jede Berechtigung abzusprechen.

9. Hiermit hängt folgendes Bedenken zusammen. Die Geometrie mufs, wie sie von den Bedürfnissen des Lebens ausgegangen ist, auch in ihren Grundlagen den Zusammenhang mit der Praxis nicht verleugnen, sie mufs mit anderen Worten auch von ihrer rein wissenschaftlichen Seite her die Grundlage für die Mechanik, die Astronomie und die Physik bilden. Bei Veronese ist aber der Zusammenhang mit diesen Wissenschaften ganz zerrissen; derselbe mufs künstlich durch neue Voraussetzungen hergestellt werden, die aufserhalb der geometrischen Wissenschaft liegen und deshalb geradezu als praktische Axiome bezeichnet werden. Veronese benutzt zu dem Zwecke die folgenden drei:

I. In dem Gebiet unserer aktuellen Beobachtungen gilt mit sehr grofser Annäherung die Eigenschaft, dafs durch einen Punkt nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Geraden geht.

II. Die Punkte einer beliebigen Figur können sich frei und unabhängig von einander bewegen, indem jeder eine intuitive Linie beschreibt, so jedoch, dafs die Lagen der Punkte der Figur eindeutig und in derselben Ordnung den successiven Lagen entsprechen, wobei nicht ausgeschlossen ist, dafs mehrere Punkte denselben Ort in einer successiven Lage einnehmen.

III. Der Anschauungsraum ist eine Figur von drei Dimensionen bezüglich seiner Punkte.

Aufserdem ist für die praktische Anwendung noch das folgende Axiom bestimmt:

Ein Körper kann sich ohne Deformation bewegen.

Statt auf diese Axiome näher einzugehen, begnüge ich mich mit folgender Bemerkung.

Der italienische Gelehrte meint, jede Rücksichtnahme auf die Erfahrung verletze die Würde der Geometrie als einer reinen Wissenschaft. Vielleicht darf man mit gröfserem Rechte sagen, der Ausgang von willkürlichen Annahmen sei einer Wissenschaft unwürdig. Jedenfalls kann aber die Aufstellung von Voraussetzungen, die in der That oder scheinbar den Charakter der Willkür an sich tragen, nur dann Interesse beanspruchen, wenn man von ihnen aus in voller Strenge zur Erfahrung gelangt. Aber alsdann mufs man erstens auf alle Möglichkeiten geführt werden, die mit der Erfahrung vereinbar sind, und zweitens mufs die Übereinstimmung nicht erst durch ein willkürliches Axiom postuliert werden.

§ 10.

Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.

Nachdem wir in den vorangehenden Paragraphen mehrere Versuche, eine genügende Grundlage der Geometrie zu schaffen, eingehend besprochen haben, möchten wir jetzt dazu übergehen, diejenigen Begriffe und Urteile anzugeben, die unseres Erachtens am natürlichsten zur Grundlage der Geometrie gewählt werden. Wir glauben jedoch einige Bemerkungen vorausschicken zu sollen.

Dafs die Geometrie gewisse Sätze unbewiesen voraussetzen und darauf den Beweis für ihre weiteren Sätze stützen müsse, ist von jeher anerkannt. Aber ganz Entsprechendes gilt für die Begriffe. Die Bildung von Begriffen geschieht in der Geometrie durch Definitionen, deren Wesen darin besteht, mehrere Begriffe zu einem einzigen neuen zu verbinden. Daraus folgt, dafs auch die Bildung von Definitionen einmal ihre Grenze findet, und dafs gewisse Begriffe, ohne selbst definiert werden zu können, allen Definitionen zu Grunde liegen; sie mögen als Grundbegriffe der Geometrie bezeichnet werden. Damit dieser Name einem System von Begriffen beigelegt werden kann, hat dasselbe somit drei Bedingungen zu genügen: erstens mufs jeder dieser Begriffe für die Geometrie notwendig sein, zweitens mufs das System nicht auf eine geringere Zahl von Begriffen zurückgeführt werden können, und drittens zur Gewinnung aller geometrischen Begriffe ausreichen.

Mit der Aufstellung der Grundbegriffe ist aber die Möglichkeit von Definitionen keineswegs gegeben. Bevor man mehrere Begriffe zu einer Definition zusammenstellt, muſs die Möglichkeit erkannt sein, sie überhaupt zu verbinden, und weil die Verbindung einen neuen Begriff ergeben soll, darf die Verbindung nicht notwendig sein. Ferner kann in vielen Fällen eine Definition nicht unmittelbar in voller Allgemeinheit aufgestellt werden, sondern sie benutzt einen Hilfsbegriff, der, wenigstens scheinbar, speciellen Charakter hat; in diesen Fällen ist es nötig, nachzuweisen, daſs der neue Begriff allgemeine Gültigkeit besitzt. So erkennen wir, daſs jede Definition bereits gewisse Urteile voraussetzt. Diejenigen Urteile (Sätze), welche nicht durch Beweise auf andere zurückführbar sind, bilden somit die Grundlage für die Definitionen und für die weiteren Urteile; es möge gestattet sein, sie als Grundsätze der Geometrie zu bezeichnen.

Als Grundbegriffe der Geometrie stellen wir die folgenden auf:

Feste Körper, Teile eines Körpers, Raum, Teile eines Raumes, einen Raum einnehmen (decken), Zeit, Ruhe, Bewegung.

Wir brauchen nicht nochmals hervorzuheben, daſs wir keineswegs behaupten wollen, der Zugang zur Geometrie sei nur von diesen Begriffen aus möglich; unsere Ansicht geht nur dahin, daſs diese Begriffe gut geeignet sind, zur Grundlage der Geometrie zu dienen. Im einzelnen bemerken wir noch folgendes.

Über die Bewegung haben wir im fünften Abschnitt eingehend gehandelt; mit ihr ist ihr Gegensatz, die Ruhe, zugleich verlangt.

Setzen wir den Begriff der Bewegung, so kann auch der Zeitbegriff nicht entbehrt werden. Die Bewegung selbst verlangt aber einen bewegenden Gegenstand. Da das der unbewegliche Raum nicht sein kann, so müssen wir mit der Bewegung auch den Körper unter die Grundbegriffe aufnehmen. Diejenige Vergleichung von Raumteilen, welche in der Geometrie benutzt wird, kann aber nicht durch Bewegung eines luftförmigen oder flüssigen Körpers, sondern nur durch die eines absolut starren Körpers vermittelt werden. Da die Notwendigkeit der Teilung von jeher allgemein anerkannt ist, bedürfen die weiter aufgestellten Begriffe keine Rechtfertigung.

Dabei müssen wir jedoch zugestehen, dafs einige dieser Begriffe für unsere Wissenschaft mehr den Charakter von Hilfsbegriffen haben. Das gilt vor allem von der Zeit, betreffs deren es der Geometrie nur auf das »zugleich, vorher und nachher« ankommen kann. Auch der feste Körper wird nicht an sich gebraucht, sondern nur insofern, als mit seiner Hilfe weitere Begriffe hergeleitet werden.

Die aufgestellten Begriffe dürfen nur dann als Grundbegriffe bezeichnet werden, wenn sie nicht auf eine geringere Zahl von Begriffen zurückgeführt werden können. Darüber in eingehende Erörterungen einzugehen, wird wohl nicht nötig sein.

Endlich mufs gezeigt werden, dafs die Begriffe vollständig genügen. Dieser Nachweis kann erst durch den wirklichen Aufbau der Wissenschaft geführt werden, und der ist zur Zeit noch nicht möglich.

Wir wenden uns jetzt den Grundsätzen der Geometrie zu. An erster Stelle beachten wir die Ausdehnung und die Undurchdringlichkeit der Körper und fassen diese beiden Eigenschaften in einem Grundsatze zusammen:

I. Jeder Körper nimmt zu jeder Zeit einen Raum ein; den von einem Körper eingenommenen Raum kann nicht gleichzeitig ein anderer Körper decken.

Die Geometrie bedarf der unbegrenzten Teilung eines jeden Körpers. Aber die geometrische Teilung ist von der mechanischen wesentlich verschieden, indem die letztere die Teile von einander trennt, während bei der geometrischen Teilung die Teile als dem Ganzen anhaftend gedacht werden können. Wenn z. B. zwei Lagen desselben Körpers einen Raumteil gemeinschaftlich haben, in einem anderen aber nicht übereinstimmen, so ist dadurch geometrisch eine Teilung des Körpers ausgeführt; man unterscheidet denjenigen Teil des Körpers, dessen zweite Lage von dem Körper in der ersten Lage noch mit eingenommen wurde, von demjenigen Teile, dessen zweite Lage der ersten Lage des Körpers nicht angehört. Demnach ist die Forderung einer unbegrenzten geometrischen Teilung mit der physikalischen Annahme von Molekeln und Atomen ganz vereinbar.

II. Jeder Raum (Körper) kann geteilt werden; jeder Teil eines Raumes (Körpers) ist wiederum ein Raum

(Körper); ist A ein Teil von B und B ein Teil von C, so ist auch A ein Teil von C, wo man unter A, B, C sowohl Räume als Körper verstehen kann.

Die Unabhängigkeit des Raumes von dem ihn einnehmenden Körper führt zu folgendem Grundsatze:

III. Jeder Körper kann bewegt werden; wenn ein Körper zu einer Zeit den früheren Raum eines zweiten Körpers deckt, so kann er zur Deckung mit jedem Raume gebracht werden, welchen der zweite zu irgend einer Zeit einnimmt.

Dieser Grundsatz erlaubt die Definition der Kongruenz für Räume und für Körper, indem er diesen Begriff von der Zeit, und für Räume von dem benutzten Körper, dagegen für Körper von dem gerade gedeckten Raume unabhängig macht. So werden wir zwei Räume als kongruent bezeichnen, wenn derselbe Körper beide Räume decken kann; ebenso können kongruente Körper zur Deckung desselben Raumes gebracht werden. Der von einem Körper eingenommene Raum wird mit Rücksicht auf die Beweglichkeit des Körpers als seine Lage bezeichnet. Diesem Grundsatz entsprechend sieht die Geometrie ganz von dem Stoffe der Körper ab; nur in diesem Sinne darf der zuweilen gebrauchte Ausdruck verstanden werden, die Geometrie betrachte den Raum als leer.

IV. Jeder Körper läfst sich so bewegen, dafs ein Teil desselben mit einem Teile eines beliebigen Raumes zur Deckung gelangt.

M sei der gegebene Raum; a sei der bewegte Körper, A der Raum, welchen er nach der in diesem Grundsatz geforderten Bewegung deckt; dann sind vier Fälle möglich: A und M sind vollständig identisch, oder A ist ein Teil von M, oder M ist ein Teil von A, oder viertens A und M haben einen Teil gemeinschaftlich, während ein Teil von A nicht zu M und ein Teil von M nicht zu A gehört. Wenn einer dieser vier Fälle angenommen wird, ohne dafs entschieden werden soll, welcher es ist, wollen wir sagen, der Körper a sei mit dem Raume M in teilweiser Deckung.

A sei eine Lage eines Körpers a, welche mit einem Raume keinen Teil gemeinschaftlich hat; dagegen soll a auch eine Lage

A_1 erhalten können, welche ganz ein Teil von M ist; dann giebt es für denselben Körper a auch eine Lage A' von der Beschaffenheit, dafs ein Teil von A dem Raume M angehört, ein anderer Teil von A aber nicht; bei jeder Bewegung, welche den Körper a von A nach A_1 überführt, erlangt er eine Lage, wie sie für A' angegeben wurde. Diesem Satze geben wir folgenden Ausspruch:

V. Wenn ein Körper vor seiner Bewegung keinen Teil mit einem Raume gemeinschaftlich hat, aber nach derselben diesem Raume ganz angehört, so erlangt er bei seiner Bewegung eine Lage, in welcher nur ein Teil von ihm dem Raume angehört.

Der Raum A sei beliebig in die beiden Teile M und N zerlegt; dann läfst sich immer ein Körper k bestimmen und mit demselben eine Bewegung ausführen, welche folgenden Bedingungen genügt: bei Beginn der Bewegung soll k einen Teil von M, am Ende derselben einen Teil von N decken, und während der Bewegung soll k und jeder Teil von k immer dem Raum angehören. Dies liefert den Grundsatz:

VI. Wenn ein (zusammenhangender) Raum A in irgend zwei Teile M und N zerlegt ist, so läfst sich immer ein Körper k bestimmen, welcher so bewegt werden kann, dafs während der Bewegung kein Teil des Körpers den Raum A verläfst, und k bei Beginn der Bewegung einen Teil von M und am Schlufs derselben einen Teil von N deckt.

Wenn ein Raum A in zwei Teile M und N zerlegt ist, so nennen wir diese beiden Teile zusammenhangend. Überhaupt bezeichnen wir zwei Räume, die keinen Teil gemeinschaftlich haben, als zusammenhangend, wenn sie nach dem vorangehenden Grundsatze als die Teile eines einzigen Raumes betrachtet werden können.

VII. Sobald ein Teil a eines festen Körpers wieder in eine solche Lage kommt, dafs jeder Teil von a in teilweise Deckung mit seiner Anfangslage gelangt, so erhält jeder Teil des Körpers seine Anfangslage wieder.

Hiernach nimmt der Begriff der Lage eine genauere Bedeutung an, als demselben durch den dritten Grundsatz gegeben wurde.

Zwei Lagen desselben Körpers sind nur dann als identisch zu bezeichnen, wenn nicht nur der Körper als Ganzes, sondern auch jeder beliebige Teil desselben beidemal denselben Raum deckt.

Wir haben jetzt nachzuweisen, dafs die aufgestellten Grundsätze von einander unabhängig sind. Dafs keiner der späteren in einem früheren enthalten ist, ergiebt sich daraus, dafs die früheren Sätze auch für solche Vorstellungen gelten, welche mit den folgenden nicht vereinbar sind. »Einen Raum einnehmen« ist verbunden mit dem »Bestehen aus einem Stoffe«; ebenso zerlegt die Teilung eines Körpers auch den Stoff; aber die Möglichkeit, denselben Raum zu decken, erfordert nicht die Gleichartigkeit des Stoffes; daher folgt der Grundsatz III nicht aus den Sätzen I und II. Im zweiten Satze könnte »teilen« durch »zusammenfügen« und »einen Teil bilden« durch »in sich fassen« ersetzt werden; aber diese Vorstellung fällt bei IV weg. Während III und IV nur das Ergebnis einer Bewegung betrachten, stellt V den Verlauf derselben dar, indem ihr die Stetigkeit beigelegt wird. Alle diese Sätze bleiben bestehen, wenn man einen einzelnen Körper durch eine Zusammenstellung mehrerer Körper und einen Raum durch eine Zusammenstellung getrennter Räume ersetzt, eine Vorstellung, welche durch VI ausgeschlossen wird. Ebenso kann man mit den sechs ersten Sätzen die Vorstellung von flüssigen und luftförmigen Körpern verbinden; erst VII fügt die feste Verbindung der einzelnen Teile hinzu. Umgekehrt sieht man aber auch, dafs die ersten Grundsätze nicht durch die späteren überflüssig gemacht werden; ich will den Nachweis nicht im einzelnen durchführen, sondern nur bemerken, dafs die späteren Sätze fast immer einen von den früheren bereits voraussetzen.

Ob aber diese Sätze für den Aufbau hinreichend sind, möchte ich jetzt nicht mehr fest behaupten; im Gegenteil will es mir in der letzten Zeit scheinen, der Begriff der Stetigkeit müsse schärfer entwickelt werden, als es hier durch den fünften Grundsatz geschieht. Indessen ist es mir bisher nicht gelungen, hierüber zur Klarheit zu kommen; noch weniger kann ich bereits jetzt eine etwa vorhandene Lücke in genügender Weise ausfüllen.

§ 11.

Die allgemeinen Raumformen.

1. Daſs die aufgestellten Begriffe und Urteile, die wir als Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie bezeichnen, für die im ersten Bande behandelten dreidimensionalen Raumformen Gültigkeit besitzen, braucht gar nicht erwähnt zu werden. Wir können aber auch leicht zeigen, daſs diese Begriffe und Urteile, wenn auch nicht die mit ihnen verbundenen Vorstellungen, für die mehrdimensionalen Raumformen gelten. Im Anschluſs an die im ersten Bande (S. 191—205) durchgeführte analytische Behandlung des n-dimensionalen Euklidischen Raumes bezeichnen wir wieder die Gesamtheit der Wertsysteme $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, wobei die einzelnen Veränderlichen alle reellen Werte annehmen können, als den Raum und nennen ein stetiges endliches Gebiet dieser Mannigfaltigkeit einen Raumteil; dabei setzen wir voraus, daſs sich die in Betracht gezogenen Wertsysteme nicht durch eine geringere Zahl von Variabeln darstellen lassen. Demnach bezeichnet hier das Wort Raumteil dasselbe, was wir im vorigen Paragraphen kurz Raum genannt haben.

Ein Gebiet von Wertsystemen $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, welches ebenfalls endlich und stetig ist und dessen Bestimmungsgröſsen nicht durch stetige eindeutige Beziehungen auf eine geringere Zahl von Veränderlichen zurückgeführt werden können, möge ein Körper genannt werden. Um den Begriff der Deckung einzuführen, sollen zu n willkürlichen reellen Gröſsen $b_1 \ldots b_n$ weitere n^2 Gröſsen $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots n$ hinzugenommen werden, welche den Bedingungen genügen:

$$(1) \quad \sum_{\varrho} a_{\iota\varrho}^2 = 1, \ \sum_{\varrho} a_{\iota\varrho} a_{\varkappa\varrho} = 0 \text{ für } \iota \gtrless \varkappa,$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Lassen sich bei dieser Festsetzung die Gröſsen b_ι und $a_{\iota\varkappa}$ so wählen, daſs jedem Wertsysteme (x) des Raumteiles A ein Wertsystem (y) des Körpers k vermittelst der Gleichungen:

$$(3) \quad x_\iota = \sum_{\varrho} a_{\iota\varrho} y_\varrho + b_\iota \qquad (\iota = 1 \ldots n)$$

entspricht, so sagen wir, der Körper k decke den Raumteil A. Wenn aber in den Gleichungen (3) die Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ und b_ι stetige eindeutige Funktionen einer veränderlichen Gröfse t (für $t_0 < t < t_1$) sind, welche den Bedingungen (1) und (2) genügen, so soll diese analytische Operation die Bewegung des Körpers k vertreten, falls wir die Wertsysteme (y) auf das diesem Körper entsprechende Gebiet beschränken. Dies vorausgesetzt, wird, wie man leicht sieht, den aufgestellten Grundsätzen genügt; mit anderen Worten: Unsere Grundbegriffe und Grundsätze behalten ihre Gültigkeit in den Euklidischen Raumformen von beliebig vielen Dimensionen.

2. Um dasselbe für eine n-dimensionale Kleinsche Raumform (für die Polarform des Riemannschen Raumes) zu zeigen, setzen wir etwa fest, dafs die n veränderlichen Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ nur solche reelle Werte annehmen, für welche

$$(4) \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1$$

ist. Zur Darstellung eines Raumteiles werden wieder die Variabeln $x_1 \ldots x_n$, für einen Körper die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ benutzt. Entsprechend den Entwicklungen des ersten Bandes (S. 205–210), in denen wir k^2 den Wert eins beilegen, führen wir $(n+1)^2$ Gröfsen $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n$ ein und verlangen, dafs zwischen ihnen die Beziehungen bestehen:

$$(5) \quad \sum_{\varrho=0}^{n} a_{\iota\varrho}\, a_{\varkappa\varrho} = \delta_{\iota\varkappa} \qquad (= 1 \text{ oder } = 0)$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{00} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Dadurch werden die Gröfsen $a_{\iota\varkappa}$ von $\frac{n\,(n+1)}{2}$ willkürlichen Gröfsen abhängig gemacht. Der Kürze wegen führen wir noch die Gröfse y_0 ein durch die Festsetzung:

$$(7) \quad y_0 = \sqrt{1 - y_1^2 - \ldots - y_n^2}.$$

Kann man jetzt die den Bedingungen (5) und (6) genügenden Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ so bestimmen, dafs nach passender Wahl des Vorzeichens von y_0 jedem Wertsystem (x) des Raumteiles A ein Wertsystem (y) des Körpers vermittelst der n Gleichungen:

$$(8) \quad x_\iota = \sum_{\varrho=0}^{n} a_{\iota\varrho} y_\varrho \qquad (\iota = 1 \ldots n)$$

zugeordnet wird, so sagen wir, der Körper k decke den Raumteil A. Man kann aber auch die Gröfsen $a_{\iota\varkappa}$ von einer veränderlichen Gröfse t abhängig machen und dadurch wiederum die Bewegung von k einführen.

In ähnlicher Weise verfahren wir für eine Lobatschewskysche Raumform. Neben den unbeschränkt veränderlichen reellen Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ und den Gröfsen $y_1 \ldots y_n$ benutzen wir noch die Gröfse $y_0 = \sqrt{1 + y_1^2 + \ldots + y_n^2}$, wo der Wurzel ihr positiver Wert beizulegen ist. An den Bedingungen (5) ist eine kleine Änderung anzubringen; im übrigen bleiben die vorigen Festsetzungen ungeändert.

Für den Riemannschen Raum ist es am einfachsten, zwischen $n + 1$ veränderlichen Gröfsen die früher benutzte Gleichung zweiten Grades (B. 1. S. 206) bestehen zu lassen.

3. Wir können aber unsere Grundbegriffe und Grundsätze auch auf die allgemeine Projektivität anwenden. Zu dem Ende legen wir $n + 1$ veränderliche Gröfsen $x_0, x_1 \ldots x_n$ zu Grunde, denen wir gestatten, alle reellen endlichen Werte mit Ausnahme des Wertsystems $(0, 0 \ldots 0)$ anzunehmen. Jedes einzelne Wertsystem bestimmen wir durch die Verhältnisse dieser Gröfsen; d. h. wir betrachten alle Wertsysteme als identisch, welche aus einem gegebenen, durch Multiplikation mit einer beliebigen, von null verschiedenen Zahl erhalten werden können. Zur Darstellung eines Raumteiles benutzen wir die Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$, für einen Körper in entsprechender Weise die Variabeln $y_0, y_1 \ldots y_n$, indem wir auch bei den letzteren nur die Verhältnisse in Betracht ziehen. Wir sagen jetzt, der eine gewisse endliche und stetige Mannigfaltigkeit von Wertsystemen (y) enthaltende Körper k decke einen Raumteil A, wenn die dem Raumteile A angehörenden Wertsysteme (x) mit den Wertsystemen (y) des Körpers durch die Gleichungen verbunden sind:

$$(9) \quad x_\alpha = \sum_{\varrho=0}^{n} a_{\alpha\varrho} y_\varrho, \qquad (\alpha = 0, 1 \ldots 1)$$

wo die $(n + 1)^2$ Koefficienten $a_{\alpha\varrho}$ beliebige endliche Gröfsen sind. Auch wird die Bewegung in entsprechender Weise eingeführt. Wie man sieht, ist in diesem Falle die Gesamtheit der Bewegungen von $n(n+2)$ willkürlichen Gröfsen abhängig.

4. Indem Plücker neben dem Punkte auch die Ebene und die Gerade als Element in die Geometrie einführte, hat er ein Mittel geschaffen, welches zur Förderung der geometrischen Wissenschaft wesentlich beigetragen hat. Manche Partieen, welche vorher nur auf einem schwierigen und künstlichen Wege begründet werden konnten, lassen sich vermittelst der neuen Ideen sehr einfach und natürlich beweisen. Dazu sind ganz neue wichtige Partieen getreten, deren Behandlung bei dem früheren Standpunkte fast unmöglich sein dürfte. Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Grundlagen bleiben aber auch in Gültigkeit, wenn wir die Ebene oder die Gerade als Raumelement zu Grunde legen, und wir möchten hierin erst den vollen Abschlufs der durch Plücker geschaffenen Auffassung erblicken. Um dies zu begründen, können wir auf dem rein geometrischen Boden verbleiben; es sei aber gestattet, wie bei den besprochenen Beispielen den Nachweis durch die Analysis zu erbringen.

Für den Euklidischen Raum gehen wir von vier Variabeln u_0, u_1, u_2, u_3 aus, indem wir festsetzen, dafs jedesmal

$$(9) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

sein soll. Zwei Wertsysteme (u_0, u_1, u_2, u_3) und $(-u_0, -u_1, -u_2, -u_3)$, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, betrachten wir als identisch. Ein Raumteil wird wieder durch eine endliche stetige Mannigfaltigkeit der Wertsysteme (u) bestimmt. Für einen Körper benutzen wir die Veränderlichen v_0, v_1, v_2, v_3, indem wir zwischen den drei letzten die der Gleichung (9) entsprechende Beziehung bestehen lassen. Jetzt sagen wir wieder, ein Körper k decke einen Raumteil A, wenn jedem Wertsysteme (v) des Körpers k ein Wertsystem (u) von A durch die Gleichungen zugeordnet ist:

$$\begin{aligned}
u_0 &= v_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \\
u_1 &= a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3 \\
u_2 &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3 \\
u_3 &= a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + a_{33} v_3,
\end{aligned}$$

wo die Koefficienten b_1, b_2, b_3 ganz willkürlich sind und zwischen den Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ diejenigen Bedingungen bestehen, welche sich aus den Gleichungen (1) und (2) für $n = 3$ ergeben. Die

Bewegung wird wieder in derselben Weise eingeführt wie früher. Dadurch sind die Grundbegriffe auf die neue Anschauung übertragen; daſs aber auch die Grundsätze richtig bleiben, bedarf keiner Erwähnung. Die ersten Sätze der Geometrie selbst erleiden aber eine bedeutende Änderung. Wird der Raum so bewegt, daſs eine Ebene in sich verschoben wird, so bleiben auch alle zu ihr parallelen Ebenen in Deckung mit ihrer Anfangslage. Demnach können wir sagen: Betrachten wir im Euklidischen Raume die Ebene als Element, so bleiben bei der Ruhe eines Elementes auch die sämtlichen Elemente einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Ruhe; die Stelle des Abstandes zweier Punkte vertritt bei zwei parallelen Ebenen ihr Abstand, bei zwei sich schneidenden Ebenen ihr Winkel.

Wenn wir in der Riemannschen Raumform die Ebene als Element auffassen, so gelangen wir, wie wir bereits im ersten Bande (S. 69) bewiesen haben, zu einer Geometrie, die mit der Kleinschen identisch ist; aus diesem Grunde haben wir die letztere die Polarform des Riemannschen Raumes genannt. Sehen wir aber in einer Kleinschen Raumform die Ebene als Element an, so erhalten wir wieder eine Kleinsche Raumform.

5. Den Nachweis, daſs man die Gerade als Raumelement betrachten darf, ohne daſs unsere Grundbegriffe und Grundsätze ihre Gültigkeit verlieren, brauchen wir wohl nicht zu führen. Wir möchten nur auf die Verschiedenheit hinweisen, welche zwischen der gewöhnlichen Geometrie des Punktes und der der Geraden besteht. Zunächst bildet die Gesamtheit der Geraden des Raumes nicht mehr eine dreifach, sondern eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Ferner hat man zwischen zwei Elementen jetzt jedesmal zwei feste Beziehungen, den Abstand und den Winkel. Mit jedem Elemente ist eine (aus den parallelen Geraden bestehende) zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Elementen verbunden, deren Gesamtheit in sich verbleibt, wenn eines ihrer Elemente in Ruhe verbleibt (wenn eine ihrer Geraden in sich verschoben wird). Bei der Ruhe eines Elementes beschreibt jedes Element, das dem genannten Gebilde angehört, nur eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit; dagegen kann jedes andere Element in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bewegt werden. Sobald zwei Elemente in Ruhe gehalten werden,

die nicht beide demselben Gebilde der besonderen Art angehören, ist keine Bewegung möglich.

6. Aus den angeführten Beispielen, die noch bedeutend vermehrt werden können, läfst sich eine wichtige Folgerung ziehen. Gleichwie wir im ersten Abschnitt, von den Voraussetzungen Euklids ausgehend, zu verschiedenen Möglichkeiten gelangt sind, die unter einander gleiche Berechtigung haben, ebenso werden sich auch, wenn wir aus unseren Grundsätzen weitere Folgerungen herleiten, sehr viele einzelne Systeme ergeben, die sämtlich mit unserer Grundlage vereinbar sind, aber in ihrem weiteren Ausbau wesentlich von einander abweichen. Es liegt nahe, allen diesen Systemen einen gemeinsamen Namen beizulegen und jedes unter ihnen eine Raumform im allgemeinsten Sinne oder auch eine uneigentliche Raumform zu nennen. Ein gemeinsamer Name ist deshalb notwendig, weil alle diese Wissenszweige auf derselben Grundlage aufgebaut sind und in der Forschungsmethode übereinstimmen. Der Name selbst mufs aber von dem wichtigsten System hergenommen werden, das zu ihrer Gruppe gehört. Er ist aber auch berechtigt, weil die einzelnen Zweige fast ausnahmslos zur Theorie des Raumes in irgend einer Beziehung stehen: manche werden gewonnen, indem man die Kongruenz durch gewisse projektive Verwandtschaften ersetzt; bei anderen ist der Raum selbst das wahre Objekt der Untersuchung, nur wird statt des Punktes ein anderes Gebilde als Element zu Grunde gelegt; bei anderen erweitert man die Zahl der Dimensionen, betrachtet also Mannigfaltigkeiten, in denen gewisse Grenzgebilde ganz die Eigenschaften des Raumes haben. Diese Bemerkungen mögen vorläufig genügen; der folgende Abschnitt wird die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Raumformen noch mehr hervortreten lassen.

7. Die enge Beziehung, in welcher die Theorie des Raumes zu zahlreichen weiteren Zweigen des Wissens steht, drängt uns die Überzeugung auf, dafs eine strenge und natürliche Begründung von den angeführten Grundsätzen aus grofsen Schwierigkeiten unterliegen mufs. Wir müssen es uns deshalb versagen, hier näher auf die allgemeinen Raumformen einzugehen, um die Stellung zu erforschen, welche der Raum selbst unter den verwandten Wissenszweigen einnimmt. Es sei jedoch gestattet, die Definitionen

der Grenzgebilde in aller Kürze mitzuteilen; daraus wird hervorgehen, daſs an den Darlegungen des § 5 keine wesentliche Änderung angebracht zu werden braucht.

8. Zerlegen wir einen Raum A in zwei Teile B und C, so läſst sich jeder Körper k in gleichzeitige teilweise Deckung mit B und C bringen. Für unsern Zweck genügt es, anzunehmen, daſs jeder Teil von k in der geforderten Lage dem Raume A angehört. Sollte das nämlich nicht der Fall sein, so können wir erreichen, daſs ein Teil k′ von k ganz im Raume A liegt und zugleich in teilweiser Deckung mit B und C ist; dann betrachte man statt des Körpers k den Körper k′. Mit diesem Körper nehme man weitere Zerlegungen vor. Eine solche könnte darin bestehen, daſs wir den dem Raume B angehörenden Teil von k als den einen und den dem Raume C angehörenden als den anderen Teil betrachten. Bei jeder anderen Teilung wird man mindestens einen Teil erhalten, welcher mit B und C zugleich in teilweiser Deckung liegt. Aus diesem Grunde sagen wir, der Körper k liege auf der Grenze von B und C. Ebenso sagen wir, zwei Räume B und C grenzten an einander oder hingen mit einander zusammen, wenn sie selbst keinen Teil gemeinschaftlich haben, es aber einen Raumteil A giebt, von dem jeder Teil entweder dem Raume B oder dem Raume C oder beiden angehört, mit anderen Worten, wenn es einen Raum A giebt, der in die beiden Teile B und C zerlegt werden kann.

Von B können wir solche Teile abtrennen, welche nicht mit C zusammenhangen; ebenso können wir von C solche Teile entfernt denken, die nicht an B grenzen. So sei B in die beiden Teile B′ und B″ derartig zerlegt, daſs B″ nicht an C grenzt, und C bestehe aus den Teilen C′ und C″, von denen der letztere keinen Zusammenhang mit B hat. Jeder Körper, der auf der Grenze von B und C liegt, ist auch mit B′ und C′ in gleichzeitiger teilweiser Deckung; die Grenze der Raumteile B und C ist also mit der Grenze der Raumteile B′ und C′ identisch.

Während aber die Raumteile B und C einen einzigen Raum bilden, ist es möglich, daſs bei der angegebenen Operation der von A übrig bleibende Teil in mehrere getrennte Raumteile zerfällt. Geschieht dies, so wird auch B′ in mehrerere Teile B_1', B_2' ..., C′ in die gleiche Anzahl Teile C_1', C_2' ... derartig zerfallen, daſs jedesmal B_i' und C_i' die beiden Teile eines einzigen Raumes sind und es auch bleiben, wenn man von jedem unter ihnen Gebiete abtrennt, welche mit dem andern nicht in Zusammenhang stehen. Wir sagen jetzt, die Grenze (B_i', C_i') bestehe aus einem einzigen Grenzgebilde erster Ordnung. Die Grenze der Raumteile B und C besteht demnach aus einem einzigen Grenzgebilde, wenn

a) die Räume B und C keinen Teil gemeinschaftlich haben,

b) wenn sie einen einzigen Raum bilden, und

c) wenn auch immer ein einziger Raum übrig bleibt, indem man von jedem der beiden Räume solche Gebiete abtrennt, welche mit dem andern keinen Zusammenhang haben.

Dieselbe Teilung, welche hier für einen Raum durchgeführt ist, läſst sich auch mit einem Körper vornehmen; wir können daher die Definition der Grenzgebilde erster Ordnung auf Körper übertragen, dementsprechend auch ein solches Grenzgebilde bewegen und den Begriff der Kongruenz auch für Grenzgebilde gelten lassen.

9. Wenn durch die beiden Räume B und C ein einziges Grenzgebilde erster Ordnung (B, C) bestimmt wird, so sind mit unseren Voraussetzungen zwei einander ausschlieſsende Möglichkeiten vereinbar: entweder wird jede Teilung von C nur einen einzigen Teil ergeben, welcher mit B in Zusammenhang steht, oder man kann C so in zwei Teile zerlegen, daſs jeder mit B einen zusammenhangenden Teil bildet. Im ersten Falle wird jeder Körper, welcher auf dem Grenzgebilde liegt, in teilweiser Deckung sein mit dem Raume, den irgend ein anderer Körper bei einer früheren derartigen Lage eingenommen hat. Demgemäſs fallen zwei Räume, die dem Grenzgebilde (B, C) angehören, jedesmal zum Teil zusammen; das Grenzgebilde kann also nicht mehr geteilt werden. Durch Vermittlung eines bewegten Körpers ergiebt sich, daſs jeder Raum, in den ein Körper gebracht werden kann, dieselbe Eigenschaft hat; der Raumform, der ein solcher Raum als Teil angehört, legen wir in diesem Falle eine einzige Dimension bei.

Läſst sich, indem man wieder unter (B, C) ein Grenzgebilde erster Ordnung versteht, B in zwei Teile D und E zerlegen, welche beide mit C zusammenhangen, so wird dadurch das Grenzgebilde (B, C) in die beiden Grenzgebilde (C, D) und (C, E) zerlegt. Um dementsprechend den Begriff der Teilung auf Grenzgebilde erster Ordnung zu übertragen, stellen wir folgende Definitionen auf: Ein Grenzgebilde ϱ ist ein Teil des Grenzgebildes π, wenn jeder Körper, der dem ersten angehört, auch auf dem zweiten liegt, während man einem Körper auch eine Lage geben kann, in der er auf dem Gebilde π, aber nicht auf dem Gebilde ϱ liegt; ein Grenzgebilde π ist in die zwei Teile ϱ und σ zerlegt, wenn jeder Körper, der auf π liegt, entweder dem Teile ϱ oder dem Teile σ oder den beiden Teilen ϱ und σ zugleich angehört, ohne dafs ϱ und σ selbst einen Teil gemeinschaftlich haben; zwei Grenzgebilde erster Ordnung grenzen an einander, wenn sie als die beiden Teile eines einzigen Grenzgebildes erster Ordnung betrachtet werden können. In diesem Falle sagen wir auch, sie hätten eine gegenseitige Grenze, und wir lassen einen Körper dieser Grenze angehören, wenn er nicht nur auf beiden Gebilden liegt, sondern auch jede Teilung desselben mindestens einen Teil liefert, der beiden Gebilden gleichzeitig angehört. Wiederum trennen wir von jedem der an einander grenzenden Gebilde solche Teile ab, welche mit dem andern keinen Zusammenhang haben; der übrig bleibende Teil wird dann entweder stets ein einziges Grenzgebilde erster Ordnung bilden oder in mehrere derartige Gebilde zerfallen. Im ersten Falle nennen wir ihre Grenze ein Grenzgebilde zweiter Ordnung.

10. Wird ein Grenzgebilde zweiter Ordnung (α, β) durch zwei mit einander zusammenhangende Grenzgebilde erster Ordnung α und β bestimmt, so wird entweder jede Teilung von α nur einen Teil ergeben, der mit β zusammenhängt, oder man kann α so zerlegen, dafs jeder Teil an β grenzt. Im ersten Falle müssen alle Räume, mit denen das Gebilde (α, β) in teilweiser Deckung ist, selbst in teilweiser Deckung sein; eine Teilung des Grenzgebildes (α, β) und damit, wie man leicht zeigt, eines jeden Grenzgebildes zweiter Ordnung ist nicht möglich; wir legen daher der Raumform, der das Gebilde angehört, zwei Dimensionen bei. Wenn aber verschiedene Körper gleichzeitig auf der gegenseitigen Grenze von α und β liegen können, so läfst sich das Gebilde (α, β) noch teilen. Wir können die früheren Definitionen wörtlich auf diese Gebilde übertragen und gelangen zu der Grenze

zweier Grenzgebilde zweiter Ordnung und damit zum Grenzgebilde dritter Ordnung.

In derselben Weise können wir aber unbegrenzt fortfahren. Dabei dürfen wir jedoch jedesmal nur Gebilde gleicher Ordnung zusammenstellen; nur von solchen Gebilden wollen wir sagen, dafs sie Teile eines einzigen Gebildes sind und dafs sie an einander grenzen. Wir sagen, eine Raumform habe n Dimensionen, wenn in ihr Grenzgebilde erster bis n^{ter} Ordnung, aber nicht solche von einer höhern Ordnung enthalten sind, wenn also das Grenzgebilde n^{ter} Ordnung unteilbar ist. In diesem Falle legen wir auch dem Grenzgebilde m^{ter} Ordnung $n - m$ Dimensionen bei.

11. Vielleicht wäre es angebracht, die vorstehenden Entwicklungen so umzugestalten, dafs von der Teilung der Grenzgebilde kein Gebrauch gemacht wird. Indessen tritt der Weg, auf dem sich dies Ziel erreichen läfst, in § 5 genugsam hervor. Wir möchten uns daher damit begnügen, noch in einer zweiten Weise anzugeben, was es heifst, der Raum habe n Dimensionen. Zu dem Ende treffen wir folgende Festsetzung:

»Wenn von $n + 1$ Raumteilen jeder mit jedem anderen zusammenhängt und dieser Zusammenhang bestehen bleibt, nachdem von jedem Teile solche Gebiete beliebig abgetrennt sind, welche mit einem anderen nicht zusammenhangen, so bezeichnet man die gröfste Zahl n, die in dieser Hinsicht möglich ist, als die Zahl der Dimensionen.«

Wir zerlegen also irgend einen Raumteil in zwei Teile und untersuchen, ob durch Abzweigung solcher Gebiete des einen, welche nicht mit dem anderen zusammenhangen, das Gebiet zerfällt; trifft dies ein, so betrachten wir nur ein Gebiet, bei dem dies nicht der Fall ist; den einen der beiden Teile zerlegen wir wieder so, dafs jeder der beiden neuen Teile mit dem anderen zusammenhängt, und sehen zu, ob eine Abtrennung solcher Gebiete, in denen kein Zusammenhang aller drei Teile statthat, zu einer Zerlegung führt; in derselben Weise fahren wir fort, bis eine weitere derartige Teilung unmöglich ist; wenn dies nach n Zerlegungen eintritt, so legen wir der Raumform n Dimensionen bei.

Um diese Definition als berechtigt nachzuweisen, müssen wir zeigen, dafs es auf die Wahl des Raumteiles und die Art der Zerlegung nicht ankommt. Dafs wir dabei die Bewegung nicht entbehren können, darf uns nicht wundern; denn die Bewegung in dem vorhin beschriebenen Sinne ermöglicht es uns erst, verschiedene Raumteile mit einander zu vergleichen.

Die letzten Entwicklungen zeigen, dafs die Zahl der Dimensionen von unseren Voraussetzungen aus ganz willkürlich ist. Solange wir uns nur darauf beschränken, aus unseren Grundsätzen weitere Folgerungen zu ziehen, ist es nicht gestattet, eine Zahl vor der anderen zu bevorzugen. Dadurch sind auch die Untersuchungen des dritten Abschnitts zum vollen Abschlufs gelangt, indem wir erkennen, dafs die geometrischen Grundbegriffe und Grundsätze für jede Zahl von Dimensionen volle Gültigkeit besitzen.

Achter Abschnitt.

Anwendung der Transformations-Gruppen.

§ 1.

Überblick über die Theorie der Transformations-Gruppen.

Da es nicht möglich ist, die Theorie der Transformations-Gruppen, von der wir im folgenden eine wichtige Anwendung machen wollen, an dieser Stelle vollständig zu entwickeln, müssen wir für die Theorie selbst auf Lies Werk[23]) verweisen und uns hier mit einem Überblick begnügen. Dabei werden wir uns einerseits ganz auf diejenigen Lehrsätze beschränken, die im folgenden benutzt werden, andererseits aber gerade diese Sätze mit einer gewissen Ausführlichkeit behandeln. Von der Mitteilung der Beweise müssen wir jedoch abstehen; wenn wir in dieser Richtung zuweilen einige Andeutungen machen, so bezwecken wir damit nur, den Inhalt des Satzes selbst dem Leser näher zu bringen.

1. Wir gehen aus von n unbeschränkt veränderlichen Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n$ und transformieren sie so, dafs jedem Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ ein Wertsystem $(x_1' \ldots x_n')$ entspricht. Dabei beschränken wir uns auf stetige Transformationen; demnach soll die Gesamtheit der Wertsysteme (x'), welche einer stetigen Mannigfaltigkeit von Wertsystemen (x) entsprechen, jedesmal eine stetige Mannigfaltigkeit bilden. Die neuen Variabeln $(x_1' \ldots x_n')$ sollen aber nicht blofs von den n Variabeln $x_1 \ldots x_n$, sondern auch von r willkürlichen Parametern $u_1 \ldots u_r$ abhangen; somit setzen wir die Gleichungen in der Form voraus:

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1' &= f_1\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r) \\ x_2' &= f_2\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r) \\ &\;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= f_n\,(x_1 \ldots x_n;\; u_1 \ldots u_r). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen für jedes Wertsystem der Parameter eine gewisse Transformation dar; ihre Gesamtheit bildet also ein System von Transformationen.

Nun sollen die Funktionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ nicht blofs in Bezug auf die Variabeln $x_1 \ldots x_n$, sondern auch in Bezug auf die Parameter $u_1 \ldots u_r$ stetig sein; die Transformationen (1) erleiden also stetige Veränderungen, wenn man die Parameter sich auf stetige Weise ändern läfst.

Die r Parameter $u_1 \ldots u_r$ sind entweder wesentlich oder lassen sich auf eine geringere Zahl zurückführen. Im zweiten Falle kann man (für $p < r$) p Funktionen $t_1 \ldots t_p$ von $u_1 \ldots u_r$ so bestimmen, dafs die Gleichungen (1) nur von $t_1 \ldots t_p$ abhangen. Im folgenden soll stets angenommen werden, dafs die Parameter auf ihre geringste Zahl zurückgeführt, dafs sie also wesentlich sind.

Mit der Transformation (1) für ein festes System von Parametern stellen wir die Transformation zusammen:

$$(2) \quad x_\varkappa'' = f_\varkappa (x_1' \ldots x_n' ; v_1 \ldots v_r), \qquad (\varkappa = 1 \ldots n)$$

wo auch den Parametern $v_1 \ldots v_r$ feste Werte beigelegt sind. Indem wir in (2) für $x_1' \ldots x_n'$ ihre aus (1) fliefsenden Werte einsetzen, machen wir die Variabeln $x_1'' \ldots x_n''$ abhängig von den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ und den 2r Parametern $u_1 \ldots u_r, v_1 \ldots v_r$. Wir bevorzugen jetzt den Fall, dafs bei jeder Wahl von $u_1 \ldots u_r$ und $v_1 \ldots v_r$ die neuen Gleichungen die Form erhalten:

$$(3) \quad x_\varkappa'' = f_\varkappa (x_1 \ldots x_n ; w_1 \ldots w_r),$$

wo die Gröfsen $w_1 \ldots w_r$ von $x_1 \ldots x_n$ unabhängig, also blofse Funktionen von $u_1 \ldots u_r, v_1 \ldots v_r$ sind. Dieser Fall ist deshalb von ganz hervorragender Wichtigkeit, weil alsdann die aus irgend zwei Transformationen des Systems zusammengesetzte Transformation wieder dem System angehört. Jedes System von Transformationen, welches dieser Bedingung genügt, welches also auch jedesmal die aus irgend zwei seiner Transformationen zusammengesetzte Transformation enthält, nennt Lie eine Transformations-Gruppe. Im vorliegenden Falle, wo die Zahl der Parameter endlich ist und dieselben eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, heifst die Gruppe eine stetige endliche Transformations-Gruppe. Ist die Zahl der wesentlichen Parameter, wie wir hier annehmen, gleich r, so wird die Gruppe als r-gliedrig bezeichnet.

2. Wir setzen voraus, dafs die Gruppe die identische Transformation enthält, d. h. dafs für ein gewisses System $a_1 \dots a_r$ der Parameter die n Gleichungen erfüllt sind:

$$x_1 = f_1 (x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r) \dots x_n = f_n (x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r).$$

(Dafs diese Forderung keine Beschränkung herbeiführt, hat zuerst Lie und später Schur bewiesen.) Dann kann man die Parameter $u_1 \dots u_r$ durch r von einander unabhängige Funktionen dieser Gröfsen (z. B. durch $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2 \dots u_r - a_r$) derartig ersetzen, dafs die identische Transformation zu dem Parametersystem $(0, 0 \dots 0)$ gehört. Diese Form soll im folgenden immer vorausgesetzt werden; es sollen also die Gleichungen bestehen:

$$(4) \quad x_1 = f_1 (x_1 \dots x_n; 0 \dots 0) \dots x_n = f_n (x_1 \dots x_n; 0, 0 \dots 0).$$

Nun haben wir angenommen, dafs die Funktionen $f_\varkappa$ sowohl in den Variabeln $x_1 \dots x_n$ wie in den Parametern $u_1 \dots u_r$ stetig sind. Geben wir also den Parametern unendlich kleine Werte, so mufs auch jede Differenz $f_\varkappa - x_\varkappa$ unendlich klein sein. Mit anderen Worten: Wenn wir setzen:

$$u_1 = e_1 \delta t,\ u_2 = e_2 \delta t \dots u_r = e_r \delta t,$$

wo δt eine unendlich kleine Gröfse sein soll, so wird unter Berücksichtigung der Gleichungen (4):

$$(5) \quad f_\varkappa (x_1 \dots x_n; e_1 \delta t, e_2 \delta t \dots e_r \delta t) = x_\varkappa + \delta t (e_1 \xi_{1\varkappa} + e_2 \xi_{2\varkappa} + \dots e_r \xi_{r\varkappa}),$$

wo für $\varkappa = 1 \dots n$, $\varrho = 1 \dots r$ die $\xi_{\varrho\varkappa}$ Funktionen von $x_1 \dots x_n$ sind und zwar

$$(6) \quad \left[\frac{\partial f_\varkappa (x_1 \dots x_n; u_1 \dots u_r)}{\partial u_\varrho}\right]_{u_1 = \dots = 0} = \xi_{\varrho\varkappa} (x_1 \dots x_n).$$

Jede Transformation, die man aus (1) erhält, wenn man die Funktionen $f_1 \dots f_n$ durch die rechten Seiten von (5) ersetzt, nennt Lie eine unendlich kleine oder eine infinitesimale Transformation.

Da die r Parameter $u_1 \dots u_r$ von einander unabhängig sind, darf man auch den Konstanten $e_1 \dots e_r$ ganz beliebige Werte beilegen. Speciell kann man jedesmal $r - 1$ unter ihnen gleich null und die r^{te} gleich eins setzen. Dadurch erhält man r infinitesimale Transformationen, von denen jede durch n Funktionen $\xi_{\varrho 1}, \xi_{\varrho 2} \dots \xi_{\varrho n}$, die Komponenten der Transformation, bestimmt wird. Jede Gruppe, in welcher die q unendlich kleinen Transformationen vorkommen:

$$(7)\quad \begin{array}{llll} \xi_{11}, & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21}, & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1}, & \xi_{q2} & \dots & \xi_{qn}; \end{array}$$

enthält für beliebige konstante Gröfsen $e_1, e_2 \dots e_q$ auch diejenige infinitesimale Transformation, deren Komponenten sind:

$$e_1\xi_{11} + e_2\xi_{21} + \dots + e_q\xi_{q1},$$
$$e_1\xi_{12} + e_2\xi_{22} + \dots + e_{q2} \dots e_1\xi_{1n} + e_2\xi_{2n} + \dots + e_q\xi_{qn}.$$

Dem entsprechend nennen wir die q infinitesimalen Transformationen (7) unabhängig von einander, wenn man für konstante Werte $e_1 \dots e_q$ die n Gleichungen

$$\begin{array}{l} e^1\xi_{11} + e_2\xi_{21} + \dots + e_q\xi_{q1} = 0 \\ e_1\xi_{12} + e_2\xi_{22} + \dots + e_q\xi_{q2} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ e_1\xi_{1n} + e_2\xi_{2n} + \dots + e_q\xi_{qn} = 0 \end{array}$$

nur dadurch befriedigen kann, dafs man $e_1 = e_2 = \dots = e_q = 0$ setzt. Jede r-gliedrige Gruppe enthält hiernach genau r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen.

Umgekehrt führen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen auf ein r-gliedriges System (1). Gehen wir nämlich, entsprechend den Gleichungen (5), von den n Differentialgleichungen aus:

$$(8)\quad \frac{df\varkappa}{dt} = e_1\xi_{1\varkappa} + e_2\xi_{2\varkappa} + \dots + e_r\xi_{r\varkappa} \qquad (\varkappa = 1 \dots n),$$

so müssen sich die Lösungen in der Form darstellen:

$$f_\varkappa = \varphi_\varkappa(x_1 \dots x_n;\ e_1 \dots e_r,\ t) \qquad (\varkappa = 1 \dots n),$$

indem die weiteren Integrations-Konstanten durch die Forderung (4) vollständig bestimmt werden. Nun ändert sich das Gleichungssystem (8) nicht, wenn man t durch eine beliebige Konstante c dividiert, aber zugleich alle Gröfsen $e_1, e_2 \dots e_r$ mit demselben c multipliziert. Demnach können auch die Lösungen aufser von den Variabeln $x_1 \dots x_n$ nur von den r Produkten $e_1 t, e_2 t \dots e_r t$ abhangen; sie nehmen also für $e_1 t = u_1,\ e_2 t = u_2 \dots e_r t = u_r$ die Gestalt (1) an.

3. Wenn durch eine unendlich kleine Transformation jede einzelne Variabele $x_\varkappa$ die Veränderung $\xi_\varkappa \delta t$ erleidet, wenn also

$\xi_1 \ldots \xi_n$ die Komponenten der unendlich kleinen Transformation sind, so wird eine beliebige Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$ um $\delta t \sum_{\varkappa} \xi_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa}}$ verändert. Demnach bezeichnet Lie eine infinitesimale Transformation symbolisch durch

$$(9) \quad X(f) = \sum_{\varkappa} \xi_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa}},$$

wo statt $X(f)$ vielfach Xf oder, wo kein Mißverständnis befürchtet werden kann, auch kurz X geschrieben wird. Ein Vorzug dieser Bezeichnung besteht in der Leichtigkeit, mit der neue Variabele eingeführt werden. Ersetzt man nämlich die Variabeln $x_1 \ldots x_n$ durch die Variabeln $y_1 \ldots y_n$, wo $y_{\varkappa} = \varphi_{\varkappa}(x)$ ist, so ist:

$$X(f) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\alpha,\beta} \xi_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y_{\beta}} \cdot \frac{\partial y_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\beta} X(y_{\beta}) \frac{\partial f}{\partial y_{\beta}} = Y(f).$$

Ihre größte Bedeutung erlangt diese Bezeichnung aber dadurch, daß sie erlaubt, schwierige Operationen mit einem Blick zu übersehen.

Wir wollen davon sofort ein Beispiel geben. Für

$$X(f) = \sum \xi_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa}} \text{ wird } X(\xi_{\alpha}) = \sum_{\varkappa} \xi_{\varkappa} \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x_{\varkappa}},$$

$$X(X[\xi_{\alpha}]) = \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\xi_{\varkappa} \xi_{\lambda} \frac{\partial^2 \xi_{\alpha}}{\partial x_{\varkappa} \partial x_{\lambda}} + \xi_{\alpha} \frac{\partial x_{\lambda}}{\partial x_{\varkappa}} \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x_{\lambda}} \right) \text{ u. s. w.}$$

Jetzt stellen für $\alpha = 1 \ldots n$ die n Gleichungen:

$$(10) \quad x_{\alpha}' = x_{\alpha} + \frac{t}{1} \xi_{\alpha} + \frac{t^2}{2!} X(\xi_{\alpha}) + \frac{t^3}{3!} X(X[\xi_{\alpha}]) + \ldots$$

entsprechend den Gleichungen (1) ein System von Transformationen mit dem Parameter t dar. Verbindet man mit einer hieraus hervorgehenden Transformation die weitere:

$$x_{\alpha}'' = x_{\alpha}' + \frac{t'}{1} \xi_{\alpha}' + \frac{t'^2}{2!} X(\xi_{\alpha}') + \ldots,$$

wo $\xi_{\alpha}' = \xi_{\alpha}(x_1' \ldots x_n')$ sein soll, so gelangt man durch Zusammensetzung dieser beiden Transformationen zu der neuen Transformation:

$$x_{\alpha}'' = x_{\alpha} + \frac{t + t'}{1} \xi_{\alpha} + \frac{(t + t')^2}{2!} X(\xi_{\alpha}) + \ldots$$

Die Transformationen (10) bilden also eine eingliedrige Gruppe; wir sagen mit Lie, zu dieser eingliedrigen Gruppe gehöre die infinitesimale Transformation $X(f)$ und umgekehrt werde durch $X(f)$ die eingliedrige Gruppe (10) erzeugt.

4. Das Zeichen $X_\alpha(X_\beta f)$ bedeutet, daſs in der rechten Seite von (9) an die Stelle von f gesetzt wird $\sum_\varkappa \xi_{\beta\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$; demnach ist:

$$X_\alpha(X_\beta f) = \sum_{\iota,\varkappa} \xi_{\alpha\iota} \frac{\partial \xi_{\beta\varkappa}}{\partial x_\iota} \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\iota,\varkappa} \xi_{\alpha\iota}\, \xi_{\beta\varkappa} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\iota\, \partial x_\varkappa}.$$

Da hier die zweiten Ableitungen von f für $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ gleichmäſsig vorkommen, so heben sie sich weg, wenn man noch $X_\beta(X_\alpha f)$ bildet und von dem vorigen Ausdruck abzieht. Demnach stellt:

$$\text{(11)}\quad \begin{aligned}(X_\alpha X_\beta) &= X_\alpha(X_\beta f) - X_\beta(X_\alpha f)\\ &= \sum_{\iota,\varkappa}\left(\xi_{\alpha\iota}\frac{\partial \xi_{\beta\varkappa}}{\partial x_\iota} - \xi_{\beta\iota}\frac{\partial \xi_{\alpha\varkappa}}{\partial x_\iota}\right)\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}\end{aligned}$$

ebenfalls eine unendlich kleine Transformation dar, von der wir sagen, sie werde durch Kombination der Transformationen $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ erhalten. Damit dieser Ausdruck gestattet ist, muſs das Ergebnis der Operation $(X_\alpha X_\beta)$ von der Wahl der Variabeln unabhängig sein; mit anderen Worten: wenn für die neuen Variabeln $y_1 \ldots y_n$ die Formen $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ in $Y_\alpha f$ und $Y_\beta f$ übergehen, so muſs auch die Form $(X_\alpha X_\beta)$ in $(Y_\alpha Y_\beta)$ verwandelt werden. Das nachzuweisen ist sehr leicht.

Nun sagt einer der wichtigsten Sätze aus der Theorie der Transformations-Gruppen, daſs in jeder Gruppe, welche zwei unendlich-kleine Transformationen enthält, auch die durch ihre Kombination erhaltene Transformation vorkommt. Wir haben aber erkannt, daſs jede unendlich kleine Transformation der durch die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f, X_2 f \ldots X_r f$ bestimmten Gruppe in der Form $\sum e_\varrho X_\varrho f$ dargestellt werden kann. Somit muſs für jede Kombination α, β der Marken $1 \ldots r$ ein System von r Konstanten $c_{\alpha\beta 1} \ldots c_{\alpha\beta r}$ bestehen, so daſs die Gleichung gilt:

$$\text{(12)}\quad (X_\alpha X_\beta) = \sum_\varrho c_{\alpha\beta\varrho} X_\varrho f.$$

Umgekehrt beweist man, dafs diese Bedingungen auch hinreichend sind, wenn die infinitesimalen $X_1 f \dots X_r f$ eine Gruppe bestimmen sollen; mit anderen Worten: Wenn die rn Funktionen $\xi_{\varrho\varkappa}$ so gewählt sind, dafs unter Zugrundelegung der Gleichungen (9) und (11) die $\frac{r(r-1)}{2}$ Gleichungen (12) für ein gewisses System von Konstanten $c_{\iota\varkappa\varrho}$ erfüllt sind, so erzeugen die r infinitesimalen Transformationen $X_\alpha f = \sum_\iota \xi_{\alpha\iota} \frac{\partial f}{\partial x_\iota}$ für $\alpha = 1 \dots r$ eine r-gliedrige Transformations-Gruppe.

Wenn in der Gleichung (12) die r Koefficienten $c_{\alpha\beta 1} \dots c_{\alpha\beta r}$ sämtlich gleich null sind, so ist jede von $X_\alpha f$ erzeugte Transformation mit jeder aus $X_\beta f$ hervorgehenden vertauschbar. Führen wir nämlich entsprechend den Gleichungen (10) die Transformation aus: $x_\varkappa' = x_\varkappa + t\xi_{\alpha\varkappa} + \dots$, und verbindet damit die Transformation: $\bar{x}_\varkappa = x_\varkappa' + u\xi_{\beta\varkappa}' + \dots$, so gelangt man bei Vertauschung der Reihenfolge zu demselben Resultate; d. h. wenn man setzt:

$\bar{x}_\varkappa = x_\varkappa + u\xi_{\beta\varkappa} + \dots$, so wird $\bar{\bar{x}}_\varkappa = \bar{x}_\varkappa + t\bar{\xi}_{\alpha\varkappa} + \dots$, wo ist $\xi_{\beta\varkappa}' = \xi_{\beta\varkappa}(x_1' \dots x_n')$, $\bar{\xi}_{\alpha\varkappa} = \xi_{\alpha\varkappa}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$.

5. Die Konstanten $c_{\alpha\beta\varrho}$ sind nicht willkürlich. Zunächst ist offenbar:

$$c_{\alpha\beta\varrho} + c_{\beta\alpha\varrho} = 0.$$

Die Definition (11) zeigt aber auch, dafs die Gleichung besteht:

$$(X_\alpha [X_\beta X_\gamma]) + (X_\beta [X_\gamma X_\alpha]) + (X_\gamma [X_\alpha X_\beta]) = 0.$$

Demnach mufs infolge von (12) die Gleichung erfüllt sein:

$$(13) \quad \sum_\varrho \{ c_{\beta\gamma\varrho} (X_\varrho X_\alpha) + c_{\gamma\alpha\varrho} (X_\varrho X_\beta) + c_{\alpha\beta\varrho} (X_\varrho X_\gamma) \} = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung, welche sehr häufig benutzt wird, kurz die Relation $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ nennen. Setzen wir hierin für $(X_\varrho X_\alpha) \dots$ die Werte aus (12) ein, so folgt:

$$(14) \quad \sum_\varrho \{ c_{\beta\gamma\varrho} c_{\varrho\alpha\varepsilon} + c_{\gamma\alpha\varrho} c_{\varrho\beta\varepsilon} + c_{\alpha\beta\varrho} c_{\varrho\gamma\varepsilon} \} = 0$$

für irgend vier Marken α, β, γ, ε.

Hiermit sind alle Bedingungen erschöpft, denen die Koefficienten $c_{\alpha\beta\varrho}$ genügen müssen, und Lie hat nachgewiesen, dafs zu jedem derartigen System von Koefficienten auch wirklich eine Gruppe gehört.

6. Gehen die n Funktionen $f_\varkappa(x_1 \dots x_n;\ u_1 \dots u_r)$ dadurch, dafs ich die Parameter $u_1 \dots u_r$ von $p < r$ Gröfsen $v_1 \dots v_p$ abhängig mache, in die n Funktionen $g_\varkappa(x_1 \dots x_n;\ v_1 \dots v_p)$ über und bildet das durch diese Gleichungen bestimmte System eine Gruppe, so gehört offenbar jede Transformation der letzten Gruppe auch der ursprünglichen Gruppe an; die neue Gruppe heifst demnach eine Untergruppe der ersten.

Man kann auch von den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe aus zu ihren Untergruppen gelangen. Zu dem Ende setze man für $p < r$:

$$\begin{array}{c} Y_1 f = k_{11} X_1 f + \dots + k_{1r} X_r f \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y_p f = k_{p1} X_1 f + \dots + k_{pr} X_r f, \end{array}$$

und bestimme die pr Konstanten $k_{11} \dots k_{pr}$ so, dafs für jede Kombination α, β der Marken $1 \dots p$ die Gleichung

$$(Y_\alpha Y_\beta) = e_{\alpha\beta 1} Y_1 f + \dots + e_{\alpha\beta r} X_r f$$

für konstante Werte von $e_{\alpha\beta 1} \dots e_{\alpha\beta r}$ erfüllt wird. Dann erzeugen offenbar die p infinitesimalen Transformationen $Y_1 \dots Y_p$ eine Gruppe, deren sämtliche Transformationen in der aus $X_1 \dots X_r$ hervorgehenden Gruppe enthalten sind; die neue Gruppe ist also eine Untergruppe der gegebenen.

Dafs jede Gruppe eingliedrige Untergruppen besitzt, haben wir bereits oben gesehen. In der That ist diejenige Gruppe, welche bei beliebigen konstanten Werten von $e_1 \dots e_r$ von der infinitesimalen Transformation $e_1 X_1 f + \dots + e_r X_r f$ erzeugt wird, eine eingliedrige Untergruppe der aus $X_1 f \dots X_r f$ hervorgehenden Gruppe.

Sobald man komplexe Transformationen zuläfst, hat jede Gruppe auch zweigliedrige Untergruppen. Davon überzeugt man sich durch folgende Überlegung. Bestimmen Yf und Zf eine zweigliedrige Gruppe, so mufs sein $(YZ) = m\,Yf + n\,Zf$ für konstante Werte von m und n. Wenn hier n nicht verschwindet, so setze man $m\,Y + n\,Z = U$ und bestimme die Gruppe durch die beiden Transformationen Y und U. Dann mufs die Gleichung gelten: $(YU) = \omega U$. Hierin ist auch der Fall eingeschlossen, dafs m und n verschwinden, dafs also alle Transformationen der zweigliedrigen Gruppe mit einander vertauschbar sind.

Jetzt gehen wir von einer beliebigen infinitesimalen Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ der gegebenen Gruppe aus; soll sie einer zweigliedrigen Untergruppe angehören, so mufs es möglich sein, eine zweite Transformation $\Sigma \zeta_\iota X_\iota f$ derartig zu bestimmen, dafs ist:

$$(\Sigma \eta_\iota X_\iota, \Sigma \zeta_\iota X_\iota) = \omega \Sigma \zeta_\iota X_\iota f.$$

Da nun offenbar die linke Seite gleich $\Sigma \eta_\iota \zeta_\varkappa (X_\iota X_\varkappa)$ ist, so führt die voranstehende Gleichung auf die r Relationen:

$$(15) \quad \sum_{\iota, \varkappa} \eta_\iota \zeta_\varkappa c_{\iota \varkappa \alpha} = \omega \zeta_\alpha.$$

Demnach wird ω als Wurzel einer Gleichung r_{ten} Grades bestimmt, deren Koefficienten von den Konstanten $c_{\alpha\beta\gamma}$ und von den Gröfsen $\eta_1 \ldots \eta_r$ abhangen. Da jedenfalls eine Wurzel dieser Gleichung gestattet, die Koefficienten $\zeta_1 \ldots \zeta_r$ unseren Forderungen entsprechend zu bestimmen, so gelangen wir mindestens zu einer zweigliedrigen Untergruppe, der die infinitesimale Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ angehört.

Die angegebene Gleichung gestattet aber auch, die mehrgliedrigen Untergruppen zu bestimmen, in denen eine gegebene Transformation vorkommt. Dabei kommt es, wie die Gleichungen (15) zeigen, nicht auf die Gruppe selbst, sondern nur auf die Koefficienten $c_{\alpha\beta\gamma}$ an. Demnach ist es gestattet, zwei Gruppen, in denen dieselben Koefficienten c zu Grunde gelegt werden können, gleichen Bau oder gleiche Struktur beizulegen. (Der früher von Lie eingeführte und auch von mir gebrauchte Ausdruck, sie hätten gleiche Zusammensetzung, wird am besten ganz vermieden.)

7. Wenden wir die sämtlichen Transformationen einer Gruppe auf ein Wertsystem $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ an, so bildet die Gesamtheit der Wertsysteme, in welche dasselbe übergeführt wird, entweder eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit oder eine Mannigfaltigkeit von weniger Dimensionen. Wenn das letztere für alle Wertsysteme gilt, so nennen wir die Gruppe intransitiv. Sobald wir nur von einem einzigen Wertsystem wissen, dafs es in alle Wertsysteme seiner Umgebung übergeführt werden kann, mufs dasselbe für alle Wertsysteme möglich sein, die nicht besonderen

Bedingungen genügen; in diesem Falle nennen wir die Gruppe transitiv.

Gehen wir z. B. von den r infinitesimalen Transformationen aus:

$$F_1(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \ldots Fr(x)\frac{\partial f}{\partial y},$$

wo $F_1(x), \ldots F_r(x)$ ganz beliebige Funktionen von x sind, so erkennen wir sofort, dafs sie eine Gruppe bestimmen. Die endlichen Transformationen sind offenbar:

$$x' = x,\ y' = y + u_1F_1(x) + u_2F_2(x) + \ldots + u_rF_r(x);$$

es bleibt also der Wert von x ungeändert. Betrachten wir x und y als die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten, so werden alle zur y-Achse parallelen Geraden in sich verschoben.

Dagegen wird bei gleicher Auffassung der Werte x und y durch die Transformationen der viergliedrigen Gruppe:

$$y\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ x\frac{\partial f}{\partial x},\ x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}$$

zwar jeder Punkt der Linie $y = 0$ in dieser Linie belassen; aber jeder andere Punkt der Ebene kann in alle Punkte übergeführt werden, welche mit ihm auf derselben Seite der x-Achse liegen; die Gruppe ist also transitiv.

Sind die Komponenten der r infinitesimalen Transformationen, durch welche eine transitive Gruppe bestimmt wird,

$$\begin{matrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdots & \xi_{rn}, \end{matrix}$$

so mufs zunächst $r \geqq n$ sein; zugleich mufs unter den $\binom{r}{n}$ Determinanten, welche man aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11}\xi_{21} & \cdots & \xi_{r1} \\ \xi_{12}\xi_{22} & \cdots & \xi_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1n}\xi_{2n} & \cdots & \xi_{rn} \end{matrix} \right\|$$

durch Auswahl von n Vertikalreihen bilden kann, mindestens eine sein, welche nicht identisch verschwindet.

§ 2.

Beispiele von Transformations-Gruppen.

1. Die Bewegungen des euklidischen Raumes von n Dimensionen.

Wir wollen im folgenden immer das Symbol $\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$ durch $p_\varkappa$ ersetzen. Bei Benutzung der n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ gehen wir von den $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen aus:

$$(1) \quad p_\iota,\ p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota = U_{\iota\varkappa}.$$

Daſs diese eine Gruppe bestimmen, erkennt man sehr leicht, indem man je zwei von ihnen kombiniert. Sind nämlich ι, $\varkappa$, λ, μ vier ungleiche Marken aus der Reihe $1 \ldots n$, so ist offenbar unter Anwendung der durch die Gleichung (11) des vorigen Paragraphen gegebenen Vorschrift:

$$(2) \quad \begin{gathered}(p_\iota, p_\varkappa) = 0,\ (p_\iota, U_{\iota\varkappa}) = -p_\varkappa,\ (p_\iota, U_{\varkappa\lambda}) = 0,\\ (U_{\iota\varkappa}, U_{\iota\lambda}) = U_{\varkappa\lambda},\ (U_{\iota\varkappa}, U_{\lambda\mu}) = 0.\end{gathered}$$

Zugleich sehen wir, daſs sowohl die n Transformationen p_ι, wie die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transformationen $U_{\iota\varkappa}$ für sich eine Untergruppe bestimmen. Die letztere ist intransitiv, da sie die Form $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ ungeändert läſst. Die infinitesimale Transformation $U_{\iota\varkappa}$ führt nämlich Φ über in

$$\Phi + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\iota} x_\varkappa - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\varkappa} x_\iota\right) \partial t,$$

wo der Klammerausdruck verschwindet. Aus dieser Eigenschaft der Gruppe kann man bereits schlieſsen, daſs die endlichen Transformationen der Gruppe sind:

$$y_\varkappa = a_{\varkappa 1} x_1 + a_{\varkappa 2} x_2 + \ldots + a_{\varkappa n} x_n + b_\varkappa \quad (\varkappa = 1 \ldots n),$$

wofern zwischen den n^2 Koefficienten $a_{\alpha\beta}$ die Beziehungen bestehen:

$$(4) \quad \begin{gathered} a_{\varkappa 1}^2 + a_{\varkappa 2}^2 + \ldots + a_{\varkappa n}^2 = 1 \\ a_{\varkappa 1} a_{\lambda 1} + a_{\varkappa 2} a_{\lambda 2} + \ldots + a_{\varkappa n} a_{\lambda n} = 0 \qquad \text{für } \varkappa \gtrless \lambda, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1. \end{gathered}$$

Wir wollen dies noch in anderer Weise zeigen. Angenommen, irgend eine Auswahl aus den Transformationen (1) habe zu einer durch die Gleichungen (3) und (4) charakterisierten Transformation geführt; dann zeigen wir, dafs die Hinzunahme irgend einer anderen Transformation (1) wieder eine Lösung derselben Form liefert. Die infinitesimale Transformation p_ι vertritt die Differentialgleichungen:

$$dx_1 = \ldots = dx_{\iota-1} = dx_{\iota+1} = \ldots = dx_n = 0,\ dx_\iota = dt;$$

ihre Anwendung auf die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ führt zu der Transformation:

$$z_1 = y_1 \ldots z_{\iota-1} = y_{\iota-1},\ z_\iota = y_\iota + t,\ z_{\iota+1} = y_{\iota+1} \ldots,\ z_n = y_n.$$

In den Gleichungen (3) ändert sich also nur der Koefficient b_ι, der in $b_\iota + t$ übergeht, während alle anderen ungeändert bleiben.

In entsprechender Weise vertritt das Symbol $p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota$ die n Differentialgleichungen:

$$dx_\iota = x_\varkappa du,\ dx_\varkappa = - x_\iota du,\ dx_\lambda = 0 \text{ für } \lambda \gtrless \iota, \varkappa.$$

Indem wir diese auf die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ anwenden, erhalten wir die Transformationen:

$$z_\iota = y_\iota \cos u + y_\varkappa \sin u,\ z_\varkappa = - y_\iota \sin u + y_\varkappa \cos u,\ z_\lambda = y_\lambda.$$

Für $y_1 \ldots y_n$ führen wir die in den Gleichungen (3) angegebenen Werte ein und erhalten:

$$z_\alpha = a'_{\alpha 1} x_1 + \ldots + a'_{\alpha n} x_n + b'_\alpha \qquad (\alpha = 1 \ldots n) \text{ für}$$

$$a'_{\iota\nu} = a_{\iota\nu} \cos u + a_{\varkappa\nu} \sin u,\ a'_{\varkappa\nu} = - a_{\iota\nu} \sin u + a_{\varkappa\nu} \cos u,\ a'_{\lambda\nu} = a_{\lambda\nu},$$

$$b'_\iota = b_\iota + b_\iota \cos u + b_\varkappa \sin u,\ b'_\varkappa = b_\varkappa - b_\iota \sin u + b_\varkappa \cos u,\ b'_\lambda = b_\lambda.$$

Wir gelangen also wieder zu einer Transformation von der Form (3), und für die neuen Koefficienten gelten offenbar wieder die beiden ersten Gleichungen (4). Dafs aber auch die aus den neuen Koefficienten gebildete Determinante ungeändert bleibt, braucht man nicht einmal aus dem Multiplikations-Theorem herzuleiten; es genügt, wenn man in der neuen Determinante die Elemente der $\varkappa^{\text{ten}}$ Reihe mit tg u multipliziert und von denen der ι^{ten} Reihe subtrahiert.

Nun genügt die identische Transformation $y_\varkappa = x_\varkappa$ offenbar den Bedingungen (3) und (9); somit darf man die aus den infinitesimalen Transformationen (1) hervorgehenden endlichen Transformationen in beliebiger Reihenfolge und beliebig oft mit einander verbinden und erhält stets eine Transformation von der durch die Gleichungen (3) und (4) angegebenen Form.

Die Zahl der willkürlichen Parameter beträgt aber

$$n + n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

und da dies auch die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen ist, so erkennen wir, dafs durch die Transformationen (1) wirklich die angegebene Gruppe erzeugt wird.

Man kann auch die Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ in der von Cayley gefundenen Weise, die man u. a. in Baltzers Theorie der Determinanten findet, vermittelst $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander unabhängigen Gröfsen darstellen und erkennt wiederum, dafs die Zahl der Parameter gleich $n + \frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Von den Gleichungen (3) und (4) sind wir ausgegangen, als wir im ersten Bande (S. 205–210) die Bewegungen des n-dimensionalen euklidischen Raumes untersucht haben; wir sehen jetzt, dafs diese Bewegungen durch diejenige Transformations-Gruppe dargestellt werden, welche durch die infinitesimalen Transformationen (1) erzeugt wird.

2. Die Bewegungen der nicht-euklidischen Raumformen von n Dimensionen.

Für die $n + 1$ Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$ legen wir die $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen zu Grunde:

$$(5) \quad V_\varkappa = k^2 x_0 p_\varkappa - x_\varkappa p_0,\ U_{\iota\varkappa} = p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota.$$

Diese bestimmen eine Gruppe, wie man aus den Gleichungen erkennt:

$$(V_\iota, V_\varkappa) = k^2 U_{\iota\varkappa},\ (V_\iota, U_{\iota\varkappa}) = -V_\varkappa,\ (V_\iota, U_{\varkappa\lambda}) = 0,$$
$$(U_{\iota\varkappa}, U_{\iota\lambda}) = U_{\varkappa\lambda},\ (U_{\iota\varkappa}, U_{\lambda\mu}) = 0,$$

wo $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$ vier verschiedene Marken der Reihe $1, 2 \ldots n$ sind.

Die auf diese Weise erhaltene Gruppe ist intransitiv, da die quadratische Form

$$k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

von allen infinitesimalen Transformationen (5) und infolge dessen auch von den endlichen Transformationen der Gruppe nicht geändert wird. Beschränken wir uns aber etwa auf die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit:

$$(6) \quad k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = k^2,$$

so ist für diese die Gruppe transitiv. Um das zu erkennen, stellen wir folgende Erwägung an. Wir betrachten einen gewissen Bereich der Mannigfaltigkeit (6), der in der Umgebung des Wertsystems (0, 0 . . . 0) liegt; zur Bestimmung aller Wertsysteme dieses Bereiches genügen die n Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n$. Um die Veränderungen zu übersehen, welche diese Gröfsen erleiden, benutzen wir die Gröfse x_0, welche wir durch die Gleichung

$$\sqrt{\frac{k^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}{k^2}}$$

und die Festsetzung definieren, dafs für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ zugleich $x_0 = 1$ sein soll. Hiernach lege man den Umgestaltungen des Gebildes (6) die $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen zu Grunde:

$$p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota, \quad x_0 p_\varkappa.$$

Die letzten n Transformationen für sich führen bereits das Wertsystem (0, 0 . . . 0) in jeden Punkt der Umgebung über; die Gruppe ist also transitiv.

Für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist die Gröfse x_0 blofse Hilfsgröfse, deren Benutzung nur den Zweck hat, die Formeln einfach und übersichtlich zu machen. Da das Gebilde (6) des $(n+1)$-dimensionalen Raumes bei der aus (5) hervorgehenden Gruppe in sich verbleibt, so dürfen wir auch auf die Untersuchung des Gebildes (6) diejenigen endlichen Gleichungen anwenden, welche durch die infinitesimalen Transformationen (5) erzeugt werden. Diese Gleichungen sind aber, wie wir auf dem in der vorigen Nummer entwickelten Wege erkennen, homogen linear, und zwischen den Koefficienten bestehen die Bedingungs-Gleichungen, welche wir im ersten Bande (S. 205 u. 206) angegeben haben. Die aus (6) hervorgehende Gruppe stellt demnach die Bewegungen eines n-dimensionalen nicht-euklidischen Raumes dar, für den das Riemannsche Krümmungsmafs gleich $\frac{1}{k^2}$ ist.

Für manche Zwecke eignen sich folgende Variabele besser:

$$(7) \quad y_1 = \frac{x_1}{x_0}, \; y_2 = \frac{x_2}{x_0} \; \ldots \; y_n = \frac{x_n}{x_0}.$$

Die Forderung (6) verlangt jetzt, dafs das quadratische Gebilde

$$k^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 0$$

durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert wird. Wendet man die durch die Gleichung (q) des vorigen Paragraphen gegebene Vorschrift auf die Transformation $p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota$ an, so erhalten wir für $\frac{\partial f}{\partial f_\varkappa} = q_\varkappa$ das Symbol $q_\iota y_\varkappa - q_\varkappa y_\iota$; ebenso geht das Symbol $x_0 p_\varkappa$ über in $q_\varkappa + \frac{y_\varkappa}{k^2} \sum\limits_\varrho y_\varrho q_\varrho$. In den Variabeln $y_1 \ldots y_n$ wird also die Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen erzeugt:

$$(8) \quad q_\varkappa + \frac{y_\varkappa}{k^2} \sum_\varrho y_\varrho q_\varrho, \quad q_\iota y_\varkappa - q_\varkappa y_\iota,$$

wo die Marken ι, $\varkappa$ der Reihe 1, 2 . . . n angehören. Für $k^2 = \infty$ geht die Gruppe (8) auch ihrer äufsern Form nach in die Gruppe (1) der vorigen Nummer über.

3. Die allgemeine projektive Gruppe.

Wir machen, entsprechend den in III § 7 (B. 1. S. 182) getroffenen Festsetzungen, die Transformationen der n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ abhängig von den $n(n+2)$ Verhältnissen der $(n+1)^2$ Gröfsen $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n$ vermittelst der Gleichungen:

$$(9) \quad y_\alpha = \frac{a_{\alpha o} + \sum a_{\alpha\nu} x_\nu}{a_{oo} + \sum a_{o\nu} x_\nu} \qquad (\alpha, \nu = 1, 2 \ldots n).$$

Setzen wir

$$z_\alpha = \frac{b_{\alpha o} + \sum b_{\alpha\nu} y_\nu}{b_{oo} + \sum b_{o\nu} y_\nu},$$

so folgt: $z_\alpha = \frac{c_{\alpha o} + \sum c_{\alpha\nu} x_\nu}{c_{oo} + \sum c_{o\nu} x_\nu}$, wofern gesetzt wird:

$$c_{\mu\nu} = \sum_{\tau=o}^{n} b_{\mu\tau} a_{\tau\nu}.$$

Die Transformationen (9) gehören also einer n (n — 2)-gliedrigen Gruppe an.

Soll sich die Transformation (9) von der identischen Transformation $y_\alpha = x_\alpha$ unendlich wenig unterscheiden, so darf a_{oo} nicht verschwinden, kann also gleich eins gesetzt werden; zugleich mufs sein:

$$a_{\alpha\alpha} = 1 + c_{\alpha\alpha}\delta t,\ a_{\alpha o} = c_{\alpha o}\delta t,\ a_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\delta t,\ a_{o\alpha} = -c_{o\alpha}\delta t$$

für $\alpha \lessgtr \beta$ und einen unendlich kleinen Wert von δt. Alsdann wird für $y_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha$:

$$\frac{\delta x_\alpha}{\delta t} = c_{\alpha 0} + c_{\alpha 1} x_1 + \ldots c_{\alpha n} x_n + x_\alpha (c_{01} x_1 + \ldots + c_{0n} x_n).$$

Da die n (n + 2) Gröfsen c noch willkürlich gewählt werden können, gelangen wir zu den infinitesimalen Transformationen:

$$(10) \quad p_\iota,\ p_\iota x_\varkappa = V_{\iota\varkappa},\ x_\iota (x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n) = W_\iota,$$

wo $\iota, \varkappa = 1 \ldots n$ zu nehmen sind und auch $\iota = \varkappa$ gesetzt werden kann. Indem wir das bekannte Zeichen $\delta_{\iota\varkappa}$ benutzen, welches $= 1$ oder $= 0$ ist, jenachdem die Marken $\iota, \varkappa$ gleich oder verschieden sind, können wir die Resultate aus der Kombination je zweier unendlich kleiner Transformationen leicht in folgender Weise angeben:

$$(p_\varkappa p_\lambda) = 0,\ (W_\varkappa W_\lambda) = 0,\ (p_\varkappa V_{\lambda\mu}) = \delta_{\varkappa\lambda} p_\mu,$$
$$(p_\varkappa, W_\lambda) = V_{\varkappa\lambda} + \delta_{\varkappa\lambda} (V_{11} + V_{22} + \ldots + V_{nn}),$$
$$(V_{\varkappa\lambda}, V_{\mu\nu}) = \delta_{\varkappa\nu} V_{\mu\lambda} - \delta_{\lambda\mu} V_{\varkappa\nu},\ (V_{\varkappa\lambda}, W_\mu) = \delta_{\varkappa\mu} W_\lambda.$$

Führt man die neuen Variabeln $y_0, y_1 \ldots y_n$ ein durch die Forderung:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0}, \ldots x_n = \frac{y_n}{y_0},\ y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1,$$

so kann man setzen:

$$\frac{\delta y_\iota}{\delta t} = \sum_\varrho c_{\iota\varrho} y_\varrho - y_\iota \sum_{\varrho\sigma} c_{\varrho\sigma} y_\varrho y_\sigma \qquad (\iota, \varrho, \sigma = 0, 1 \ldots n).$$

Läfst man hierin die sämtlichen Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$, deren Marken ungleich sind, verschwinden und setzt die übrigen einander gleich, so wird jedes dy_ι gleich null; also hangen auch die neuen Transformationen von n (n + 2) Parametern ab.

4. Die Bewegungen der in einem dreidimensionalen euklidischen Raume gelegenen Ebenen.

Sind x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten, so kann die Gleichung jeder Ebene auf die Form gebracht werden

$$(11)\quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 - u_0 = 0$$

mit der Bedingung:

$$(12)\quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Umgekehrt sind diese vier Gröfsen u_0, u_1, u_2, u_3, zwischen deren drei letzten die angegebene Relation besteht, für metrische Zwecke als Koordinaten der Ebene sehr geeignet.

Da die Gleichung (11) die Bedingung dafür angiebt, dafs der Punkt (x) in die Ebene (u) fällt, so mufs auch sein:

$$(u_1 + \delta u_1)\,(x_1 + \delta x_1) + (u_2 + \delta u_2)\,(x_2 + \delta x_2) + (u_3 + \delta u_3)\,(x_3 + \delta x_3) - (u_0 + \delta u_0) = 0,$$

wofern durch irgend eine unendlich kleine Bewegung der Punkt (x_1, x_2, x_3) in $(x_1 + \delta x_1, \ldots)$ und gleichzeitig die Ebene $(u_0 \ldots u_3)$ in $(u_0 + \delta u_0 \ldots)$ übergeht.

Ferner mufs wegen der Gleichung (12) die Bedingung bestehen:

$$u_1 \delta u_1 + u_2 \delta u_2 + u_3 \delta u_3 = 0.$$

Nun gelten nach 1. für die unendlich kleinen Veränderungen der Variabeln x die Gleichungen:

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} = a_1 - a_5 x_3 + a_6 x_2,\quad \frac{\delta x_2}{\delta t} = a_2 - a_6 x_1 + a_4 x_3,$$
$$\frac{\delta x_3}{\delta t} = a_3 - a_4 x_2 + a_5 x_1.$$

Indem wir diese Werte für δx_1, δx_2, δx_3 einsetzen und berücksichtigen, dafs die auf diese Weise sich ergebende Gleichung für alle Punkte gelten mufs, finden wir:

$$(13)\quad \delta u_1 = (a_5 u_3 - a_6 u_2)\,\delta t,\quad \delta u_2 = (a_6 u_1 - a_4 u_3)\,\delta t,$$
$$\delta u_3 = (a_4 u_1 - a_5 u_2)\,\delta t,\quad \delta u_0 = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)\,\delta t.$$

Als Symbole für die sechs unendlich kleinen Transformationen ergeben sich, wenn wir noch $q_\varkappa$ für $\frac{\delta f}{\delta u_\varkappa}$ schreiben, die folgenden:

$$(14)\quad u_1 q_0,\ u_2 q_0,\ u_3 q_0,\ u_2 q_3 - u_3 q_2,\ u_3 q_1 - u_1 q_3,\ u_1 q_2 - u_2 q_1.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, dafs diese Gruppe genau so gebaut ist wie die für die Umwandlung der Punkte geltende Gruppe:

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_2 x_3 - p_3 x_2,\ p_3 x_1 - p_1 x_3,\ p_1 x_2 - p_2 x_1.$$

5. Der euklidische dreidimensionale Raum mit der Geraden als Element.

Wenn man die Geraden des Raumes durch den Schnitt zweier Ebenen (u) und (v) bestimmt, so ist es offenbar für metrische Zwecke am geeignetsten, vorauszusetzen, dafs die Ebenen auf einander senkrecht stehen, dafs also zu der Bedingung (12) und zu der entsprechenden Gleichung zwischen v_1, v_2, v_3 noch die Bedingung hinzutritt:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

Unter dieser Annahme setzen wir:

$$(15)\quad \begin{aligned} &u_0 v_1 - u_1 v_0 = y_1,\ u_0 v_2 - u_2 v_0 = y_2,\ u_0 v_3 - u_3 v_0 = y_3,\\ &u_2 v_3 - u_3 v_2 = y_4,\ u_3 v_1 - u_1 v_3 = y_5,\ u_1 v_2 - u_2 v_1 = y_6. \end{aligned}$$

Alsdann bestehen zwischen den sechs Gröfsen $y_1 \ldots y_6$ die beiden Gleichungen:

$$(16)\quad y_1 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_6 = 0,\ y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1.$$

Bildet man die Variationen $\delta y_\varkappa$ für $y_1 \ldots y_6$ und setzt für $\delta u_\varkappa$ die Werte aus (13) und für $\delta v_\varkappa$ die entsprechenden Werte ein, so wird:

$$\frac{\delta y_1}{\delta t} = - a_2 y_6 + a_3 y_5 + a_6 y_2 - a_5 y_3$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$\frac{\delta y_4}{\delta t} = a_5 y_6 - a_6 y_5$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Die Gruppe wird also, wenn $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = r_\varkappa$ gesetzt wird, durch die infinitesimalen Transformationen bestimmt:

$$(17)\quad \begin{aligned} &r_2 y_6 - r_3 y_5,\ r_3 y_4 - r_1 y_6,\ r_1 y_5 - r_2 y_4,\\ &r_2 y_3 - r_3 y_2 - r_5 y_6 + r_6 y_5,\ r_3 y_1 - r_1 y_3 - r_6 y_4 + r_4 y_6,\\ &\quad r_1 y_2 - r_2 y_1 - r_4 y_5 + r_5 y_4. \end{aligned}$$

Auch für diese Gruppe läfst sich leicht zeigen, dafs sie gleichen Bau mit der Gruppe der Punkttransformationen eines dreidimensionalen euklidischen Raumes besitzt.

Bei dieser Gelegenheit mögen einige weitere Bemerkungen gestattet sein.

a) Die sechs eingeführten Gröfsen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Es bezeichnen nämlich y_4, y_5, y_6 die Cosinus der Winkel, welche die Gerade mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet; y_1, y_2, y_3 liefern die Momente der Geraden gegen diese drei Achsen, also z. B. y_1 das Produkt aus dem kürzesten Abstand der gegebenen Geraden von der x_1-Achse in den Sinus des von ihnen gebildeten Winkels. Die drei Gröfsen y_1, y_2, y_3 können auch in folgender Weise definiert werden: Man ziehe durch den Anfangspunkt eine Strecke, welche mit der gegebenen Geraden einen rechten Winkel bildet und gleich ist der Senkrechten, welche von diesem Punkte auf die Gerade gefällt wird; die Koordinaten ihres Endpunktes sind y_1, y_2, y_3. Es läfst sich zudem leicht eine allgemeine Vorschrift angeben, nach welcher Richtung die Strecke gezogen werden müsse, damit die sechs Gröfsen $y_1 \ldots y_6$ nicht nur die Gerade selbst bestimmen, sondern auch die Richtung angeben, in der ihre Punkte auf einander folgen sollen. Dies ergiebt sich bei der ersten Erklärung der Gröfsen $y_1 \ldots y_6$ ganz von selbst. Auch die rechtwinkligen Koordinaten eines jeden Punktes (x) der Geraden (y) lassen sich leicht ausdrücken. Soll nämlich der Punkt (x) auf der Geraden (y) liegen und vom Fufspunkte der Senkrechten, die man vom Anfangspunkte auf sie fällt, den Abstand r haben, so ist:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_2 y_6 - y_3 y_5 + r y_4 \\ x_2 &= y_3 y_4 - y_1 y_6 + r y_5 \\ x_3 &= y_1 y_5 - y_2 y_4 + r y_6. \end{aligned}$$

Wenn die Gerade nicht durch den Anfangspunkt geht, so sind die Gleichungen zweier durch die Gerade zu legender Ebenen:

$$\begin{aligned} & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0, \\ & x_1 (y_2 y_6 - y_3 y_5) + x_2 (y_3 y_4 - y_1 y_6) + x_3 (y_1 y_5 - y_2 y_4) \\ & \quad = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

Eine dritte Ebene möge dargestellt werden, indem man die erste Gleichung mit A, die zweite mit B multipliziert und addiert; indem man die Bedingung stellt:

$$A^2 + B^2 = 1,$$

wird A gleich dem Cosinus des Winkels, den die dritte Ebene mit der ersten bildet.

b) Will man, ausgehend von zwei Punkten (x) und (x'), welche in der zu bestimmenden Geraden liegen, zu den Gröfsen (y) gelangen, so wählt man die Punkte so, dafs ihr Abstand gleich eins ist; dann wird:

$$y_1 = x_2 x_3' - x_3 x_2',\ y_2 = x_3 x_1' - x_3 x_1',\ y_3 = x_1 x_2' - x_2 x_1',$$
$$y_4 = x_1 - x_1',\ y_5 = x_2 - x_2',\ y_6 = x_3 - x_3'.$$

c) Es sei gestattet, darauf hinzuweisen, dafs die eingeführten Koordinaten zur Ermittlung metrischer Beziehungen sehr geeignet sind. In dieser Hinsicht erinnere ich daran, dafs, wenn (y) und (y') die Koordinaten zweier Geraden sind, der Ausdruck

$$y_1 y_4' + y_4 y_1' + y_2 y_5' + y_5 y_2' + y_3 y_6' + y_6 y_3'$$

ihr Moment und $y_4 y_4' + y_5 y_5' + y_6 y_6'$ den Cosinus des Winkels darstellt, den die Geraden mit einander bilden. Auch möge noch ein Satz über die allgemeinen (reellen) Komplexe ersten Grades mit Hilfe dieser Koordinaten bewiesen werden.

Soll der durch die Gleichung $\Sigma \alpha_\iota y_\iota = 0$ dargestellte Komplex kein specieller sein, so mufs der Ausdruck $\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6$ einen von null verschiedenen Wert haben. In diesem Falle darf man bei der Annahme reeller Konstanten voraussetzen, dafs

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

ist. Setzt man jetzt

$$\mu_4 = \alpha_1,\ \mu_5 = \alpha_2,\ \mu_6 = \alpha_3,\ \mu_1 = \alpha_4 + \sigma\alpha_1,\ \mu_2 = \alpha_5 + \sigma\alpha_2,$$
$$\mu_3 = \alpha_6 + \sigma\alpha_3,$$

so stellen für

$$-\sigma = \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6$$

die Gröfsen $\mu_1 \ldots \mu_6$ die Koordinaten einer Geraden dar. Dadurch geht die Gleichung des Komplexes über in:

$$(\mu_1 y_4 + \mu_4 y_1 + \mu_2 y_5 + \mu_5 y_2 + \mu_3 y_6 - \mu_6 y_3) = \sigma(\mu_4 y_4 + \mu_5 y_5 + \mu_6 y_6).$$

Hiernach steht das Moment einer jeden Linie (y) des Komplexes mit einer festen Geraden (μ) in einem konstanten Verhältnis zum Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels; mit anderen Worten: Hat eine Linie des Komplexes von der festen Geraden (μ) den Abstand r und bildet sie mit ihr den Winkel φ, so ist das Produkt $r\,\mathrm{tg}\varphi$ konstant, und zwar

$$r\,\mathrm{tg}\varphi = -\frac{\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

6. Die Geraden des dreidimensionalen Raumes in projektiver Beziehung.

Sind $x_1 \ldots x_4$ und $x_1' \ldots x_4'$ die homogenen Koordinaten zweier Punkte, so wird durch das Verhältnis der sechs Gröfsen $p_{\iota\varkappa} = x_\iota x_\varkappa' - x_\varkappa x_\iota'$ (für $\iota, \varkappa = 1 \ldots 4$) diejenige Gerade bestimmt, welche durch die beiden Punkte hindurchgeht. Dabei gilt die Beziehung:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Jede projektive Umgestaltung des Raumes ändert die Gröfsen $p_{\iota\varkappa}$ vermittelst homogener linearer Gleichungen um, deren Koefficienten so gewählt werden müssen, dafs die angegebene quadratische Form in sich transformiert wird. Man kann aber auch mit Klein

$$z_1 = p_{12} + p_{34}, \quad iz_2 = p_{12} - p_{34}, \text{ u. s. w.}$$

setzen; dadurch geht die Bedingungsgleichung über in

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 = 0.$$

Alsdann wird die Gruppe, durch welche die bei beliebiger projektiver Umgestaltung des Raumes eintretenden Veränderungen der Geraden dargestellt werden, aus den 15 infinitesimalen Transformationen

$$r_\iota z_\varkappa - r_\varkappa z_\iota \qquad (\text{für } \iota, \varkappa = 1 \ldots 6)$$

erzeugt, wo $r_\iota = \dfrac{\partial f}{\partial z_\iota}$ sein soll.

§ 3.

Invarianten von Transformations-Gruppen.

1. Eine intransitive Gruppe führt einen beliebigen Punkt nicht in jeden Punkt seiner Umgebung über, sondern beläfst ihn auf einem gewissen Gebilde A, welches durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Variabeln bestimmt wird. Dies Gebilde wird dann aber durch die Transformationen der Gruppe in sich transformiert; denn sobald irgend einer seiner Punkte a in einen Punkt b übergeführt werden könnte, der dem Gebilde A nicht angehört, könnte jeder Punkt des Gebildes, da er die Überführung nach a gestattet, auch in die Lage des Punktes b gebracht werden; das Gebilde A würde also nicht die Gesamtheit aller Punkte enthalten, in die man den zuerst gewählten Punkt trans-

formieren kann. Hiernach hat jede intransitive Gruppe Invarianten, d. h. gewisse Funktionen der Variabeln bleiben bei allen ihren Transformationen ungeändert.

Umgekehrt ist eine Gruppe intransitiv, sobald sie eine Invariante in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ enthält, denn wenn die Funktion $\Phi(x_1 \ldots x_n)$ bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert bleibt, so kann der Punkt (x) nur in solche Punkte umgewandelt werden, für welche $\Phi(x_1' \ldots x_n') = \Phi(x_1 \ldots x_n)$ ist.

2. Dies Resultat gilt aber nur, solange man sich auf ein einziges Wertsystem beschränkt; dagegen bleiben bei jeder Gruppe, wie wir nachher zeigen werden, Beziehungen zwischen mehreren Wertsystemen ungeändert; solche Beziehungen mögen Invarianten im weiteren Sinne genannt werden.[24]) Es wird gut sein, dies zunächst an einigen Beispielen zu erläutern.

Sind (x) und (x') zwei verschiedene Punkte in einer n-dimensionalen euklidischen Raumform, so bleibt die Form

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2$$

bei allen ihren Transformationen ungeändert. Ebenso wenn wir die Punkte einer n-dimensionalen nicht-euklidischen Raumform mit dem Riemannschen Krümmungsmafs $= 1 : k^2$ in der vorhin (§ 2, 2) angegebenen Weise durch die $n + 1$ Gröfsen $x_0, x_1 \ldots x_n$ darstellen, so besteht zwischen je zwei Punkten die invariante Beziehung:

$$k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n'.$$

Nimmt man in einem dreidimensionalen Euklidischen Raume die Ebene als Element und benutzt die oben eingeführten Variabeln $u_0 \ldots u_3$, so haben je zwei Elemente die Invariante

$$u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3',$$

und für je vier Elemente tritt hinzu:

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_0' & u_1' & u_2' & u_3' \\ u_0'' & u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_0''' & u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix}$$

Dagegen giebt es für je zwei Gerade eines dreidimensionalen euklidischen Raumes bereits zwei Invarianten, nämlich:

$$y_4 y_4' + y_5 y_5' + y_6 y_6' \text{ und}$$
$$y_1 y_4' + y_4 y_1' + y_2 y_5' + y_5 y_2' + y_3 y_6' + y_6 y_3',$$

während bei der projektiven Umgestaltung des Raumes zwischen zwei Geraden nur eine Beziehung ungeändert bleibt.

3. Wir wollen jetzt zeigen, dafs auch jede transitive Gruppe Invarianten im weiteren Sinne besitzt. Zu dem Ende denken wir ihre sämtlichen Transformationen auf zwei verschiedene Wertsysteme angewandt; wir setzen also:

$$y_\iota = \varphi_\iota (x_1 \ldots x_n;\ u_1 \ldots u_r),\ y_\iota' = \varphi_\iota (x_1' = x_n';\ u_1 \ldots u_r).$$

Hier haben wir, da die Variabeln $x_1' \ldots x_n'$ von den $x_1 \ldots x_n$ ganz unabhängig sind, eine r-gliedrige Gruppe mit $2n$ Variabeln; diese kann intransitiv sein, ohne dafs es die ursprüngliche ist; sie kann also Invarianten besitzen, oder es ist möglich, dafs gewisse Beziehungen zwischen $(x_1 \ldots x_n)$ und $(x_1' \ldots x_n')$ durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. Man kann aber in gleicher Weise pn Variabele einführen:

$$x_1 \ldots x_n,\ x_1' \ldots x_n',\ x_1'' \ldots x_n'' \ldots x_1^{(p-1)} \ldots x_n^{(p-1)},$$

und sie durch die Transformationen

$$y_\iota = \varphi_\iota (x_1 \ldots x_n;\ u_1 \ldots u_r),\ y_\iota' = \varphi_\iota (x_1' \ldots x_n';\ u_1 \ldots u_r),$$
$$y_\iota'' = \varphi_\iota (x_1'' \ldots x_n'';\ u_1 \ldots u_r) \ldots$$

in die Variabeln

$$y_1 \ldots y_n,\ y_1' \ldots y_n',\ y_1'' \ldots y_n'' \ldots y_1^{(p-1)} \ldots y_n^{(p-1)}$$

umwandeln. Diese letzte Gruppe ist ganz gewifs intransitiv, wenn $pn > r$ ist; die gegebene Gruppe hat also Invarianten im weiteren Sinne.

4. Dieser Weg liefert für jede Gruppe unendlich viele Invarianten. Indessen sind dieselben nicht unabhängig von einander, kommen vielmehr auf eine gewisse endliche Zahl hinaus, die höchstens gleich der Zahl n der Variabeln ist. Wir finden dies bei den vorhin angeführten Beispielen bestätigt, können es aber auch sehr leicht beweisen. Zu dem Ende setzen wir voraus, zwischen v Punkten bestehe keine Invariante; gäbe es jetzt zwischen $v + 1$ Punkten mehrere unveränderliche Beziehungen, deren Zahl $m > n$ wäre, so könnte man zwischen den m Gleichungen:

$$J_1 (x_1 x' \ldots x^{(v)}) = C_1,\ J_2 (x_1 x' \ldots x^{(v)}) = C_2 \ldots$$
$$J_m (x_1 x' \ldots x^{(v)}) = C_m,$$

wo x statt $x_1 \ldots x_n$ gesetzt ist, die Variabeln $x_1 \ldots x_n$ eliminieren; man erhielte also eine invariante Beziehung zwischen v Punkten.

Nimmt man jetzt einen $v + 2^{\text{ten}}$ Punkt x_0 hinzu, so bestehen selbstverständlich die Gleichungen:

$$J_1 (x^0, x^1 \ldots x^{(v)}) = C_1' \ldots J_m (x^0, x^1 \ldots x^{(v)}) = C_m'.$$

Giebt es jetzt zwischen den $v + 2$ Punkten eine weitere invariante Beziehung, so kann man für $m = n$ die $2n$ Variabeln $x_1^0 \ldots x_n^0$, $x_1 \ldots x_n$ aus den niedergeschriebenen Gleichungen eliminieren und in die neue Gleichung einsetzen. Diese mufs jetzt identisch befriedigt werden, oder die neue Beziehung ist eine Folge aus den vorangehenden.

Ganz ähnliche Überlegungen stellt man für $m < n$ an; in allen Fällen überzeugt man sich, dafs sich die Invarianten höchstens auf n von einander unabhängige zurückführen lassen.

5. Um die Invarianten zu finden, kann man einmal von den endlichen Transformationen ausgehen und aus den $(\nu + 1) . n$ Gleichungen:

$$(1) \quad y_\varkappa = \varphi (x_1 \ldots x_n; u_1 \ldots u_r),\ y_\varkappa' = \varphi (x_1' \ldots x_n'; u_1 \ldots u_r)$$
$$\ldots y_\varkappa^{(\nu)} = \varphi (x_1^{(\nu)} \ldots x_n^{(\nu)}; u_1 \ldots u_r)$$

die r Parameter $u_1 \ldots u_r$ eliminieren. Dadurch erhält man eine oder mehrere Gleichungen von der Form:

$$F (y_1 \ldots y_n; y_1' \ldots y_n'; \ldots) = \Phi (x_1 \ldots x_n; x_1' \ldots x_n' \ldots).$$

Sind die Funktionen F und Φ identisch, so stellt F eine Invariante der Gruppe dar. Wenn aber F und Φ verschiedene Funktionen sind, so beachte man, dafs man in den Gleichungen (1) die Variabeln x mit den Variabeln y vertauschen kann, wofern man nur die Parameter $u_1 \ldots u_r$ durch geeignete Parameter $v_1 \ldots v_r$ ersetzt. Da aber die Parameter ganz entfernt sind, so mufs auch die Gleichung befriedigt werden:

$$F (x_1 \ldots x_n; x_1' \ldots x_n'; \ldots) = \Phi (y_1 \ldots y_n; y_1' \ldots y_n'; \ldots);$$

demnach ist jede symmetrische Funktion von F und Φ eine Invariante.

Wenn nur die infinitesimalen Transformationen der Gruppe gegeben sind:

$$X_\iota f = \sum_\varrho \xi_{\iota\varrho} (x) \frac{\partial f}{\partial x_\varrho},$$

so findet man die Invarianten durch Auflösung von partiellen Differentialgleichungen; für jede Invariante $J (x, x_1 \ldots x^{(\nu)})$ gelten nämlich die Gleichungen:

$$(2)\quad \sum_{\varrho}\left\{\xi_{\iota\varrho}(x)\frac{\delta J}{\delta x_{\varrho}}+\xi_{\iota\varrho}(x')\frac{\delta J}{\delta x_{\varrho}'}+\ldots+\xi_{\iota\varrho}(x^{(\nu)})\frac{\delta J}{\delta x_{\varrho}^{(\nu)}}\right\}=0,$$

oder wenn man

$$X_{\iota}'(f)=\Sigma\,\xi_{\iota\varrho}(x')\frac{\delta f}{\delta x'}\text{ u. s. w.}$$

setzt:

$$(3)\quad X_{\iota}(J)+X_{\iota}'(J)+\ldots+X_{\iota}^{(\nu)}(J)=0.$$

6. Es ist aus mancherlei Gründen vorteilhaft, die in derselben Invariante vereinigten Wertsysteme unendlich nahe bei einander anzunehmen. Wir setzen also an:

$x_{\varkappa}'=x_{\varkappa}+d_1x_{\varkappa},\ x_{\varkappa}''=x_{\varkappa}+d_2x_{\varkappa}\ldots x_{\varkappa}^{(\nu)}=x_{\varkappa}+d_{\nu}x_{\varkappa}\ (\varkappa=1\ldots n)$

und machen die Annahme, dafs die Gröfsen $d_{\alpha}x_{\varkappa}$ unendlich klein sind. Die Invariante $J(x, x' \ldots x^{(\nu)})$ möge hierdurch in einen Ausdruck $K(x, d_1x \ldots d^{\nu}x)$ übergehen. Allerdings mufs zunächst bewiesen werden, dafs dieser Ausdruck nicht identisch verschwindet. Das würde uns aber hier zu weit führen; für $\nu=1$ ist dieser Nachweis in aller Strenge von Lie geliefert (Transformations-Gruppen III S. 500).

Aus den Gleichungen $\delta x_{\varrho}=\xi_{\iota\varrho}\delta t$ (für $\varrho=1\ldots$) folgt

$$\delta dx_{\varrho}=\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}dx_{\sigma}\,\delta t.$$

Setzt man etwa:

$$d_1x_{\varrho}=y_{\varrho},\ d_2x_{\varrho}=y_{\varrho}',\ d_3x_{\varrho}=y_{\varrho}''\ldots,$$

so wird hiernach:

$$\delta y_{\varrho}=\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}y_{\sigma}\,\delta t.$$

Demnach stellen sich die unendlich kleinen Änderungen der Differentiale $y_1 \ldots y_n$ in ihnen selbst durch homogene lineare Funktionen dar, deren Koefficienten Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ sind. Da dasselbe von den Gröfsen $y_{\varrho}', y_{\varrho}'' \ldots$ gilt, so geht die Gleichung (2) über in

$$(4)\quad \sum_{\varrho}\left\{\xi_{\iota\varrho}(x)\frac{\partial K}{\partial x_{\varrho}}+\frac{\partial K}{\partial y_{\varrho}}\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}y_{\sigma}+\frac{\partial K}{\partial y_{\varrho}'}\sum_{\sigma}\frac{\partial\xi_{\iota\varrho}}{\partial x_{\sigma}}y_{\sigma}'+\ldots\right\}=0,$$

eine Gleichung, welche sich dadurch vor der Gleichung (2) auszeichnet, dafs die Gröfsen $y_{\varrho}, y_{\varrho}' \ldots$ darin nur linear vorkommen.

Gewinnt hierdurch schon der Ausdruck für die Invariante besondere Einfachheit, so kommt noch hinzu, dafs auch die äufsere Form bei Einführung von neuen Variabeln im wesentlichen ungeändert bleibt. Wenn man nämlich die Variabeln x_ϱ durch beliebige von einander unabhängige Funktionen $\varphi_\varrho\,(x_1 \ldots x_n)$ ersetzt, so gehen die Differentiale y_ϱ (und ebenso $y_\varrho' \ldots$) in homogene lineare Funktionen $\sum\limits_\sigma \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_\varrho} y_\sigma$ dieser Differentiale über.

Ein besonders wichtiger Vorteil, den die Benutzung von unendlich nahen Wertsystemen gewährt, besteht aber darin, dafs die Gesamtheit der Transformationen, welche einen Differentialausdruck unverändert lassen, jedesmal eine Gruppe bildet. Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus einem allgemeinen Satze, den Lie für Differential-Gleichungen bewiesen hat. Da sie aber für die folgenden Untersuchungen sehr wichtig ist, dürfte es passend sein, sie für den einfachsten Fall, dafs die Invariante nur die Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ und die Differentiale $y_1 = dx_1 \ldots y_n = dx_n$ enthält, zu verifizieren.

Sind $\delta x_\varrho = \xi_\varrho\, \delta t$ ud $\delta x_\varrho = y_\varrho\, \delta t$ zwei infinitesimale Transformationen, welche der Invariante $J\,(x_1 \ldots x_n;\; y_1 \ldots y_n)$ genügen, so mufs sein:

$$(5) \quad \sum \frac{\partial J}{\partial x_\varrho}\, \xi_\varrho + \sum \frac{\partial J}{\partial y_\varrho}\, d\xi_\varrho = 0, \; \sum \frac{\partial J}{\partial x_\varrho}\, \eta_\varrho + \sum \frac{\partial J}{\partial y_\varrho}\, d\eta_\varrho = 0.$$

Indem ich die beiden Gleichungen nach $x_\varkappa$ differentiiere, die erste auf diese Weise erhaltene Beziehung mit $\eta_\varkappa$, die zweite mit $\xi_\varkappa$ multipliziere, beide nach $\varkappa$ summiere und von einander subtrahiere, folgt die Relation:

$$\sum_{\varkappa,\varrho} \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_\varrho} \left(\xi_\varkappa \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa} - \eta_\varkappa \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} \right) + \frac{\partial^2 J}{\partial x_\varrho\, \partial x_\varkappa} \left(\xi_\varkappa\, d\eta_\varrho - \eta_\varkappa\, d\xi_\varrho \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} \left(\xi_\varkappa\, d\frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa} - \eta_\varkappa\, d\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial d_\varkappa} \right) \right\} = 0.$$

Ebenso differentiiere ich die Gleichungen (5) nach $y_\varkappa$ und finde in ähnlicher Weise:

$$\sum_{\varkappa,\varrho} \left\{ \frac{\partial^2 J}{\partial x_\varkappa\, \partial x_\varrho} \left(\xi_\varkappa\, d\eta_\varrho - \eta_\varkappa\, d\xi_\varkappa \right) + \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} \left(\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa}\, d\eta_\varkappa - \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa}\, d\xi_\varkappa \right) \right\} = 0.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorangehenden folgt, wenn ich

$$\zeta_\varrho = \sum_\varkappa \left(\xi_\varkappa \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial x_\varkappa} - \eta_\varkappa \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} \right)$$

setze, die neue Beziehung:

$$\sum_\varrho \frac{\partial J}{\partial x_\varrho} \zeta_\varrho + \sum_\varrho \frac{\partial J}{\partial y_\varrho} d\zeta_\varrho = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs, wenn zwei infinitesimale Transformationen den Differential-Ausdruck J (x, y) ungeändert lassen, die durch ihre Kombination erhaltene Transformation dieselbe Eigenschaft hat, dafs also alle der Forderung genügenden Transformationen eine Gruppe bilden.

Allerdings darf man keineswegs schliefsen, dafs der Invariante notwendig eine endliche Transformations-Gruppe genügt. Über die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen haben wir nichts bewiesen; diese kann auch unendlich grofs sein.

Auch mufs man sich davor hüten, die Wichtigkeit des letzten Satzes zu überschätzen. Legen wir nämlich einen beliebigen Differential-Ausdruck zu Grunde, so wird man vielfach keine infinitesimale Transformation und darum auch keine Gruppe finden, die ihm genügt. Wenn man zu einer Gruppe gelangt, so ist es eine seltene Ausnahme, dafs der gewählte Ausdruck ihre einzige Invariante ist. Im allgemeinen wird die Gruppe mehrere Invarianten besitzen, und dann kann der gegebene Differential-Ausdruck zwar als Funktion der Invarianten dargestellt werden, steht aber zu der Gruppe selbst nur in loser Beziehung.

§ 4.

Die Invariante in einem besonderen Falle.

1. Wir suchen die verschiedenen Formen, welche eine zwischen zwei unendlich nahen Wertsystemen bestehende Invariante einer transitiven Gruppe unter der Bedingung annehmen kann, dafs es zwischen je zwei Wertsystemen nur eine einzige Invariante giebt; dabei wollen wir es als zulässig betrachten, dafs zur Gruppe weitere Invarianten gehören, die von der hier zu ermittelnden unabhängig sind; nur verlangen wir in diesem Falle, dafs für die

weiteren die Zahl der mit einander verbundenen Wertsysteme gröfser ist als zwei. Bei der Lösung dieser Aufgabe beschränken wir uns auf drei Variabele x_1, x_2, x_3, wobei die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 mit y_1, y_2, y_3 bezeichnet werden sollen.[25])

Da die Gruppe transitiv sein soll, so giebt es keine Funktion der Gröfsen x_1, x_2, x_3, welche bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert bleibt. Dagegen verlangen wir, dafs es eine einzige Funktion der sechs Gröfsen x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 giebt, welche allen Transformationen der Gruppe genügt. Hiernach hat die Gruppe mindestens fünf Parameter; denn 1. mufs es mindestens drei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen geben, welche ein beliebig gewähltes Wertsystem in alle benachbarten überführen; 2. wenn man x_1, x_2, x_3 ungeändert läfst, so müssen die Gröfsen y_1, y_2, y_3 noch einer zweifach unendlichen Schar von Veränderungen unterworfen werden können. Umgekehrt kann man stets fünf von einander unabhängige unendlich kleine Transformationen so auswählen, dafs sich aus ihnen die Invariante $J(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ bestimmen läfst. Es seien nämlich für $\varrho = 1, 2, 3$; $\iota = 1, 2 \ldots r$, wo r die Gliederzahl der Gruppe angiebt, r von einander unabhängige Transformationen

$$X_\iota f = \sum_\varrho \xi_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}$$

gegeben. Dann mufs die Invariante den r Differential-Gleichungen genügen:

$$(1) \quad \sum_\varrho \xi_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_\varrho} + \sum_\varrho d\xi_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial y_\varrho} = 0.$$

Giebt man der Marke ι fünf verschiedene Werte aus der Reihe $1 \ldots r$, läfst jedesmal einen der sechs Koefficienten $\xi_{\iota 1} \ldots d\xi_{\iota 3}$ weg und bildet vermittelst der übrigen die fünfreihigen Determinanten, so dürfen diese nicht sämtlich bei jeder Wahl der fünf Marken ι identisch verschwinden. Dementsprechend stellen wir die Matrix auf:

$$(2) \quad \begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & d\xi_{11} & d\xi_{12} & d\xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & d\xi_{21} & d\xi_{22} & d\xi_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{51} & \xi_{52} & \xi_{52} & d\xi_{51} & d\xi_{52} & d\xi_{53} \end{Vmatrix}$$

und nehmen an, daſs die fünf Determinanten, welche man hieraus durch Weglassung einer Vertikalreihe erhält, nicht sämtlich verschwinden. Diese sind, je mit abwechselndem Zeichen, den Ableitungen der Invariante nach den sechs Gröſsen x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 proportional. Demnach muſs sein:

$$(3)\quad \frac{\partial J}{\partial y_2} : \frac{\partial J}{\partial y_2} : \frac{\partial J}{\partial y_3} = A_1 : A_2 : A_3,$$

wo A_1 aus (2) durch Weglassung der vierten, — A_2 durch Weglassung der fünften und A_3 durch Weglassung der sechsten Kolonne erhalten wird.

Die Gleichungen (3) können, wie die Elemente der Integralrechnung lehren, bekanntlich nicht für beliebige Funktionen A_1, A_2, A_3 bestehen, sondern müssen gewissen Bedingungen unterliegen. Um diese anzugeben, nehme man α, β, γ als gerade Permutation der Marken 1, 2, 3 an und bilde die Funktionen B_1, B_2, B_3 vermittelst der Festsetzung:

$$(4)\quad B_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial y_\beta};$$

dann muſs die Gleichung:

$$(5)\quad A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$$

identisch befriedigt werden. Zugleich führt die Definition (4) auf die Gleichung:

$$(6)\quad \frac{\partial B_1}{\partial y_1} + \frac{\partial B_2}{\partial y_2} + \frac{\partial B_3}{\partial y_3} = 0.$$

Da ist

$$d\xi_{\iota\varrho} = \frac{\partial \xi_{\iota\varrho}}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \xi_{\iota\varkappa}}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \xi_{\iota\varkappa}}{\partial x_3} y_3,$$

so geht aus der Bildung sofort hervor, daſs die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 vom zweiten Grade in y_1, y_2, y_3 sind; demnach sind B_1, B_2, B_3 lineare Funktionen der Differentiale.

2. Um die Beziehung, in der die drei in y_1, y_2, y_3 quadratischen Formen A_1, A_2, A_3 zu einander stehen, noch deutlicher zu erkennen, wählen wir die obigen fünf Transformationen so, daſs ein gewisses Wertsystem (x') durch die sämtlichen Transformationen $\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3$ in alle benachbarten übergeführt wird, während es bei den Transformationen $\alpha_4X_4 + \alpha_5X_5$ unverändert gelassen wird. Setzen wir also in die Funktionen

$\xi_{\iota\varrho}$ (für $\iota = 1 \ldots 5$, $\varrho = 1, 2, 3$) die Werte x_1', x_2', x_3' ein, so wird

$$\xi_{4\,1} = \xi_{4\,2} = \xi_{4\,3} = 0,\ \xi_{5\,1} = \xi_{5\,2} = \xi_{5\,3} = 0.$$

Setzen wir noch

$$d\xi_{4\varrho} = M_\varrho,\ d\xi_{5\varrho} = N_\varrho,$$

so wird

$$(7) \quad A_\alpha = \Delta.\ (M_\beta N_\gamma - M_\gamma N_\beta),$$

wo $\Delta = |\xi_{\iota\varkappa}|$ für $\iota, \varkappa = 1, 2, 3$ ist, und wo die Ausdrücke M_α, N_α lineare Formen von y_1, y_2, y_3 sind. Da das Verhältnis der Ausdrücke A_1, A_2, A_3 sich nicht ändert, wenn man andere fünf geeignete Transformationen zu Grunde legt, so darf man in den Gleichungen (7) die Gröfsen x_1, x_2, x_3 auch als veränderlich voraussetzen, wofern man nur die Verhältnisse berücksichtigt.

3. Für die drei in y_1, y_2, y_3 linearen Formen B_1, B_2, B_3 haben wir vier verschiedene Fälle zu unterscheiden: entweder verschwinden sie identisch, oder sie unterscheiden sich nur durch einen von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Faktor, oder sie lassen sich durch zwei von einander unabhängige lineare Formen darstellen; oder sie sind ganz unabhängig von einander. Mit anderen Worten: zwischen diesen drei Formen bestehen entweder keine oder eine oder zwei oder drei von einander unabhängige Beziehungen, deren Koefficienten blofse Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind. Giebt es keine derartige Beziehung, so sind die Formen unabhängig von einander; dagegen kommt die Existenz von drei wesentlich verschiedenen Beziehungen darauf hinaus, dafs die Formen identisch verschwinden.

Die Frage, ob diese Eigenschaft der Formen B_1, B_2, B_3 für die Invariante und damit für die Gruppe charakteristisch ist, braucht uns nicht zu beschäftigen; es genügt, dafs die Einteilung zu allen Formen für die Invariante führt.

4. Wir nehmen an erster Stelle an, dafs die drei Formen B_1, B_2, B_3 identisch verschwinden. Dann sind die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 die Ableitungen einer homogenen Funktion dritten Grades. Die Invariante ist also in den Differentialen y_1, y_2, y_3 homogen vom dritten Grade.

Da aber die Ableitungen A_1, A_2, A_3 von J die in (7) angegebene Form haben, wo $M_1 \ldots N_3$ lineare Funktionen von y_1, y_2, y_3 sind, so giebt es für jedes beliebige Wertsystem (x')

mindestens drei Verhältnisse der Differentiale, für welche die Ableitungen sämtlich verschwinden. Denn so oft man die Differentiale und einen von x_1, x_2, x_3 abhängigen Faktor derartig bestimmen kann, dafs die Gleichungen bestehen:

$$M_1 = \omega N_1,\ M_2 = \omega N_2,\ M_3 = \omega N_3,$$

erhalten die drei Gröfsen A_1, A_2, A_3 den Wert null. Die Ableitungen einer Form dritten Grades können aber diese Eigenschaft nur haben, wenn die Form selbst in das Produkt dreier linearer Faktoren übergeht. Im angenommenen Falle hat also die Invariante die Form:

$$(8) \quad J = L_1 L_2 L_3,$$

wo L_1, L_2, L_3 lineare Funktionen von y_1, y_2, y_3 sind, deren Koefficienten von den Variabeln x_1, x_2, x_3 abhangen.

5. An zweiter Stelle setzen wir voraus, dafs die Formen B_1, B_2, B_3 nicht identisch verschwinden, dafs sie sich aber nur durch einen Faktor unterscheiden, der von den Differentialen unabhängig ist. Demnach soll sein:

$$(9) \quad B_1 = a_1 C,\ B_2 = a_2 C,\ B_3 = a_3 C,$$

wo C eine (von null verschiedene) lineare Form von y_1, y_2, y_3 ist und die Koefficienten a_1, a_2, a_3 nur von den Variabeln x_1, x_2, x_3 abhangen. Die Gleichung (5) geht über in:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0,$$

und daraus folgt unmittelbar:

$$a_1 \frac{\partial A_1}{\partial y_\alpha} + a_2 \frac{\partial A_2}{\partial y_\alpha} + a_3 \frac{\partial A_3}{\partial y_\alpha} = 0.$$

Setzt man die Werte (9) in die Gleichung (4) ein, eliminiert aus je zweien die Form C und berücksichtigt die letzte Gleichung, so folgt:

$$a_1 \frac{\partial A_\varrho}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial A_\varrho}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial A_\varrho}{\partial y_3} = 0.$$

Man kann zwei von einander unabhängige lineare Formen M und N von y_1, y_2, y_3 bestimmen, welche den Bedingungen genügen:

$$a_1 \frac{\partial M}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial M}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial M}{\partial y_3} = 0,\ a_1 \frac{\partial N}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial N}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial N}{\partial y_3} = 0.$$

Da diese denselben Differential-Gleichungen genügen, wie die

Funktionen A_ϱ, so müssen sich diese letzteren vermittelst der beiden linearen Funktionen darstellen lassen; es mufs also sein:

$$A_\varrho = b_\varrho M^2 + 2c_\varrho MN + e_\varrho N^2.$$

Nun ist wegen der Gleichungen (9) und (6) auch

$$a_1 \frac{\partial C}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial C}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial C}{\partial y_3} = 0;$$

demnach kann man die Form M durch die Form C ersetzen. Alsdann zerlegt sich die Gleichung (4) für jede gerade Permutation α, β, γ der Marken 1, 2, 3 in die beiden Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial\,(b_\beta C + c_\beta N)}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial\,(b_\gamma C + c_\gamma N)}{\partial y_\beta} &= \tfrac{1}{2} a_\alpha \\ \frac{\partial\,(c_\beta C + e_\beta N)}{\partial y_\gamma} &= \frac{\partial\,(c_\gamma C + e_\gamma N)}{\partial y_\beta}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dafs $c_1 C + e_1 N$, $c_2 C + e_2 N$, $c_3 C + e_3 N$ die Ableitungen einer quadratischen Form nach y_1, y_2, y_3 sind. Da sich diese wieder durch C und N darstellen läfst, zudem C noch mit einem von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Faktor multipliziert und N durch $mN + nC$ ersetzt werden kann, so darf man diese Form gleich $\frac{1}{2}(C^2 + N^2)$ setzen. Daraus folgt:

$$(11)\quad \begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial C}{\partial y_1}, & c_2 &= \frac{\partial C}{\partial y_2}, & c_3 &= \frac{\partial C}{\partial y_3} \\ e_1 &= \frac{\partial N}{\partial y_1}, & e_2 &= \frac{\partial N}{\partial y_2}, & e_3 &= \frac{\partial N}{\partial y_3}. \end{aligned}$$

Da $a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0$ und $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0$ ist, so folgt aus der für A_ϱ angegebenen Form, dafs auch $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ sein mufs. Daraus ergiebt sich

$$(12)\quad b_\varrho = pc_\varrho + qe_\varrho,\ a_\alpha = 2s\,(c_\beta e_\gamma - c_\gamma e_\beta).$$

Setzt man diese Werte in die ersten Gleichungen (10) ein, so folgt:

$$(12^*)\quad q + s = 1.$$

Zugleich geht der obige Ausdruck für A_ϱ über in:

$$(13)\quad A_\varrho = (pc_\varrho + qe_\varrho)\,C^2 + 2c_\varrho RN + e_\varrho N^2.$$

Nun zeigen die Gleichungen (7), dafs es lineare Formen M_ϱ, N_ϱ für $\varrho = 1, 2, 3$ giebt, für welche die Gleichungen erfüllt sind:

$$M_1 A_1 + M_2 A_2 + M_3 A_3 = 0;\ N_1 A_1 + N_2 A_2 + N_3 A_3 = 0.$$

Indem wir etwa in die erste Gleichung die Werte aus (13) einsetzen und beachten, dafs die Formen C und N von einander unabhängig sind, erkennen wir, dafs für $C = 0$ auch jedesmal $e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3 = 0$ sein mufs, und dafs ebenfalls mit N auch $p(c_1 M_1 + c_2 M_2 + c_3 N_3) + q(e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 N_3)$ verschwinden mufs. Wir dürfen daher setzen:

$$e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3 = kC,$$
$$p(c_1 M_1 + c_2 M_2 + c_3 M_3) + q(e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3) = lN.$$

Hiernach geht die aus $M_1 A_1 + M_2 A_2 + M_3 A_3 = 0$ gewonnene Gleichung über in

$$plC + 2lN - 2qkC + kpN = 0,$$

welche verlangt, dafs $pl - 2qk = 0$, $2l + kp = 0$ oder dafs

$$p^2 + 4q = 0$$

ist. Es geht somit der Ausdruck für A_ϱ über in:

$$4A_\varrho = 4c_\varrho(2CN + pC^2) + e_\varrho(4N^2 - p^2C^2).$$

Die drei quadratischen Formen A_ϱ haben also den Faktor $pC + 2N$ gemeinschaftlich. Beachten wir die Gleichungen (11) und berücksichtigen noch, dafs die Ableitungen von J nach y_1, y_2, y_3 den Funktionen A_1, A_2, A_3 proportional sind, so zeigt sich, dafs J eine blofse Funktion von C und N ist, welche durch Integration einer homogenen linearen Differential-Gleichung mit linearen Koefficienten gefunden wird. Die Theorie einer solchen Differential-Gleichung darf hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden. Indem wir das thun, gelangen wir zu dem Resultate:

»Wenn zwischen den drei Formen B_1, B_2, B_3 zwei lineare Bedingungen bestehen, so hat die Invariante entweder die Form

$$L_1^{\omega_1} L_2^{\omega_2}$$

oder die Form

$$L_1 e^{\lambda \frac{L_2}{L_1}},$$

wo L_1 und L_2 homogen linear in den Differentialen y_1, y_2, y_3 sind.«

6. An dritter Stelle kann zwischen den drei Formen B_1, B_2, B_3 eine, und zwar eine einzige Bedingung:

$$(14)\quad a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0$$

bestehen. Diese führt in Verbindung mit der Gleichung (5) zu den Relationen:

$$\frac{a_2 A_3 - a_3 A_2}{B_1} = \frac{a_3 A_1 - a_1 A_3}{B_2} = \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{B_3} = R.$$

Wenn hierin nicht jeder Zähler durch seinen Nenner teilbar ist, so ist R ein Bruch, dessen Zähler vom zweiten und dessen Nenner vom ersten Grade in y_1, y_2, y_3 ist. Von diesem Nenner sind B_1, B_2, B_3 nur durch Faktoren verschieden, welche von y_1, y_2, y_3 unabhängig sind. Dieser Fall ist aber soeben erledigt; er erfordert, dafs zwischen B_1, B_2, B_3 noch eine zweite lineare Beziehung besteht. Demnach müssen wir hier voraussetzen, dafs jeder Zähler durch seinen Nenner teilbar ist, und dafs infolge dessen R eine Funktion ersten Grades in y_1, y_2, y_3 ist.

An erster Stelle dürfen wir annehmen, dafs R identisch verschwindet. Dann verhält sich

$$\frac{\partial J}{\partial y_1} : \frac{\partial J}{\partial y_2} : \frac{\partial J}{\partial y_3} = a_1 : a_2 : a_3, \text{ oder es ist:}$$

$$J = m\,(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3).$$

Dieser Fall ist in der vorhin erhaltenen Form für specielle Fälle der Exponenten eingeschlossen.

Wenn aber die Form R eine eigentliche Form ersten Grades ist, so differentiiere man die Gleichung:

$$(15) \quad a_\beta A_\gamma - a_\gamma A_\beta = B_\alpha R$$

nach y_α und addiere die drei auf diese Weise erhaltenen Gleichungen. Dadurch gelangt man mit Rücksicht auf die Gleichungen (4), (5), (6) zu der Relation:

$$B_1 \frac{\partial R}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial R}{\partial y_2} + B_3 \frac{\partial R}{\partial y_3} = 0.$$

Weil aber R vom ersten Grade in y_1, y_2, y_3 ist, so stellt diese Gleichung eine lineare Beziehung zwischen B_1, B_2, B_3 dar. Bei der hier gemachten Annahme mufs diese auf die Gleichung (14) hinauskommen, oder es ist:

$$(16) \quad R = \frac{1}{l}\,(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3).$$

Beiläufig zeigt diese Gleichung in Verbindung mit (15), dafs die Ableitungen der Invariante nach den Differentialen bis auf einen von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Ausdruck bezw. gleich sind $R^l P_1$, $R^l P_2$, $R^l P_3$.

Der partiellen Differential-Gleichung:

$$B_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + B_3 \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = 0$$

genügt, wie wir gesehen haben, die Form R. Um ihre weiteren Lösungen zu finden, gehen wir in bekannter Weise von dem System gewöhnlicher Differential-Gleichungen aus:

$$\frac{dy_1}{B_1} = \frac{dy_2}{B_2} = \frac{dy_3}{B_3}.$$

Diese Gleichungen ersetzen wir durch die folgenden:

$$\frac{\Sigma e_\iota \, dy_\iota}{\Sigma e_\iota \, B_\iota} = \frac{\Sigma g_\iota \, dy_\iota}{\Sigma g_\iota \, B_\iota} = \frac{\Sigma h_\iota \, dy_\iota}{\Sigma h_\iota \, B_\iota}.$$

Kann man die Koefficienten so wählen, dafs ist:

$$\Sigma e_\iota \, y_\iota = \omega_1 \, \Sigma e_\iota \, B_\iota, \; \Sigma g_\iota \, y_\iota = \omega_2 \, \Sigma g_\iota \, B_\iota,$$
$$\Sigma h_\iota \, y_\iota = \omega_3 \, \Sigma h_\iota \, B_\iota,$$

so sind die Lösungen:

$$\left(e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3\right)^{\omega_1} = C_1 \left(g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3\right)^{\omega_2}$$
$$= C_2 \left(h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3\right)^{\omega_3}$$

In unserem Falle möge sein:

$$B_\alpha = \sum_\varrho b_{\alpha\varrho} y_\varrho.$$

Dann ist die aus den Koefficienten $b_{\alpha\varrho}$ gebildete Determinante gleich null, während die Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden; zudem ist infolge der Gleichung (6)

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0.$$

Von den Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \omega & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \omega & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ist also eine gleich null, und die beiden anderen sind entgegengesetzt gleich. Wenn diese also nicht ebenfalls verschwinden, so hat man, weil die verschwindende Wurzel zu der Lösung $\Phi = R$ führt, nur das zu den beiden anderen Wurzeln gehörende Verhältnis zu berücksichtigen. Da diese Wurzeln entgegengesetzt gleich sind, führen sie auf die Lösung:

$$S = (e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3)\,(g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3).$$

Wenn aber die drei Wurzeln verschwinden, so kann man zu der Form R zwei lineare L_1 und L_2 so hinzufügen, daſs zu der Gleichung $dR = 0$ hinzukommt:

$$\frac{dL_1}{nL_2 + nR} = \frac{dL_2}{pR}.$$

Somit ist die zweite Lösung in diesem Falle:

$$\Phi = pRL_1 - \tfrac{1}{2} mL_2{}^2 - nRL_2.$$

Jedenfalls genügt der obigen partiellen Differential-Gleichung neben der linearen Form R noch eine quadratische Form S. Aus den drei Gleichungen:

$$(17)\quad \begin{aligned} a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3 &= 0 \\ Q_1\frac{\partial S}{\partial y_1} + Q_2\frac{\partial S}{\partial y_2} + Q_3\frac{\partial S}{\partial y_3} &= 0 \\ P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 &= 0 \end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$(18)\quad P_\alpha = a_\alpha V + W\frac{\partial S}{\partial y_\alpha}.$$

Nun liefern die beiden ersten Gleichungen (17) die Relation:

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = \left(a_2\frac{\partial S}{\partial y_3} - a_3\frac{\partial S}{\partial y_2}\right) : \ldots$$

Da man aber die Funktion S mit einem beliebigen von y_1, y_2, y_3 unabhängigen Faktor multiplizieren kann, ohne daſs sie aufhört, der zweiten Gleichung (17) zu genügen, so kann man diesen so wählen, daſs ist:

$$(19)\quad Q_\alpha = a_\beta\frac{\partial S}{\partial y_\gamma} - a_\gamma\frac{\partial S}{\partial y_\beta}.$$

Eliminiert man aus zwei Gleichungen (18) die Funktion V und berücksichtigt die Gleichungen (15) und (19), so folgt $W = R$. Indem man die so erhaltenen Werte (18) in (4) einsetzt, ergeben sich im Hinblick auf die Gleichungen (16) und (19) die drei Beziehungen:

$$a_\beta\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\left(V - \frac{l+1}{l}S\right) = a_\gamma\frac{\partial}{\partial y_\beta}\left(V - \frac{l+1}{l}S\right).$$

Nun ist nach (18) V eine quadratische Form von y_1, y_2, y_3, also auch $V - \frac{l+1}{l}S$. Die Ableitungen dieser letzten Funktion verhalten sich aber wie die Koefficienten von R, also ist:

$$V = \frac{l+1}{l}S + hR^2.$$

Die quadratische Form S behält aber die durch die zweite Gleichung (17) und die Gleichung (19) geforderte Eigenschaft bei, wenn man das mit einem beliebigen Faktor multiplizierte Quadrat von R hinzufügt. Demgemäfs darf man S so bestimmt denken, dafs

$$V = \frac{l+1}{l} S$$

wird. Alsdann wird

$$A_\alpha = a_\alpha \frac{l+1}{l} S + R \frac{\partial S}{\partial y_\alpha} = (l+1) S \frac{\partial R}{\partial y_\alpha} + R \frac{\partial S}{\partial y_\alpha}$$

oder

$$P_\alpha R^l = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (R^{l+1} S);$$

es ist also

$$J = R^{l+1} S,$$

wo R eine Form vom ersten, S vom zweiten Grade in y_1, y_2, y_3 ist.

Nun haben wir stillschweigend angenommen, dafs $l+1$ von null verschieden ist. Wird aber $l = -1$, so sehen wir, dafs wir $V = 0$ setzen dürfen; es ist daher gestattet, im Schlufsresultat $l + 1 = 0$ zu setzen oder die Invariante wird eine quadratische Form der Differentiale.

Den Fall, dafs R ein Faktor von S ist, brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da er bereits vorher erledigt ist. Demnach bleiben nur die Fälle zu unterscheiden, dafs die beiden Gleichungen $R = 0$ und $S = 0$ entweder durch zwei getrennte (reelle oder imaginäre) Wertsysteme y_1, y_2, y_3 oder durch ein einziges derartiges Wertsystem befriedigt werden. Im ersten Falle können wir setzen: $S = GH + kR^2$, wo G und H (reelle oder komplexe) lineare Formen sind. Ist jetzt noch $G = \Sigma g_\varkappa y_\varkappa$, $H = \Sigma h_\varkappa y_\varkappa$, so wird für $J = R^\lambda S^\mu$

$$(20)\quad A_\alpha = k(\lambda + 2\mu) a_\alpha R^2 + \lambda a_\alpha GH + \mu g_\alpha RH + \mu h_\alpha GR.$$

Nun existieren nach (7) drei von den Formen B_1, B_2, B_3 verschiedene lineare Formen M_1, M_2, M_3, für welche $\Sigma M_\varkappa A_\varkappa = 0$ ist. Indem wir für die A_α die Werte (20) einsetzen, folgt:

$$[k(\lambda + 2\mu) R^2 + \lambda GH] \, \Sigma a_\varkappa M_\varkappa + \mu HR \, \Sigma g_\varkappa M_\varkappa + \mu GH \, \Sigma h_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dafs für $R = 0$ jedesmal $\Sigma a_\varkappa M_\varkappa = 0$ oder dafs $\Sigma a_\varkappa M_\varkappa = pR$ ist. Die Einsetzung dieses Wertes in die vorstehende Gleichung führt auf die Beziehung:

$$k(\lambda + 2\mu)pR^2 + \lambda pGH + \mu H\Sigma g_\varkappa M_\varkappa + \mu G\Sigma h_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Für $p = 0$ müfste $\Sigma g_\varkappa M_\varkappa = \sigma G$, $\Sigma h_\varkappa M_\varkappa = \sigma H$ sein; wir würden also bis auf einen gewissen Faktor für M_1, M_2, M_3 auf dieselben Werte gelangen, die sich für B_1, B_2, B_3 aus den Formen (20) für A_1, A_2, A_3 ergeben. Dieser Fall ist auszuschliefsen. Ist aber p von null verschieden, so mufs entweder für $G = H = 0$ auch $R = 0$ sein, oder es mufs $k(\lambda + 2\mu) = 0$ sein. Im ersten Falle erkennen wir unmittelbar, dafs die quadratische Form S in das Produkt zweier Formen ersten Grades zerfällt, im zweiten Falle folgt dasselbe aus der Gestalt, welche die rechte Seite der Gleichung (20) annimmt. Die Invariante ist also $J = R^\lambda G^\mu H^\mu$.

Wenn aber den Gleichungen $R = 0$ und $S = 0$ ein einziges Wertsystem genügt, also $S = RG + H^2$ gesetzt werden kann; und wenn dann die Differentiale y_1, y_2, y_3 in G wieder die Koefficienten g_1, g_2, g_3, in H die Koefficienten h_1, h_2, h_3 haben, so wird

$$A_\alpha = a_\alpha(\lambda + \mu)RG + \lambda a_\alpha H^2 + 2\mu v h_\alpha RH + \mu g R^2.$$

Jetzt geht die Gleichung $\Sigma A_\varkappa M_\varkappa = 0$ über in

$$[(\lambda+\mu)HR + \lambda H^2]\Sigma a_\varkappa M_\varkappa + 2\mu RH\Sigma h_\varkappa M_\varkappa + \mu R^2\Sigma g_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Hieraus ergiebt sich wieder

$$\Sigma a_\varkappa M_\varkappa = pR,$$

und demnach:

$$p(\lambda + \mu)RG + \lambda pH^2 + 2\mu H\Sigma h_\varkappa M_\varkappa + \mu R\Sigma g_\varkappa M_\varkappa = 0.$$

Da der Wert $p = 0$ aus demselben Grunde wie vorher ausgeschlossen ist, mufs

$$\lambda pH + 2\mu v\Sigma h_\varkappa M_\varkappa = qR$$
$$(\lambda - \mu)pG + \mu\Sigma g_\varkappa M_\varkappa = -qH,$$

sein, woraus sich in Verbindung mit (21) nach beliebiger Wahl von p und q die Werte von M_1, M_2, M_3 eindeutig ergeben. Wir erhalten demnach für die Invariante auch noch die Form: $J = (GR + H^2)^\mu R^\lambda$.

7. Es erübrigt jetzt noch, den Fall zu betrachten, dafs die Formen B_1, B_2, B_3 von einander unabhängig sind. Da die Gleichung (5) identisch befriedigt wird, so mufs für dasjenige

Verhältnis der Differentiale y_1, y_2, y_3, für welches B_β und B_γ verschwinden, auch jedesmal A_α gleich null werden. Demnach ist:

$$A_1 = L_2 B_3 - L_3' B_2, \; A_2 = L_3 B_1 - L_1' B_3, \; A_3 = L_1 B_2 - L_2' B_1,$$

wo L_1, L_2, L_3, L_1', L_2', L_3' lineare Formen von y_1, y_2, y_3 sind. Hiernach geht die Gleichung (5) über in

$$(L_1 - L_1')\; B_2 B_3 + (L_2 - L_2')\; B_3 B_1 + (L_3 - L_3')\; B_1 B_2 = 0,$$

aus welcher Gleichung hervorgeht, dafs mit B_α auch jedesmal $L_\alpha - L_\alpha'$ verschwindet, oder dafs ist:

$$L_\alpha - L_\alpha' = q_\alpha B_\alpha,$$

wo q_1, q_2, q_3 blofse Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind. Die Einsetzung dieser Werte in die vorangehende Gleichung liefert noch die Beziehung:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

Zugleich wird:

$$\begin{aligned} A_1 &= L_2 B_3 - L_3 B_2 + q_2 B_2 B_3, \\ A_2 &= L_3 B_1 - L_1 B_3 + q_3 B_3 B_1, \\ A_3 &= L_1 B_2 - L_2 B_1 + q_1 B_1 B_2. \end{aligned}$$

Jetzt bestimme man drei Faktoren r_1, r_2, r_3 durch die Forderung:

$$r_2 - r_3 = q_2, \; r_3 - r_1 = q_1, \; r_1 - r_2 = q_1,$$

was infolge der zwischen q_1, q_2, q_3 bestehenden Gleichung möglich ist, und setze:

$$L_\alpha = M_\alpha - r_\alpha B_\alpha.$$

Dadurch erhält man folgende Darstellung der Formen A_α:

$$(22) \quad A_\alpha = M_\beta B_\gamma - M_\gamma B_\beta.$$

Da die Formen B_1, B_2, B_3 von einander unabhängig sind, können wir auch die Formen M_1, M_2, M_3 durch B_1, B_2, B_3 darstellen; wir setzen:

$$M_\alpha = \sum_\varrho a_{\alpha\varrho} B_\varrho.$$

Indem wir diese Werte in die Gleichungen (22) einsetzen und dann nach der Vorschrift (4) die Formen B_1, B_2, B_3 bilden, ergeben sich zwischen ihnen lineare Beziehungen. Nun sollen diese Formen B_α von einander unabhängig sein; also müssen die einzelnen Ausdrücke auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichungen dieselben Koefficienten haben.

Demnach ergeben sich die Relationen:

$$(23)\qquad \begin{aligned} 1 &= \sum_{\varrho}\left(a_{\beta\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\beta} + a_{\gamma\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\gamma} + a_{\varrho\alpha}\frac{\partial B_\alpha}{\partial y_\varrho}\right) \\ &\sum\left(a_{\beta\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\gamma} - a_{\varrho\gamma}\frac{\partial B_\beta}{\partial y_\varrho}\right) = 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung kann man auch in der Form schreiben:

$$1 = \sum_{\varrho,\sigma} a_{\varrho\sigma}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\sigma} - \sum_{\varrho}\left(a_{\alpha\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\alpha} - a_{\varrho\alpha}\frac{\partial B_\alpha}{\partial y_\varrho}\right).$$

Demnach hat die letzte Summe für $\alpha = 1, 2, 3$ denselben Wert, und da die Addition der drei so erhaltenen Summen den Wert null liefert, so mufs jede für sich verschwinden. Es ist also:

$$(24)\qquad \sum_{\varrho} a_{\alpha\varrho}\frac{\partial B_\varrho}{\partial y_\alpha} = \sum a_{\varrho\alpha}\cdot\frac{\partial B_\alpha}{\partial y_\varrho}.$$

Setzt man noch $B_\alpha = \sum_{\varrho} b_{\alpha\varrho} y_\varrho$, so gehen die letzten Gleichungen über in:

$$a_{23}b_{32} - a_{32}b_{23} = a_{31}b_{13} - a_{13}b_{31} = a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} = p.$$

In zwei Gleichungen (23) kommt die Differenz $a_{\beta\beta} - a_{\gamma\gamma}$ vor; indem man diese eliminiert, gelangt man zu den Gleichungen:

$$pb_{\alpha\alpha} + a_{\gamma\beta}b_{\beta\alpha}b_{\alpha\gamma} - a_{\beta\gamma}b_{\gamma\alpha}b_{\alpha\beta} = q,$$

wo die Gröfsen p und q von der Wahl der Marken α, β, γ unabhängig sind. Die letzten sechs Gleichungen gestatten, falls die Differenz $b_{23}b_{31}b_{12} - b_{32}b_{21}b_{13}$ von null verschieden ist, die Koefficienten $a_{\beta\gamma}$ durch p und q darzustellen. Indem man die (nicht verschwindende) Determinante der $b_{\iota\varkappa}$ mit β und den Koefficienten von $b_{\iota\varkappa}$ in dieser Determinante mit $\beta_{\iota\varkappa}$ bezeichnet und die mit gewissen Koefficienten multiplizierten Ausdrücke p und q durch λ und μ ersetzt, gelangt man zu folgender Darstellung der Koefficienten $r_{\iota\varkappa}$:

$$a_{\iota\iota} = \lambda b_{\iota\iota} + \frac{\mu}{\beta} b_{\iota\iota} + \nu,\ a_{\iota\varkappa} = \lambda b_{\iota\varkappa} + \frac{\mu}{\beta}\beta_{\varkappa\iota} \qquad (\varkappa \gtrless \iota),$$

und es wird:

$$(25)\qquad M_\alpha = \lambda\,(b_{\alpha 1}B_1 + b_{\alpha 2}B_2 + b_{\alpha 3}B_3) + \mu y_\alpha + \nu B_\alpha,$$

wo λ, μ, ν blofse Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind.

Diese Darstellung der Formen M_1, M_2, M_3 führt uns auf das Problem, eine Form $N = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ zu suchen, welche nur mit einem gewissen Faktor ω multipliziert wird, wenn man die y_1, y_2, y_3 durch B_1, B_2, B_3 ersetzt; dann weist die vorstehende Darstellung darauf hin, dafs die Form N auch nur mit einem Faktor ω' multipliziert wird, wenn man y_1, y_2, y_3 durch M_1, M_2, M_3 ersetzt.

Wir wollen diesen Gedanken durchführen. Die Gleichung

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}-\omega & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\omega & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

hat drei von null verschiedene Wurzeln ω_1, ω_2, ω_3, deren Summe wegen der Gleichung

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$$

verschwindet. Wir behandeln zunächst den Fall, dafs die Wurzeln ungleich sind. Für jede Wurzel $\omega_\varkappa$ haben die drei Unterdeterminanten, welche man durch Auslassung der in einer Horizontalreihe stehenden Elemente erhält, dasselbe Verhältnis. Bestimmt man daher die Gröfsen $c_{\varkappa 1}$, $c_{\varkappa 2}$, $c_{\varkappa 3}$ durch die Forderung

$$c_{\varkappa 1} : c_{\varkappa 2} : c_{\varkappa 3} = \omega_\varkappa^{\,2} + b_{11}\omega_\varkappa + \beta_{11} : \beta_{12} \\ + \omega_\varkappa b_{21} : \beta_{13} + \omega_\varkappa b_{31},$$

und setzt

$$(27) \qquad N_\varkappa = c_{\varkappa 1}y_1 + c_{\varkappa 2}y_2 + c_{\varkappa 3}y_3,$$

so ist

$$c_{\varkappa 1}B_1 + c_{\varkappa 2}B_2 + c_{\varkappa 3}B_3 = \omega_\varkappa N_\varkappa .$$

Um die Beziehung der Formen N_1, N_2, N_3 zu den Formen M_α zu erkennen, führe man für den Augenblick die Bezeichnung ein:

$$M_\alpha' = b_{\alpha 1}B_1 + b_{\alpha 2}B_2 + b_{\alpha 3}B_3$$

und bestimme eine lineare Form $N' = c_1'B_1 + c_2'B_2 + c_3'B_3$ durch die Forderung, dafs $\omega' N' = c_1'M_1' + c_2'M_2' + c_3'M_3'$ sein soll. Die Gröfse ω' ist wieder eine Wurzel der Gleichung (26), und zu jeder gehört wieder ein Verhältnis der Gröfsen c_1', c_2', c_3', welches in der angegebenen Weise bestimmt wird. Setzen wir also

$$N_\varkappa' = c_{\varkappa 1}B_1 + c_{\varkappa 2}B_2 + c_{\varkappa 3}B_3,$$

so folgt:

$$N_\varkappa' = \omega_\varkappa N_\varkappa \text{ und } c_{\varkappa 1}M_1' + c_{\varkappa 2}M_2' + c_{\varkappa 3}M_3' = \omega_\varkappa^{\,2} N_\varkappa$$

Demnach ist:

$$c_{\varkappa 1}M_1 + c_{\varkappa 2}M_2 + c_{\varkappa 3}M_3 = (\lambda\omega_\varkappa^2 + \mu + \nu\omega_\varkappa)\, N_\varkappa.$$

Nun ist es angebracht, die drei Formen N_1, N_2, N_3 der Darstellung zu Grunde zu legen. Vor allem kommt es darauf an, die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 durch die N_α darzustellen. Das gelingt recht einfach in folgender Weise.

Indem man die zuletzt gefundenen Relationen benutzt, bilde man den Ausdruck:

$$\{\omega_\beta\,(\lambda\omega_\gamma^2 + \mu + \nu\omega_\gamma) - \omega_\gamma\,(\lambda\omega_\beta^2 + \mu + \nu\omega_\beta)\}\, N_\beta N_\gamma.$$

Dann ergiebt sich unter Anwendung der Gleichungen (22)

$$(\omega_\beta - \omega_\gamma)\,(\lambda\omega_\beta\omega_\gamma - \mu)\, N_\beta N_\gamma = (c_{\beta 2}c_{\gamma 3} - c_{\gamma 2}c_{\beta 3})\, A_1 \\ + (c_{\beta 3}c_{\gamma 1} - c_{\gamma 3}c_{\beta 1})\, A_2 + (c_{\beta 1}c_{\gamma 2} - c_{\gamma 1}c_{\beta 2})\, A_3.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert unter Benutzung einer leicht verständlichen Abkürzung:

$$A_\alpha = c_{1\alpha}\tau_1 N_2N_3 + c_{2\alpha}\tau_2 N_3N_1 + c_{3\alpha}\tau_3 N_1N_2.$$

Die Gröfsen A_1, A_2, A_3 werden also die Ableitungen nach y_1, y_2, y_3, wenn man sie mit $N_1^{\tau_1 - 1}\, N_2^{\tau_2 - 1}\, N_3^{\tau_3 - 1}$ multipliziert. Demnach hat die Invariante die Form:

$$J = N_1^{\tau_1}\, N_2^{\tau_2}\, N_3^{\tau_3},$$

wo N_1, N_2, N_3 lineare Formen von y_1, y_2, y_3 sind.

Wenn die Gleichung (26) zwei gleiche Wurzeln hat und für sie alle Unterdeterminanten verschwinden, so erleidet das Resultat keine weitere Änderung, als dafs einer der Exponenten τ_1, τ_2, τ_3 verschwindet. Dieser Fall ist aber bereits erledigt und kommt deshalb hier nicht in Betracht. Da es unmöglich ist, dafs alle drei Wurzeln der Gleichung (26) gleich sind, so haben wir nur noch den Fall zu untersuchen, dafs für die Doppelwurzel die Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden. Dann bestimmen wir die Koefficienten c so, dafs die Gleichungen bestehen:

$$c_{11}B_1 + c_{12}B_2 + c_{13}B_3 = \omega_1 N_1$$
$$c_{21}B_1 + c_{22}B_2 + c_{23}B_3 = \omega_2 N_2$$
$$c_{31}B_1 + c_{32}B_2 + c_{33}B_3 = \omega_2 N_3 + \varrho N_2.$$

Zugleich wird jetzt:

$$c_{11}M_1' + c_{12}M_2' + c_{13}M_3 = \omega_1^2 N_1$$
$$c_{21}M_1' + c_{22}M_2' + c_{23}M_3' = \omega_2^2 N_2$$
$$c_{31}M_1' + c_{32}M_2' + c_{33}M_3' = \omega_2^2 N_3 + \sigma N_2.$$

Mit diesen Ergebnissen operieren wir in der vorhin angegebenen Weise und gelangen zu dem Resultate:

$$A_\alpha = c_{1\alpha}\tau_1 N_2{}^2 + c_{2\alpha}(-\tau_2 N_1 N_3 + \tau_3 N_1 N_2) + c_{3\alpha}\tau_2 N_1 N_2.$$

Demnach wird jetzt die Invariante:

$$J = N_1^{\tau_1} N_2^{\tau_3} \cdot e^{\tau_2 \frac{N_3}{N_2}}.$$

8. Die vorangehende Entwicklung stützt sich auf die Annahme, dafs die Differenz $b_{23}b_{31}b_{12} - b_{32}b_{21}b_{13}$ von null verschieden ist. Nun ist es zwar nicht schwierig, den ausgeschlossenen Satz in ähnlicher Weise zu erledigen. Indessen dürfte eine Methode den Vorzug verdienen, welche uns nicht zwingt, verschiedene Fälle zu unterscheiden. Wir wollen daher die gewonnenen Resultate auf einem zweiten Wege herleiten. Aus den Gleichungen (23) und (24) folgt für beliebige Gröfsen c_1, c_2, c_3 ganz allgemein:

$$(28) \qquad \sum_{\varrho,\sigma} c_\varrho a_{\varrho\sigma} b_{\sigma\alpha} = \sum c_\varrho b_{\varrho\sigma} a_{\sigma\alpha}.$$

Jetzt bestimme man die Gröfsen c_1, c_2, c_3 so, dafs die drei Gleichungen bestehen:

$$\sum_\varrho c_\varrho b_{\varrho\alpha} = \omega c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Dadurch sind wir wieder auf die Gleichung (26) geführt, und die Gröfsen c ergeben sich unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung wieder aus dem Verhältnis:

$$c_1 : c_2 : c_3 = \omega^2 + b_{11}\omega + \beta_{11} : \omega b_{12} + \beta_{21} : \omega b_{13} + \beta_{31}.$$

In dem Falle, dafs die Gleichung (26) drei verschiedene Wurzeln hat, gehört zu jeder ein System von Koefficienten c. Für jedes derartige System geht die Gleichung (28) über in

$$\sum_{\varrho,\sigma} c_\varrho a_{\varrho\sigma} b_{\sigma\alpha} = \omega \sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\alpha}, \text{ oder}$$

$$\sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\alpha}(b_{\alpha\alpha} - \omega) + \sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\beta} b_{\beta\alpha} + \sum_\sigma c_\sigma a_{\sigma\gamma} b_{\gamma\alpha} = 0.$$

Die Bestimmung der Gröfsen $\sum c_\sigma a_{\sigma 1}$, $\sum c_\sigma a_{\sigma 2}$, $\sum c_\sigma a_{\sigma 3}$ führt also wieder auf die Gleichung (26), und die letzten Gröfsen haben dasselbe Verhältnis wie die Gröfsen c_1, c_3, c_3. Demnach ist:

$$\sum c_\sigma a_{\sigma 1} = \omega' c_1, \; \sum c_\sigma a_{\sigma 2} = \omega' c_2, \; \sum c_\sigma a_{\sigma 3} = \omega' c_3.$$

Indem wir diese Gleichungen mit B_1, B_2, B_3 multiplizieren, und die Formen N_1, N_2, N_3 in der früheren Weise einführen, folgen die Beziehungen:

$$c_{\alpha 1}M_1 + c_{\alpha 2}M_2 + c_{\alpha 3}M_3 = \omega_\alpha{}' (c_{\alpha 1}B_1 + c_{\alpha 2}B_2 + c_{\alpha 3}B_3)$$
$$= \omega_\alpha \omega_\alpha{}' N_\alpha .$$

Wir können daher jetzt auch die Formen A_1, A_2, A_3 auf die oben angegebene Weise vermittelst der Formen N_1, N_2, N_3 darstellen und gelangen für die Invariante auf die Form:

$$J = N_1^{\tau_1} N_2^{\tau_2} N_3^{\tau_3} .$$

Die Änderungen, welche an dieser Entwicklung angebracht werden müssen, wenn die Gleichung (26) eine Doppelwurzel besitzt, für welche nicht sämtliche Unterdeterminanten verschwinden, sind so unbedeutend, dafs sie nicht erwähnt zu werden brauchen. Dagegen ist jetzt eine genauere Untersuchung für den Fall nötig, dafs für eine Wurzel alle Unterdeterminanten gleich null werden. In diesem Falle benutzen wir zur Darstellung der Gröfsen $b_{\iota\varkappa}$ drei Gröfsen g_1, g_2, g_3, deren Summe nicht verschwindet, und setzen fest, dafs

$$b_{23}b_{31}b_{12} = g_1 g_2 g_3$$

ist. Dann mufs sein:

$$b_{23}b_{32} = g_2 g_3,\ b_{31}b_{13} = g_3 g_1,\ b_{12}b_{21} = g_1 g_2.$$

Die Doppelwurzel ist gleich

$$\omega = -\frac{g_1 + g_2 + g_3}{2},\ \text{und}$$

$$b_{11} = g_1 + \omega,\ b_{22} = g_2 + \omega,\ b_{33} = g_3 + \omega.$$

Sobald die Koefficienten c_1, c_2, c_3 der Bedingung genügen:

$$(29)\quad c_1 (b_{11} - \omega) + c_2 b_{21} + c_3 b_{31} = 0,$$

werden auch die beiden entsprechenden Gleichungen befriedigt, sowie die drei Gleichungen:

$$\sum_\sigma c_\sigma \{a_{\sigma\alpha} (b_{\alpha\alpha} - \omega) + a_{\sigma\beta} b_{\beta\alpha} + a_{\sigma\gamma} c_{\gamma\alpha}\} = 0.$$

Genügen die Koefficienten c jetzt noch zwei von den Gleichungen:

$$\Sigma c_\sigma a_{\sigma 1} = \omega' c_1,\ \Sigma c_\sigma a_{\sigma 2} = \omega' c_2,\ \Sigma c_\sigma a_{\sigma 3} = \omega' c_3,$$

so genügen sie auch der dritten. Nun ist die Gleichung

$$\Sigma c_\sigma a_{\sigma 1} : \Sigma c_\sigma a_{\sigma 2} = c_1 : c_2$$

vom zweiten Grade in c_1, c_2, c_3; man genügt ihr in Verbindung mit der Gleichung (29) entweder durch zwei verschiedene Systeme c_1, c_2, c_3 oder durch ein einziges. Dementsprechend erhalten wir für die Invariante wieder eine der beiden Formen, die wir in Nr. 7 angegeben haben.

9. Die verschiedenen Ausdrücke, welche wir durch die vorangehende Entwicklung für die Invariante erhalten haben, lassen sich auf die wenigen Typen zurückführen:

$$L^\lambda M^\mu N^\nu, \; L^\lambda M^\mu e^{\mu \frac{N}{M}}, \; L^\lambda Q^\mu,$$

wo Q eine quadratische Form, L, M, N lineare Formen in den Differentialen sind, und wo einzelne unter den Exponenten auch gleich null sein können. Auch müssen im letzten Ausdruck, wenn die Exponenten λ und μ beide von null verschieden sind, die Formen L und Q in der Beziehung stehen:

$$Q = LM + N^2,$$

wo M und N noch zu bestimmende lineare Formen sind.

10. Gehen wir jetzt wieder auf die Matrix (2) zurück. Die aus ihr gebildeten Determinanten liefern uns die Verhältnisse der Ableitungen der Invariante nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 und nach den Differentialen y_1, y_2, y_3. Dadurch, dafs soeben die verschiedenen Typen angegeben sind, welche die Invariante als Funktion der Differentiale annehmen kann, sind die Ableitungen nach den Differentialen selbst gegeben. Demnach kennen wir den Multiplikator, mit dem wir die einzelnen Determinanten multiplizieren müssen, wenn sie den Ableitungen gleich werden sollen. Somit sind auch die Ableitungen nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 bekannt.

Dieser Weg dürfte besonders geeignet sein, die verschiedenen Formen zu bestimmen, welche die Invariante als Funktion von x_1, x_2, x_3 annehmen kann. Indessen ist diese Kenntnis für unsern nächsten Zweck nicht notwendig. Demnach dürfen wir uns mit folgender Bemerkung begnügen.

Sind α und β zwei (gleiche oder ungleiche) Marken aus der Reihe 1, 2, 3 und setzen wir:

$$\frac{\partial J}{\partial x_\alpha} : \frac{\partial J}{\partial y_\beta} = R_\alpha : A_\beta,$$

so zeigt ein Blick auf die aus der Matrix (2) gebildeten Determinanten, dafs R_α vom dritten, A_β vom zweiten Grade in den Differentialen ist.

Legen wir für J die soeben angegebenen Ausdrücke zu Grunde, so erkennen wir, dafs die Exponenten λ, μ, ν auch von den Variabeln x_1, x_2, x_3 unabhängig, also blofse Konstante sind. Einem dieser Exponenten dürfen wir, falls er nicht verschwindet, einen beliebigen von null verschiedenen Wert beilegen, ihn also etwa gleich eins setzen.

§ 5.

Über die Gruppen, welche einer in den Differentialen homogenen linearen Gleichung genügen.

1. Für unsern nächsten Zweck ist es nicht notwendig, alle Gruppen aufzustellen, zu denen die vorangehende Untersuchung führt; wir wollen aber an einer späteren Stelle im stande sein, aus den Gruppen, zu denen eine Invariante von der angegebenen Art gehört, diejenigen auszuscheiden, für welche bei der Ruhe eines Punktes ein den Punkt enthaltendes Gebilde in sich verbleibt. Zu dem Ende ist es gut, eine allgemeine Untersuchung einzuschalten, deren Wesen wir zunächst charakterisieren wollen.

Ist die Gleichung $R = 0$ homogen in den Differentialen, so gehört zu jedem Wertsystem x_1, x_2, x_3 der Variabeln eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Differentialen y_1, y_2, y_3, für welche die Gleichung erfüllt ist. Wenn jetzt die Invariante einer Gruppe die Form hat $R\varrho S$, wo ϱ von null verschieden ist, so darf jene Mannigfaltigkeit durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. Alle Transformationen der Gruppe, bei denen ein Punkt in Ruhe bleibt, führen die von ihm ausgehenden Differentiale, welche der Gleichung genügen, wieder in solche Differentiale über; wenn aber ein Punkt (x) in (x′) übergeführt wird, so verwandelt sich die angegebene Mannigfaltigkeit der von (x) ausgehenden Differentiale in die Gesamtheit derjenigen Differentiale, welche der Gleichung $R = 0$ genügen, nachdem noch die Werte x_1, x_2, x_3 durch x_1', x_2', x_3' ersetzt sind. Dazu ist notwendig und hinreichend, dafs alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe die Gleichung $R = 0$ befriedigen. Mit anderen

Werten, sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Komponenten einer unendlich kleinen Transformation der Gruppe, so mufs jedesmal die Gleichung erfüllt sein:

$$\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial R}{\partial y_\alpha}d\xi_\alpha\right) = \omega R,$$

wo ω eine beliebige Funktion von x_1, x_2, x_3 ist.

Nun setzen sich die Invarianten aus linearen und quadratischen Formen zusammen; demnach fragen wir zuerst nach denjenigen Gruppen, welche einer Gleichung ersten Grades genügen, und dann nach denjenigen, durch welche eine Gleichung zweiten Grades befriedigt wird. Die erste Aufgabe soll uns in diesem, die zweite im folgenden Paragraphen beschäftigen.

2. In der Gleichung

$$(1)\quad A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = 0$$

mögen A_1, A_2, A_3 beliebige Funktionen der Variabeln x_1, x_2, x_3 sein. Soll diese Gleichung durch eine infinitesimale Transformation, deren Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind, nicht geändert werden, so mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$(2)\quad \sum_\varrho A_\varrho d\xi_\varrho + \sum_{\varrho,\sigma}\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\sigma}\xi_\sigma dx_\varrho = \omega \Sigma A_\varrho dx_\varrho.$$

Indem wir hierin $d\xi_\varrho$ durch $\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_3}dx_3$ ersetzen und die Koefficienten von dx_1, dx_2, dx_3 auf beiden Seiten einander gleich setzen, zerlegt sie sich in drei verschiedene. Um diese recht übersichtlich zu schreiben, führen wir folgende Bezeichnungen ein, wobei wieder α, β, γ eine gerade Permutation der Marken 1, 2, 3 bezeichnet:

$$A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 = \varphi$$

$$(3)\quad B_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta}$$

$$C = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

Offenbar ist jetzt wieder:

$$(4)\quad \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0.$$

Indem wir diese Bezeichnung anwenden, können wir den Bedingungsgleichungen folgende Form geben:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + B_3\xi_2 - B_2\xi_3 &= \omega A_1 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + B_1\xi_3 - B_3\xi_1 &= \omega A_2 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + B_2\xi_1 - B_1\xi_2 &= \omega A_3.
\end{aligned}
$$

Die zweite dieser Gleichungen multiplizieren wir mit A_3, die dritte mit A_2 und subtrahieren sie von einander. In der neuen Gleichung addieren und subtrahieren wir $A_1\xi_1$ und gelangen, indem wir je zwei der Gleichungen (5) in entsprechender Weise behandeln und die Bezeichnung (3) berücksichtigen, zu den neuen Gleichungen:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
C\xi_1 &= B_1\varphi + A_3\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - A_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\
C\xi_2 &= B_2\varphi + A_1\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - A_3\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\
C\xi_3 &= B_3\varphi + A_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - A_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.
\end{aligned}
$$

Dadurch, dafs man die Gleichungen (5) der Reihe nach mit B_1, B_2, B_3 multipliziert und addiert, erhält man die weitere Gleichung:

$$
(7)\quad C\omega = B_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + B_3\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.
$$

Wofern also die Gröfse C nicht identisch verschwindet, gestatten die Gleichungen (6) und (7), die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 jeder infinitesimalen Transformation und die unbekannte Gröfse ω durch eine willkürliche Funktion $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 darzustellen. Wir sehen, dafs unserer Forderung in diesem Falle eine unendliche Gruppe genügt.

Wenn die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 identisch verschwinden, so mufs nach der ersten Gleichung (3) auch φ identisch gleich null sein. Demnach gehören zu ungleichen Funktionen φ und φ_1 auch verschiedene infinitesimale Transformationen. Führten nämlich φ und φ_1 zu denselben Werten von ξ_1, ξ_2, ξ_3, so lieferte die Funktion $\varphi - \varphi_1$ verschwindende Werte der Komponenten, was nicht möglich ist.

Werden zwei infinitesimale Transformationen durch die

Funktionen φ und ψ bestimmt, so gehört die aus ihrer Kombination erhaltene Transformation, wie wir beiläufig bemerken möchten, zu der Funktion:

$$\frac{1}{C}\left\{\Sigma B_\varrho\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_\varrho}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\varrho}\right)-A_1\frac{\partial\,(\varphi,\psi)}{\partial(x_2,x_3)}-A_2\frac{\partial\,(\varphi,\psi)}{\partial(x_3,x_1)}\right.$$
$$\left.-A_3\frac{\partial\,(\varphi,\psi)}{\partial(x_1,x_2)}\right\},$$

wo das Symbol $\frac{\partial\,(\varphi,\psi)}{\partial(x_\alpha,x_\beta)}$ die Funktionaldeterminante von φ und ψ nach x_α und x_β bezeichnet.

3. Ist die Form

$$(8)\quad A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$$

die Invariante einer Gruppe, soll sie also durch ihre Transformationen nicht geändert werden, so mufs $\omega = 0$ sein. Bei einem nicht verschwindenden Werte von C ist die Funktion φ, von der die Komponenten nach (6) abhangen, wegen der Gleichung (6) nicht willkürlich, sondern mufs der Differentialgleichung genügen:

$$(9)\quad B_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+B_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=0.$$

Die Gruppe ist wieder unendlich, aber ihre Transformationen hangen nicht mehr von einer beliebigen Funktion dreier Variabeln, sondern nur von denjenigen Funktionen ab, die einer Differentialgleichung genügen. Sind ψ und χ zwei wesentlich verschiedene Lösungen, so ist bekanntlich die allgemeine Lösung eine beliebige Funktion von ψ und χ, also

$$\varphi\,(x_1,\,x_2,\,x_3)=\Phi\,(\psi,\,\chi).$$

Damit der Punkt (x') durch die Transformation $(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)$ in Ruhe gehalten werde, mufs, wie die Gleichungen (3) und (5) für $\omega = 0$ zeigen, nicht nur $\varphi\,(x') = 0$ sein, sondern es müssen auch $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ nach Einsetzung von x_1, x_2', x_3' verschwinden. Nun werden die Gleichungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}:\frac{\partial\psi}{\partial x_2}:\frac{\partial\psi}{\partial x_3}=\frac{\partial\chi}{\partial x_1}:\frac{\partial\chi}{\partial x_2}:\frac{\partial\chi}{\partial x_3}$$

infolge der Gleichung (9) für die Punkte einer gewissen Fläche erfüllt. Gehört der Punkt (x') dieser Fläche nicht an, hat er, wie man sich ausdrückt, allgemeine Lage, so mufs die Funktion Φ so gewählt werden, dafs für ihn $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = 0$ ist. Dann werden diese drei Gleichungen aber auch für diejenigen Werte erfüllt, für welche ψ und χ dieselben Werte haben wie für x_1', x_2', x_3'; mit anderen Worten, die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 verschwinden für alle Punkte der Linie:

$$\psi(x) = \psi(x'), \ \chi(x) = \chi(x').$$

Dadurch haben wir folgenden Lehrsatz gewonnen:

»Wenn die Invariante einer Gruppe in drei Veränderlichen für zwei unendlich nahe Wertsysteme in eine lineare Form der Differentiale übergeht, deren Koefficienten die Eigenschaft haben, dafs die durch die beiden letzten Gleichungen (3) definierte Gröfse C von null verschieden ist, so lassen alle Transformationen dieser Gruppe, bei denen ein Wertsystem, das nicht besonderen Bedingungen unterliegt, unverändert bleibt, auch die Wertsysteme einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ungeändert, und dieser Mannigfaltigkeit gehört das gegebene Wertsystem selbst an. Unterwirft man den Raum den durch diese Gruppe gegebenen Umformungen, so geht durch jeden Punkt des Raumes eine Linie von der Eigenschaft, dafs alle Punkte dieser Linie jedesmal ihre Lage beibehalten, sobald einer ihrer Punkte in Ruhe gehalten wird.«

4. Wenn identisch $C = 0$ ist, so kommen die vier Gleichungen (6) und (7) auf zwei von einander unabhängige partielle Differentialgleichungen hinaus. Hätten diese keine gemeinschaftliche Lösung, so würden nur solche Transformationen der Forderung genügen, welche sich aus den Gleichungen (3) und (5) für $\varphi = 0$ ergeben. Da aber hiernach zwischen den Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 eine homogene lineare Beziehung bestände, müfste die Gruppe intransitiv sein. Damit eine transitive Gruppe der Bedingung genügt, müssen die angegebenen Differentialgleichungen eine Lösung $\varphi = M(x_1, x_2, x_3)$ haben. Jetzt setze man

$$A_\alpha = MN_\alpha,$$

wodurch $B_\alpha = M\left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial N_\gamma}{\partial x_\beta}\right) + N_\beta \frac{\partial M}{\partial x_\gamma} - N_\gamma \frac{\partial M}{\partial x_\beta}$ für eine gerade Permutation α, β, γ wird. Indem wir in den Gleichungen (6) den Gröſsen A_α und B_α diese Werte geben und φ durch M ersetzen, folgt

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial N_\gamma}{\partial x_\beta},$$

oder es sind N_1, N_2, N_3 die Ableitungen einer Funktion N nach den Variabeln x_1, x_2, x_3. Zugleich wird

$$B_\alpha = \frac{\partial N}{\partial x_\beta}\frac{\partial M}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial N}{\partial x_\gamma}\frac{\partial M}{\partial x_\beta}.$$

Jetzt gehen die Gleichungen (6) für ein beliebiges φ über in

$$\frac{\partial N}{\partial x_\beta}\frac{\partial\left(\frac{\varphi}{M}\right)}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial N}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\left(\frac{\varphi}{M}\right)}{\partial x_\beta}.$$

Daraus folgt, daſs der Quotient $\frac{\varphi}{M}$ eine bloſse Funktion von N ist, oder daſs

$$\varphi = M\psi(N)$$

sein muſs. Umgekehrt erkennt man auch sofort, daſs, wofern M irgend eine Lösung der gegebenen Differentialgleichungen ist und die Funktion N in der angegebenen Weise daraus bestimmt wird, die Funktion $\varphi = M\psi(N)$ für eine beliebige Funktion ψ von N den Gleichungen (6) und (7) genügt. Die erste Gleichung (3) geht jetzt über in

$$(10)\quad \frac{\partial N}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial N}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial N}{\partial x_3}\xi_3 = \psi(N),$$

und jede Gleichung (5) nimmt die Form an:

$$M\psi'(N)\frac{\partial N}{\partial x_\alpha} + \left(\xi_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial M}{\partial x_2} + \xi_3\frac{\partial M}{\partial x_3}\right)\frac{\partial N}{\partial x_\alpha}$$
$$= \omega M\frac{\partial N}{\partial x_\alpha},$$

oder führt auf die Relation:

$$(11)\quad \omega M = M\psi'(N) + \xi_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial M}{\partial x_2} + \xi_3\frac{\partial M}{\partial x_3}.$$

Nachdem M und N in der angegebenen Weise bestimmt sind, hangen die Gröſsen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ω in der durch die Gleichungen (10) und (11) dargestellten Weise von einer beliebigen

Funktion ψ (N) von N ab. Wie wir sehen, sind auch nach Annahme dieser Funktion die Werte von ξ_1, ξ_2, ξ_3 noch nicht bestimmt; sie müssen nur so gewählt werden, dafs sie der Gleichung (10) genügen; dann ist ω durch die letzte Gleichung vollständig gegeben.

Nun stellt die linke Seite von (10) bis auf einen unendlich kleinen Faktor die Änderung dar, welche die Funktion N durch eine infinitesimale Transformation (ξ_1, ξ_2, ξ_3) erleidet. Die Transformationen der Gruppe ändern also den Ausdruck N nicht beliebig, sondern verwandeln ihn regelmäfsig in eine blofse Funktion von N selbst. Demnach geht jede Fläche der Schar N (x_1, x_2, x_3) = Const. in eine Fläche derselben Schar über. Alle Transformationen, bei denen ein Punkt (x') in Ruhe gehalten wird, verschieben demnach die Fläche

$$N(x_1, x_2, x_3) = N(x_1', x_2', x_3')$$

in sich. Wir haben also den Lehrsatz erhalten:

»Wenn die Koefficienten A_1, A_2, A_3 der Bedingung genügen, dafs die aus ihnen nach der Vorschrift (3) gebildete Gröfse C identisch verschwindet, so genügen der Gleichung (1) nur solche transitive Gruppen, bei denen eine gewisse Flächenschar in sich transformiert wird; alle Transformationen dieser Gruppe, bei denen ein Punkt in Ruhe gehalten wird, verschieben eine durch den Punkt gehende Fläche in sich.«

Auf die Vereinfachungen, welche in den Formeln eintreten, wenn M eine blofse Konstante ist, wollen wir nur hinweisen; es ist für unsern Zweck nicht notwendig, hierbei zu verweilen.

5. So einfach die voranstehende Herleitung ist, wird es doch angebracht sein, sie durch eine andere zu ersetzen, bei der wir aus den Lehrbüchern der Integralrechnung den Satz voraussetzen, dafs für ein identisch verschwindendes C die Koefficienten A_1, A_2, A_3 den Ableitungen einer Funktion N nach den Variabeln proportional sind. Setzt man also

$$A_\alpha = M \frac{\partial N}{\partial x_\alpha}$$

in die Gleichung (2) ein und benutzt die Abkürzungen:

$$\Sigma\, \xi_\varrho \frac{\partial N}{\partial x_\varrho} = P,\ \Sigma\, \xi_\varrho \frac{\partial M}{\partial x_\varrho} = Q,$$

so gehen aus ihr nach Division durch M die drei Relationen hervor:

$$\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = \left(\omega - \frac{Q}{M}\right) \frac{\partial N}{\partial x_\alpha}.$$

Daraus folgt, dafs P eine blofse Funktion $\psi(N)$ von N und dafs $\omega - \frac{Q}{M} = \psi'(N)$ ist. Dadurch sind wir wieder auf die Gleichungen (10) und (11) zurückgeführt.

6. Wenn eine Gruppe zwei Gleichungen

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 &= 0 \\ A_1' dx_1 + A_2' dx_2 + A_3' dx_3 &= 0 \end{aligned}$$

genügt, die in den Differentialen linear sind, so wird durch die Gruppe auch jede Gleichung befriedigt:

$$(A_1 + KA_1')\, dx_1 + (A_2 + KA_2')\, dx_2 + (A_3 + KA_3')\, dx_3 = 0,$$

wo K eine ganz beliebige Funktion von x_1, x_2, x_3 ist. Nun setze man $\bar{A}_\alpha = A + KA_\alpha'$) und bilde B_α' und C' aus den A_α', sowie $\bar{B}_\alpha$ und $\bar{C}$ aus den $\bar{A}_\alpha$ in derselben Weise, wie die Ausdrücke B_α und C aus den A_α gebildet werden. Dabei wird:

$$\text{(13)} \quad -\bar{C} = C + K(A_1 B_1' + A_2 B_2' + A_3 B_3' + A_1' B_1 + A_2' B_2 + A_3' B_3) + K^2 C' + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1' & A_2' & A_3' \\ \frac{\partial K}{\partial x_1} & \frac{\partial K}{\partial x_2} & \frac{\partial K}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Die Forderung, dafs $\bar{C}$ identisch verschwinden soll, führt für die Funktion K auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die Funktion selbst im zweiten Grade vorkommt. Dafs jede solche Differentialgleichung eine Lösung hat, ist bekannt. Wir überzeugen uns aber leicht, dafs es im allgemeinen zwei wesentlich verschiedene Lösungen dieser Gleichung giebt. Ist nämlich K_1 eine Lösung, so ersetze man A_α' durch $A_\alpha + K_1 A_\alpha'$; dann wird die aus den neuen A_α' hergeleitete Gröfse C gleich null. Zur Bestimmung von K bleibt aber jetzt noch eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Jetzt seien K_1 und K_2 zwei verschiedene Funktionen, für welche die rechte Seite von (13) verschwindet. Dann werden die drei Ausdrücke $A_\alpha + K_1 A_\alpha'$ proportional den Ableitungen einer Funktion N_1, und $A\alpha + K_2 A\alpha'$ proportional den Ableitungen einer Funktion N_2 nach den Variabeln. Bei den Transformationen der Gruppe geht also der Ausdruck N_1 in eine Funktion von sich selbst über, und ebenso der Ausdruck N_2. Wir erhalten also den Satz:

»Wenn man den Raum durch eine Gruppe umgestaltet, welche zwei in den Differentialen linearen Gleichungen genügt, so giebt es zwei Scharen von Flächen, welche die Eigenschaft haben, dafs alle Flächen der Schar nur in Flächen derselben Schar übergeführt werden. Alle Transformationen der Gruppe, welche die Lage eines Punktes ungeändert lassen, verschieben zwei Flächen in sich.«

§ 6.

Über die Gruppen, welche einer in den Differentialen quadratischen Gleichung genügen.

1. Die vollständige Lösung der Aufgabe, alle Gruppen zu bestimmen, welche der Gleichung

$$(1) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} dx_\iota \, dx_\varkappa = 0$$

genügen, wo die Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ Funktionen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 sind, bietet deshalb besondere Schwierigkeit, weil die Koefficienten einen wesentlichen Einflufs auf die Gruppe haben. Indessen ist die Ermittelung der Beziehungen, welche zwischen den Koefficienten bestehen müssen, falls überhaupt eine unendlich kleine Transformation der Gruppe genügt, für uns ohne Interesse. Für unsere späteren Anwendungen ist nur der Fall wichtig, dafs die Gruppe nicht nur transitiv ist, sondern auch noch Transformationen enthält, bei denen ein beliebiges Wertsystem ungeändert bleibt. Um diejenigen Gruppen zu finden, welche diese beiden Forderungen erfüllen, können wir uns im wesentlichen ganz einem Verfahren anschliefsen, das Lie[26]) bei einer etwas verschiedenen Voraussetzung eingeschlagen hat. Bei der Verschiedenheit der Forderungen werden wir aber noch zu einer Reihe von Gruppen gelangen, die bei Lie entweder ganz fehlen oder von einem anderen Ausgangspunkte aus gewonnen werden.

2. Den Fall, dafs die Determinante der Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ identisch verschwindet, brauchen wir nicht durchzuführen; es

genügt für unsern Zweck, auf eine Eigenschaft hinzuweisen, welche die entsprechenden Gruppen unter dieser Bedingung besitzen. In diesem Falle läfst sich nämlich die linke Seite von (1) als das Produkt zweier (reeller oder komplexer) linearer Formen M und N darstellen; die Gruppe, welche der Gleichung (1) genügt, befriedigt die beiden linearen Gleichungen $M = 0$ und $N = 0$. Wir kommen demnach auf den Fall zurück, den wir am Schlufs des vorigen Paragraphen betrachtet haben. Wie wir dort gefunden haben, giebt es alsdann zwei Flächenscharen von der Eigenschaft, dafs die Flächen einer jeden Schar nur in Flächen derselben Schar umgewandelt werden. Bei der Ruhe eines Punktes werden also zwei Flächen in sich bewegt.

3. Um so sorgfältiger müssen wir auf den Fall eingehen, dafs die Determinante $|A_{\iota\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet, die linke Seite von (1) also eine eigentliche Form zweiten Grades in den Differentialen ist. Dabei machen wir die specielle Annahme, dafs diese Determinante auch nicht gleich null wird, wenn man in ihren Elementen für x_1, x_2, x_3 das Wertsystem (0, 0, 0) einsetzt. Wofern diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, kann man sie dadurch verwirklichen, dafs man zu den Variabeln gewisse Konstanten addiert und die Summen als neue Veränderliche einführt. Nimmt der Koefficient $A_{\iota\varkappa}$ für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ den Wert $A^0_{\iota\varkappa}$ an, so soll sich die Form $\Sigma A^0_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ nicht als das Produkt von zwei linearen Faktoren darstellen lassen. Dann kann man aber durch eine lineare Umgestaltung der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3, bei der auch komplexe Gröfsen zugelassen werden, die Form $\Sigma A^0_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ in die Summe dreier Quadrate verwandeln; man darf also annehmen, dafs ist:

$$(2)\quad A^0_{\iota\iota} = 1,\ A^0_{\iota\varkappa} = 0 \qquad \text{für } \iota \gtrless \varkappa.$$

Dementsprechend sehen wir in den folgenden Untersuchungen von der Form $\Sigma A_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ an sich ab und verlangen nur, dafs sie für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die Gestalt annimmt: $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$.

4. In der infinitesimalen Transformation, welche die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 hat und die wir wieder symbolisch in der Form $\Sigma \xi_\iota p_\iota$ schreiben, entwickeln wir die einzelnen Komponenten nach Potenzen der Variabeln. Da unsere Gruppe transitiv sein soll, der Punkt (0, 0, 0) somit in alle Lagen seiner Um-

gebung übergeführt werden kann, müssen die Transformationen vorkommen:

$$(3)\quad P_1 = p_1 + \ldots,\ P_2 = p_2 + \ldots,\ P_3 + p_3 + \ldots,$$

wo die fehlenden Glieder die Variabeln (x) mindestens in der ersten Potenz enthalten. Von allen weiteren in der Gruppe enthaltenen infinitesimalen Transformationen dürfen wir die P_1, P_2, P_3 abziehen, nachdem wir sie mit beliebigen konstanten Faktoren multipliziert haben. Demnach dürfen wir mit Lie annehmen, dafs in allen weiteren Transformationen die Variabeln mindestens in der ersten Potenz vorkommen. Beginnt aber eine Transformation mit den Gliedern $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta$ und enthalten die fehlenden Glieder nur höhere Potenzen der Variabeln, so mufs, damit für die Anfangsglieder $dx_1 d\xi_1 + dx_2 d\xi_2 + dx_3 d\xi_3 = \omega\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ wird, sein:

$$(4)\quad a_{\alpha\alpha} = a_{\beta\beta},\ a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0 \qquad \text{für } \alpha \gtrless \beta.$$

Demnach können alle infinitesimalen Transformationen erster Ordnung aus den vier folgenden zusammengesetzt werden:

$$(5)\quad \begin{aligned} &S_{23} = x_2 p_3 - x_3 p_2 + \ldots,\ S_{31} = x_3 p_1 - x_1 p_3 + \ldots, \\ &S_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1 + \ldots,\ U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \\ &\qquad + \ldots, \end{aligned}$$

wo die fehlenden Glieder mindestens die zweiten Potenzen der Variabeln enthalten.

5. Solange wir also in der Entwicklung der sämtlichen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung nur die Glieder der ersten Dimension betrachten, ist die Zahl der von einander unabhängigen höchstens gleich vier; diese Zahl kann aber auch eine kleinere sein. Ist dieselbe gleich μ, so können wir μ infinitesimale Transformationen erster Ordnung so auswählen, dafs in ihnen die Glieder ersten Grades von einander unabhängig sind. Dann kann man aber wieder erreichen, dafs in den weiteren infinitesimalen Transformationen, die man für die Bestimmung der Gruppe zu Grunde legt, alle Glieder der ersten Ordnung fehlen, dafs also alle anderen Transformationen in ihrer Entwicklung mit den höheren Potenzen der Variabeln beginnen. Ist jetzt

$$(6)\quad \Sigma\, b_{\iota\varkappa}^{\lambda} x_\iota x_\varkappa p_\lambda + \ldots,$$

wo λ eine blofse Marke ist und wo allgemein die Beziehung gilt:

$$(7) \quad b^{\lambda}_{\iota\varkappa} = b^{\lambda}_{\varkappa\iota},$$

eine Transformation zweiter Ordnung, bei deren Darstellung wir annehmen, dafs die fehlenden Glieder mindestens von der dritten Dimension sind, so darf man die Transformation (6) mit den drei Transformationen (3) kombinieren. Dadurch erhalten wir drei Transformationen erster Ordnung und zwar, indem man alle Koefficienten durch zwei dividiert, die folgenden:

$$\sum_{\varkappa,\lambda} b^{\lambda}_{1\varkappa} x_\varkappa p_\lambda + \ldots, \quad \sum_{\varkappa,\lambda} b^{\lambda}_{2\varkappa} x_\varkappa p_\lambda + \ldots, \quad \sum_{\varkappa,\lambda} b^{\lambda}_{3\varkappa} x_\varkappa p_\lambda + \ldots$$

Vorhin haben wir die Transformationen erster Ordnung in der Form $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta + \ldots$ geschrieben. In der ersten Transformation, die wir jetzt erhalten, wird der Koefficient $a_{\alpha\beta}$ durch $b^{\beta}_{1\alpha}$ vertreten, in der zweiten durch $b^{\beta}_{2\alpha}$, in der dritten durch $b^{\beta}_{3\alpha}$. Demnach mufs wegen der Gleichungen (4) und (7) für ungleiche Marken α, β, γ sein:

$$b^{\gamma}_{\alpha\beta} = - b^{\beta}_{\alpha\gamma} = - b^{\beta}_{\gamma\alpha} = b^{\alpha}_{\gamma\beta} = b^{\alpha}_{\beta\gamma}$$
$$= - b^{\gamma}_{\beta\alpha} = - b^{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

Wir sehen, dafs $b^{\gamma}_{\alpha\beta} = - b^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ ist.

Dagegen ist:

$$b^{\alpha}_{\alpha\alpha} = b^{\beta}_{\alpha\beta} = b^{\beta}_{\beta\alpha} = - b^{\alpha}_{\beta\beta}.$$

Setzt man $b^{\alpha}_{\alpha\alpha} = b_\alpha$, so kann man die Koefficienten in (6) durch die drei Koefficienten b_1, b_2, b_3 ausdrücken. Wir schreiben noch:

$$(8) \quad V_\alpha = 2x_\alpha \Sigma p_\varkappa x_\varkappa - p_\alpha \Sigma x_\varkappa^2 + \ldots;$$

dann geht der Ausdruck (6) über in $\Sigma b_\nu V_\nu$. Setzt man allgemein $S_{\varkappa\iota} = - S_{\iota\varkappa}$, so kann man die Transformationen erster Ordnung, auf welche die Kombination dieser neuen Transformation mit P_1, P_2, P_3 gelangt, in der Gestalt schreiben:

$$(9) \quad \begin{array}{l} b_1 U - b_2 S_{12} - b_3 S_{13} \\ b_2 U - b_1 S_{21} - b_3 S_{23} \\ b_3 U - b_1 S_{31} - b_2 S_{32}. \end{array}$$

Ebenso müssen bis auf infinitesimale Transformationen der dritten und höheren Ordnung die Beziehungen gelten:

(10) $(UV_\alpha) = V_\alpha,\ (S_{\alpha\beta}V_\alpha) = -V_\beta,\ (S_{\alpha\beta}V_\gamma) = 0.$

Nun wird sich aber sogleich zeigen, daſs weitere Transformationen nicht hinzutreten; die Gleichungen (10) sind also streng richtig.

6. Daſs keine infinitesimale Transformationen dritter Ordnung existieren, beweist Lie auf folgende Weise. Es seien in

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 homogene Funktionen dritten Grades in x_1, x_2, x_3, und die nicht niedergeschriebenen Glieder mögen die Variabeln nur in höheren Potenzen enthalten. Durch Kombination mit P_α ergiebt sich eine Transformation der zweiten Ordnung, die ebenfalls der Gruppe angehört. Demnach müssen die Funktionen ξ_1, ξ_2, ξ_3 für jede Marke α den Bedingungen genügen:

$$\sum_\varkappa \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x_\alpha} p_\varkappa = \sum_\lambda c_{\alpha\lambda} \left[2x_\lambda \sum_\varkappa x_\varkappa p_\varkappa - p_\lambda \sum x_\varkappa{}^2 \right].$$

Differentiieren wir diese Gleichung nach x_β, so bekommen wir:

$$\sum \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = 2 \sum c_{\alpha\lambda} (x_\lambda p_\beta - x_\beta p_\lambda) + 2c_{\alpha\beta} \sum x_\varkappa p_\varkappa.$$

Vertauschen wir hier α und β, die wir als verschieden annehmen, so darf sich die rechte Seite nicht ändern; also ergiebt sich

$$c_{\alpha\varkappa} = c_{\beta\varkappa} = 0 \text{ (für } \varkappa \gtrless \alpha\beta) \text{ und } c_{\alpha\alpha} + c_{\beta\beta} = 0.$$

Es verschwinden hiernach alle Koefficienten c, da man für α und β irgend zwei Marken der Reihe 1, 2, 3 wählen darf und die drei Gleichungen $c_{\alpha\alpha} + c_{\beta\beta} = 0$ nur befriedigt werden, wenn die drei Gröſsen $c_{\alpha\alpha}$ verschwinden. Da nun die sämtlichen Differential-Quotienten der Funktionen ξ_1, ξ_2, ξ_3 identisch gleich null sind, gilt dasselbe für die Funktionen selbst wegen der bekannten Beziehung:

$$3\xi_\alpha = x_1 \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_3}.$$

Ebensowenig können Transformationen einer höhern Ordnung vorkommen. Durch Kombination einer Transformation von der Ordnung $\mu + 1$ mit den Transformationen P_α ergeben sich solche von der Ordnung μ. Sobald diese letzteren und damit die Ableitungen der ersteren identisch verschwinden, müssen die ersteren selbst identisch gleich null sein. Demnach kann in unserm Falle keine infinitesimale Transformation vorkommen, deren Ordnung gröfser als zwei ist.

7. Ehe wir weitergehen, müssen wir zwei einfache Bemerkungen vorausschicken. An erster Stelle weisen wir darauf hin, dafs eine infinitesimale Transformation von der höchsten Ordnung, die in der Gruppe vorkommt, durch ihre Anfangsglieder vollständig bestimmt ist, die von einer niedrigeren Ordnung aber nicht. Wenn z. B. in einer Gruppe keine Transformation von der Ordnung $\nu + 1$ enthalten ist, aber A_ν, B_ν . . . von der ν^{ten}, $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$ . . . von der $\nu - 1^{\text{ten}}$, $A_{\nu-2}$, $B_{\nu-2}$ . . . von der $\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung sind, so müssen A_ν und B_ν identisch sein, falls sie in den Gliedern von der ν^{ten} Ordnung übereinstimmen, da sonst die Gruppe die Transformation $A_\nu - B_\nu$ enthielte, deren Ordnung $> \nu$ ist. Dagegen ist $A_{\nu-1} + aA_\nu + a'B_\nu + \ldots$ von der Ordnung $\nu - 1$ und besitzt dieselben Anfangsglieder wie $A_{\nu-1}$, wofern $a, a' \ldots$ beliebige Konstanten sind. Entsprechend ist $A_{\nu-2} + bA_{\nu-1} + b'B_{\nu-1} + \ldots + cA_\nu + c'B_\nu + \ldots$ von der Ordnung $\nu - 2$, wenn man für $b, b', \ldots c, c' \ldots$ beliebige Konstanten wählt. Diese Eigenschaft benutzt Lie, um die Transformationen von einer niedrigeren Ordnung so zu bestimmen, dafs für ihre Kombination möglichst einfache Gesetze gelten; er normiert, wie er sich ausdrückt, die Transformationen.

Zweitens sieht man sofort, dafs durch die Kombination $(A_\mu A_\nu)$ einer Transformation A_μ von der μ^{ten} mit einer Transformation A_ν von der ν^{ten} Ordnung sich eine Transformation von der Ordnung $\mu + \nu - 1$ ergiebt und dafs darin die Glieder der niedrigsten Ordnung, aber nur diese bekannt sind, falls man die Anfangsglieder von A_μ und A_ν kennt.

8. Wir gehen jetzt dazu über, aus den angegebenen Transformationen diejenigen auszuwählen, welche mit P_1, P_2, P_3 vereint in derselben Gruppe vorkommen können. Dabei betrachten wir zuerst den Fall, dafs die Gruppe mindestens zwei infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung enthält; es seien dies $\Sigma b_\nu V_\nu$ und $\Sigma b'_\nu V_\nu$. Jede dieser beiden führt auf drei Transformationen

erster Ordnung (10); welche auf mindestens zwei verschiedene hinauskommen. Da zudem die Transformationen

$$b_1U - b_2S_{12} - b_3S_{13} \text{ und } b_1'U - b_2'S_{12} - b_3'S_{13}$$

nur identisch sein können, wenn die Verhältnisse $b_1 : b_2 : b_3 = b_1' : b_2' : b_3'$ gleich sind, so enthält die Gruppe vier Transformationen erster Ordnung, und als diese dürfen geradezu $U, S_{23}, S_{31}, S_{12}$ gewählt werden. Nun führt die Kombination von S_{23} mit $\Sigma b_\nu V_\nu$ auf $b_3V_2 - b_2V_3$ und die Kombination dieser mit S_{31} auf b_2V_1. Ist also b_2 von null verschieden, so kommt in der Gruppe die Transformation V_1 vor; diese mit S_{12} und S_{13} kombiniert liefert V_2 und V_3. Unter der gemachten Annahme enthält die Gruppe die zehn Transformationen:

$$P_\alpha,\ S_{\alpha\beta},\ U,\ V_\alpha \qquad \text{für } \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

9. Besitzt die Gruppe nur eine infinitesimale Transformation zweiter Ordnung, so darf sie nicht die drei Transformationen S_{23}, S_{31}, S_{12} enthalten. Denn wir haben soeben gesehen, dafs die Kombination irgend einer Transformation $\Sigma b_\nu V_\nu$ mit diesen drei Transformationen erster Ordnung zu den drei Transformationen V_1, V_2, V_3 führt. Mit der Transformation $W = \Sigma b_\nu V_\nu$ sind aber jedenfalls die Transformationen (9) zu vereinigen; aus ihrer Kombination mit W erhalten wir aber die drei Transformationen zweiter Ordnung $2b_\alpha W - V_\alpha \Sigma b_\chi^2$ für $\alpha = 1, 2, 3$. Diese sind unter einander und mit der Transformation W nur dann identisch, wenn $\Sigma b_\chi^2 = 0$ ist. Legen wir diese Bedingung zu Grunde, so kommen die drei Transformationen (9) auf zwei hinaus. Falls dann aufserdem b_1 von null verschieden ist, kann man die Transformationen (9) durch

$$S = b_1U - b_2S_{12} - b_3S_{13} \text{ und } S' = b_1S_{23} + b_2S_{31} + b_3S_{12}$$

ersetzen. Ist jetzt eine weitere infinitesimale Transformation erster Ordnung in der Gruppe enthalten, so kann man annehmen, dafs in ihrem Ausdruck U und S_{23} nicht vorkommen. Die Kombination von $c_2S_{31} + c_3S_{12}$ mit W führt aber, falls nicht c_2 und c_3 verschwinden, auf eine weitere Transformation zweiter Ordnung. Demnach enthält eine transitive Gruppe, wofern sie eine einzige, infinitesimale Transformation der zweiten Ordnung enthält, zwei Transformationen erster Ordnung; sie wird durch die Transformationen

$$W,\ S,\ S',\ P_1,\ P_2,\ P_3 \qquad \text{bestimmt.}$$

10. Wenn in der Gruppe keine infinitesimale Transformation zweiter Ordnung vorkommt, so hat man zu beachten, dafs mit den Transformationen erster Ordnung $a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$ und $b_0 U + b_1 S_{23} + b_2 S_{31} + b_3 S_{12}$ die aus ihrer Kombination hervorgehende Transformation

$$(a_3 b_2 - a_2 b_3)\, S_{23} + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, S_{31} + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, S_{12}$$

verbunden werden mufs, die ebenfalls von der ersten Ordnung ist. Hiernach können wir die möglichen Fälle leicht übersehen. Aufser den Transformationen nullter Ordnung P_1, P_2, P_3 kommen in der Gruppe vor entweder

a) U, S_{23}, S_{31}, S_{12} oder

b) S_{23}, S_{31}, S_{12} oder

c) U, $a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$ und

$$(a_1^2 + \omega^2)\, S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega)\, S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega)\, S_{12},$$

wo $\omega^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ ist und wo a_2 und a_3 nicht beide verschwinden dürfen; oder

d) U, $a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$, oder

e) $a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_2 S_{12}$ und $(a_1^2 + \omega^2)\, S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega)\, S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega)\, S_{12}$ unter den bei c) angegebenen Bedingungen, oder

f) $a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12}$.

Die zuletzt angegebene Gruppe brauchen wir im folgenden nicht zu berücksichtigen.

11. Es ist jetzt unsere Aufgabe, den Bau der einzelnen Gruppen anzugeben, auf die uns die vorstehende Untersuchung geführt hat. Um hierbei die passendsten infinitesimalen Transformationen auszuwählen, müssen wir von den in 7. gemachten Bemerkungen Gebrauch machen. Die Herleitung wird am einfachsten, wenn die Gruppe die Transformation U enthält; wir wollen daher diese Fälle zuerst erledigen.

Für die in 10. unter a) angegebene Gruppe ist $(U S_{\alpha\beta}) = 0$, $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$. Nun ist offenbar für beliebige Konstanten $m_0 \ldots m_3$: $(P_\alpha + m_0 U + m_1 S_{23} + m_2 S_{31} + m_3 S_{12},\, U) = (P_\alpha U)$. Ferner gilt die Beziehung: $(P_\alpha U) = P_\alpha + n_0 U + n_1 S_{23} + n_2 S_{31} + n_3 S_{12}$. Ersetzen wir also P_α durch die rechte Seite dieser Gleichung, so erhalten wir für das neue P_α die Relation: $(P_\alpha U) = P_\alpha$. Bei dieser Wahl von P_1, P_2, P_3 kann durch die Kombination mit U keine Transformation erster Ordnung erhalten werden.

Nun verlangt die Identität (P_α, P_β, U), dafs ist $(P_\alpha S_{\beta\gamma}) = ([P_\alpha S_{\beta\gamma}]U)$, und ebenso folgt aus der Identität $(P_\alpha, S_{\alpha\beta}, U)$ die Gleichung: $(P_\alpha S_{\alpha\beta}) = ([P_\alpha S_{\alpha\beta}]U)$. Wir sehen also, dafs auch die Ausdrücke für $(P_\alpha S_{\beta\gamma})$ und $(P_\alpha S_{\alpha\beta})$ keine Transformationen erster Ordnung enthalten; somit mufs sein:

$$(P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0, \ (P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta.$$

Die Identität (P_α, P_β, U) führt auf die Gleichung: $2(P_\alpha P_\beta) = ([P_\alpha P_\beta]U)$. Hieraus folgt zunächst wieder, dafs die linke Seite keine Transformationen erster Ordnung enthält; ist aber $(P_\alpha P_\beta) = c_{\alpha\beta}P_1 + c_{\alpha\beta}'P_2 + c_{\alpha\beta}'' P_3$, so verlangt diese Gleichung, dafs $2c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \ldots$ ist; demnach ergiebt sich $(P_\alpha P_\beta) = 0$. Der Bau der Gruppe wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$(P_\alpha P_\beta) = 0, \ (P_\alpha U) = P_\alpha, \ (P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta, \ (P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0,$$
$$(US_{\alpha\beta}) = 0, \ (S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma},$$

wo α, β, γ ungleiche Marken sind.

12. Genau so verfährt man, um den Bau der Gruppe 10, d) zu ermitteln. Setzt man $a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12} = S$, so ist offenbar $(U, S) = 0$. Auch kann man dadurch, dafs man P_α durch $P_\alpha + m_\alpha S + n_\alpha U$ ersetzt, erreichen, dafs $(P_\alpha U) = P_\alpha$ wird. Dann zeigt die Identität (P_α, S, U), aus der sich die Gleichung $(P_\alpha S) = ([P_\alpha S]U)$ ergiebt, in der früheren Weise, dafs $(P_\alpha S) = a_\gamma P_\beta - a_\beta P_\gamma$ ist, wo α, β, γ eine gerade Permutation der Marken 1, 2, 3 ist. Dafs aber $(P_\alpha P_\beta) = 0$ ist, folgt wieder aus der Relation $(P_\alpha P_\beta U)$. Wir finden somit die Beziehungen:

$$(P_\alpha P_\beta) = 0, \ (P_\alpha U) = P_\alpha, \ (P_\alpha S) = a_\gamma P_\beta - a_\beta P_\gamma, \ (US) = 0.$$

13. Auf ähnliche Weise ermitteln wir die Struktur der in 8. angegebenen Gruppe, welche durch die zehn Transformationen P_α, U, $S_{\alpha\beta}$, V_α für $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ bestimmt wird. Hier ist offenbar:

$$(V_\alpha V_\beta) = 0, \ (UV_\alpha) = V_\alpha, \ (S_{\alpha\beta}V_\beta) = V_\alpha, \ (S_{\alpha\beta}V_\gamma) = 0.$$

Ferner ist $(US_{\alpha\beta}) = c_{\alpha\beta}V_1 + c_{\alpha\beta}'V_2 + c_{\alpha\beta}''V_3$, oder wenn wir $S_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}V_1 - c_{\alpha\beta}'V_2 - c_{\alpha\beta}''V_3$ als neues $S_{\alpha\beta}$ einführen: $(US_{\alpha\beta}) = 0$. Die Identität $(S_{\alpha\beta}, S_{\beta\gamma}, U)$ geht hiernach über in $(U[S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma}]) = 0$. Daraus ergiebt sich, dafs im Ausdrucke für $(S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma})$ die Transformationen V_1, V_2, V_3 nicht vorkommen; es mufs somit sein: $(S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$.

Angenommen, es sei

$$(P_1 U) = P_1 + a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12} + b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3,$$

so hat man P_1 durch $P_1 + a_0 U + a_1 S_{23} + a_3 S_{12} + \frac{1}{2}(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3)$ zu ersetzen, um zu erhalten: $(P_1 U) = P_1$. Auf dieselbe Weise erreicht man, dafs $(P_2 U) = P_2$, $(P_3 U) = P_3$ wird.

Die Identität $(P_\alpha, S_{\varkappa\lambda}, U)$ geht über in $(P_\alpha S_{\varkappa\lambda}) = ([P_\alpha S_{\varkappa\lambda}]U)$. Auf der rechten Seite kommen die Transformationen U, S_{23}, S_{31}, S_{12} gar nicht vor; die V_μ erhalten auf beiden Seiten entgegengesetzte Vorzeichen; demnach ist

$$(P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta,\ (P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0.$$

Aus der Relation: (P_α, V_β, U) ergiebt sich die Gleichung: $(U[P_\alpha V_\beta]) = 0$, und daraus folgt:

$$(P_\alpha V_\alpha) = 2U,\ (P_\alpha V_\beta) = -2S_{\alpha\beta}.$$

Endlich führt die Identität (U, P_α, P_β) in der früheren Weise auf die Gleichung: $(P_\alpha P_\beta) = 0$. Wir erhalten also die Beziehungen:

$$(P_\alpha P_\beta) = 0,\ (P_\alpha U) = P_\alpha,\ (P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta,\ (P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0,$$
$$(P_\alpha V_\alpha) = 2U,\ (P_\alpha V_\beta) = -2S_{\alpha\beta},\ (US_{\alpha\beta}) = 0,$$
$$(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma},\ (UV_\alpha) = V_\alpha,\ (S_{\alpha\beta} V_\beta) = V_\alpha,\ (V_\alpha V_\beta) = 0.$$

14. In der Gruppe 10, c) setzen wir:

$$a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12} = S,$$
$$(a_1^2 + \omega^2) S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega) S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega) S_{12} = S'.$$

Alsdann ist: $(SS') = -\omega S'$, $(US) = 0$, $(US') = 0$. Auf dieselbe Weise wie vorhin erreichen wir, dafs $(P_\alpha U) = P_\alpha$ ist. Demnach kommt jetzt in keiner Kombination mit U eine Transformation erster Ordnung vor; es ergiebt sich also wieder $(P_\alpha P_\beta) = 0$. Um die Ausdrücke für $(P_\alpha S)$ und $(P_\alpha S')$, in denen wegen der Identitäten $(P_\alpha SU)$ und $(P_\alpha S'U)$ keine Transformationen erster Ordnung vorkommen, zu vereinfachen, setzen wir:

$$Q_1 = (a_1^2 + \omega^2) P_1 + (a_1 a_2 - a_3 \omega) P_2 + (a_1 a_3 + a_2 \omega) P_3$$
$$Q_2 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3$$
$$Q_3 = (a_1^2 + \omega^2) P_1 + (a_1 a_2 + a_3 \omega) P_2 + (a_1 a_3 - a_2 \omega) P_3.$$

Alsdann wird:

$$(Q_\alpha Q_\beta) = 0,\ (Q_\alpha U) = Q_\alpha,\ (Q_1 S) = -\omega Q_1,\ (Q_2 S) = 0,$$
$$(Q_3 S) = \omega Q_3,\ (Q_1 S') = -2\omega (a_1^2 + \omega^2) Q_2,\ (Q_2 S') = -\omega Q_3,$$
$$(Q_3 S') = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen den Bau der Gruppe.

15. Für die Gruppe 10, e) setzen wir:

$$S = a_0 U + a_1 S_{23} + a_2 S_{31} + a_3 S_{12},$$
$$S' = (a_1^2 + \omega^2) S_{23} + (a_1 a_2 + a_3 \omega) S_{31} + (a_1 a_3 - a_2 \omega) S_{12}.$$

Zudem führen wir die Transformationen Q_1, Q_2, Q_3 wieder gerade so, wie in der vorigen Nummer, ein. Alsdann folgt:

$$(Q_1 S) = (a_0 - \omega)\, Q_1 + \dots,\ (Q_2 S) = a_0 Q_2 + \dots,$$
$$(Q_3 S) = (a_0 + \omega)\, Q_3 + \dots$$

Setzen wir: $a_0 - \omega = c_1$, $a_0 = c_2$, $a_0 + \omega = c_3$, wo die Beziehungen gelten: $\omega = \frac{c_3 - c_1}{2}$, $c_2 = \frac{c_3 + c_1}{2}$, so kann man, falls die Koefficienten c_α und $c_\alpha - \omega$ von null verschieden sind, leicht bewirken, dafs $(Q_\alpha S) = c_\alpha Q_\alpha$ wird. In diesem Falle führt die Identität (Q_α, S, S') auf die Gleichung:

$$(c_\alpha + \omega)\ (Q_\alpha S') = ([Q_\alpha S']S),$$

aus der sich ergiebt:

$$(Q_1 S') = e_1 Q_2,\ (Q_2 S') = e_2 Q_3,\ (Q_2 S') = 0,$$

wo $e_1 = -2\omega\,(a_1^2 + \omega^2)$, $e_2 = -\omega$ ist. Die Identität $(Q_\alpha Q_\beta S)$ führt auf die Gleichung: $(c_\alpha + c_\beta)\ (Q_\alpha Q_\beta) = ([Q_\alpha Q_\beta] S)$; hieraus folgt, falls auch stets $c_\alpha + c_\beta - c_\gamma$ und $c_\alpha + c_\beta - \omega$ von null verschieden ist, dafs $(Q_\alpha Q_\beta) = 0$ wird.

Indem wir die Erledigung der ausgeschlossenen Fälle dem Leser überlassen, begnügen wir uns damit, die erhaltenen Beziehungen zusammenzustellen; es sind:

$$(Q_\alpha Q_\beta) = 0,\ (Q_\alpha S) = c_\alpha Q_\alpha,\ (Q_1 S') = e_1 Q_2,\ (Q_2 S') = e_2 Q_3,$$
$$(Q_3 S') = 0,\ (SS') = -\omega S'.$$

16. Die in 9. angegebene Gruppe wird durch die Transformationen erzeugt:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ S = b_1 U - b_2 S_{12} - b_3 S_{13},$$
$$S' = b_1 S_{23} + b_2 S_{31} + b_3 S_{12},\ W = b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3,$$

wo $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0$ und b_1 von null verschieden ist; wir setzen $b_1 = 1$.

Offenbar ist $(SW) = 2W$, $(S'W) = 0$; indem man die Transformation W mit einer geeigneten Konstanten multipliziert und zu S' hinzufügt, kann man bewirken, dafs $(SS') = S'$ wird.

Die Glieder erster Ordnung, welche in den Kombinationen $(P_1 W)$, $(P_2 W)$, $(P_3 W)$ vorkommen, sind bis auf den Faktor zwei durch (9) gegeben. Setzt man

$$b_1 P_1 - b_2 P_2 - b_3 P_3 = Q_1,\ b_3 P_2 - b_2 P_3 = Q_2,$$
$$b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3 = Q_3,$$

und addiert man zu den Q_α die mit einem passenden Koefficienten versehene Transformation S, so folgt:

$$(Q_1 W) = 4S,\ (Q_2 W) = 2S',\ (Q_3 W) = 0.$$

Diese drei Gleichungen ändern sich nicht, wenn man zu den Q_α die Transformation S' und W mit beliebigen konstanten Koefficienten hinzufügt. Nun kann man Q_α durch

$$Q_\alpha + a_\alpha S' + b_\alpha W$$

ersetzen und die Konstanten a_α und b_α so wählen, dafs ist:

$$(Q_1 S) = 2Q_1 + \mu_1 S,\ (Q_2 S) = Q_2 + \mu_2 S,\ (Q_3 S) = \mu_3 S.$$

Dann lehren die Relationen (Q_α, S, W), dafs die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 gleich null sind. Hiernach folgt aus der Identität (Q_α, S, W), dafs im Ausdruck für $(Q_\alpha S')$ die Transformation S, und aus (Q_α, S, S'), dafs darin S' und W fehlen bis auf $(Q_3 S')$, welches gleich $\nu S'$ gesetzt werden kann.

Die Identitäten $(Q_\alpha Q_\beta S)$ liefern die Beziehungen:

$$(S[Q_1 Q_2]) + 3\,(Q_1 Q_2) = 0,\ (S[Q_1 Q_3]) + 2\,(Q_1 Q_3) = 0,$$
$$(S[Q_2 Q_3]) + (Q_2 Q_3) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$(Q_1 Q_2) = 0,\ (Q_1 Q_3) = \alpha Q_1,\ (Q_2 Q_3) = \beta Q_2.$$

Hiernach verlangt die Identität $(Q_1 Q_2 S')$, dafs $\alpha = 0$ ist; $(Q_1 Q_3 S')$ führt auf die Gleichung: $\nu + \beta = 0$, und $(Q_2 Q_3 S')$ auf: $\nu - \beta = 0$. Die Transformationen Q_1, Q_2, Q_3 sind also mit einander vertauschbar.

Der Bau der sechsgliedrigen Gruppe wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$(Q_\alpha Q_\beta) = 0,\ (Q_1 S) = 2Q_1,\ (Q_2 S) = Q_2,\ (Q_3 S) = 0,$$
$$(Q_1 S') = 2Q_2,\ (Q_2 S') = Q_3,\ (Q_3 S') = 0,\ (Q_1 W) = 4S,$$
$$(Q_2 W) = 2S',\ (b_3 W) = 0,\ (SS') = S',\ (SW) = 4\,W,$$
$$(S'W) = 0.$$

17. Es erübrigt nur noch, den Bau der Gruppe 10, b) anzugeben. Hier ist offenbar: $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$. Indem man die Transformationen S_{31} und S_{12} mit geeigneten Konstanten multipliziert und zu P_1 addiert, kann man bewirken, dafs $(P_1 S_{23}) = cS_{23}$ wird. Nachdem P_1 in dieser Weise bestimmt ist, führen die Gleichungen $(P_1 S_{13}) = P_3$ und $(P_1 S_{12}) = P_2$ auf feste Werte von P_2 und P_3.

Jetzt folgt aus (P_1, S_{12}, S_{13}) die Beziehung: $(P_2 S_{23}) = P_3 + c S_{31}$, und aus $(P_1, S_{13} S_{23})$ ebenso: $(P_3 S_{23}) = - P_2 + c S_{12}$.

Im Ausdruck für $(P_2 S_{12})$ sind die Koefficienten von S_{23}, S_{31}, S_{12} unbekannt; setzt man:

$$(P_2 S_{12}) = - P_1 + g_1 S_{23} + g_2 S_{31} + g_3 S_{12},$$

so erhält man aus den Identitäten $(P_1 S_{12} S_{13})$ und $(P_2 S_{23} S_{12})$ die Gleichungen:

$$(P_2 S_{31}) + (P_3 S_{12}) = c S_{23}$$
$$(P_2 S_{31}) - (P_3 S_{12}) = - g_2 S_{12} + g_3 S_{31},$$

und daraus ergiebt sich:

$$(P_2 S_{31}) = \tfrac{1}{2} c S_{23} + \tfrac{1}{2} g_3 S_{31} - \tfrac{1}{2} g_2 S_{12}$$
$$(P_3 S_{12}) = \tfrac{1}{2} c S_{23} - \tfrac{1}{2} g_3 S_{31} + \tfrac{1}{2} g_2 S_{12}.$$

Indem wir diese Werte benutzen, führt die Identität $(P_3 S_{23} S_{12})$ auf die Gleichung:

$$(P_3 S_{31}) = P_1 - g_1 S_{23} - \tfrac{1}{2} g_2 S_{31} - \tfrac{1}{2} g_3 S_{12}.$$

Hiernach verlangt die Relation $(P_3 S_{12} S_{31})$, dafs $c = g_1 = 0$, und die Relation $(P_3 S_{23} S_{31})$, dafs $g_2 = g_3 = 0$ ist. Wir finden also allgemein:

$$(11) \quad (P_\alpha S_{\beta\gamma}) = 0, \; (P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta.$$

Diese Gleichungen sind aus den Voraussetzungen

$$(P_1 S_{23}) = c S_{23}, \; (P_1 S_{12}) = P_2, \; (P_1 S 1_3) = P_3$$

unter blofser Benutzung der Identitäten $(P_\alpha S_{\alpha\lambda} S_{\lambda\mu})$ hergeleitet. Die erste der drei vorausgesetzten Gleichungen bleibt aber ungeändert, wenn man P_1 durch $P_1 + \mu S_{23}$ ersetzt; sollen hierbei auch die beiden anderen Gleichungen, die wir zu Grunde gelegt haben, keine Änderung erleiden, so mufs man zugleich P_2 durch $P_2 + \mu S_{31}$ und P_3 durch $P_3 + \mu S_{12}$ ersetzen. Demnach bleiben die Gleichungen (11) auch für die neuen Transformationen P_α richtig. Nun folgt aus der Identität $(P_1 P_2 S_{12})$, dafs $([P_1 P_2] S_{12}) = 0$ oder dafs $(P_1 P_2) = a P_3 + b S_{12}$ ist. Demnach wird:

$$(P_1 + \mu S_{23}, P_2 + \mu S_{31}) = a P_3 + b S_{12} - 2\mu P_3 - \mu^2 S_{12}.$$

Setzt man $2\mu = a$ und führt eine neue Konstante k ein, so gilt bei geeigneter Wahl von P_1, P_2, P_3 die Beziehung:

$$(P_1 P_2) = - k S_{12}.$$

Hiernach verlangen die Identitäten (P_1, P_2, S_{23}) und (P_1, P_2, S_{31}), dafs ist: $(P_3 P_1) = - k S_{31}$, $(P_2 P_3) = - k S_{12}$.

Zu den Gleichungen (11) kommen also hinzu:

$$(12) \quad (P_\alpha P_\beta) = - k S_{\alpha\beta}.$$

18. Nachdem wir durch die vorangehende Untersuchung den Bau aller Gruppen gefunden haben, welche den aufgestellten Forderungen genügen, erübrigt nur noch, die Komponenten ihrer infinitesimalen Transformationen zu ermitteln. Bei der Lösung dieser Aufgabe mufs es uns darauf ankommen, die Variabeln so zu wählen, dafs die Ausdrücke für die Komponenten möglichst einfach werden. Um dies Ziel zu erreichen, können wir, abgesehen von der zuletzt gefundenen Gruppe, ein einheitliches Verfahren zu Grunde legen, das wir in aller Kürze darlegen wollen.

Wir denken uns die drei aus P_1, P_2, P_3 hervorgehenden eingliedrigen Gruppen bei beliebiger Wahl der Variabeln in endlicher Form dargestellt; es seien dies der Reihe nach die Gruppen

$$y_\varkappa' = \varphi_\varkappa (y_1, y_2, y_3; t_1)$$
$$y_\varkappa' = \psi_\varkappa (y_1, y_2, y_3; t_2)$$
$$y_\varkappa' = \chi_\varkappa (y_1, y_2, y_3; t_3),$$

wo wir den Parameter jedesmal so gewählt denken, dafs bei seinem Verschwinden die identische Transformation erhalten wird. Auch soll die Vereinigung der zu t_λ und zu t_λ' gehörenden Transformationen zu derjenigen Transformation führen, welche den Parameter $t_\lambda + t_\lambda'$ hat. Dabei wollen wir nur annehmen, dafs der in der ganzen Untersuchung bevorzugte Nullpunkt auch wieder durch das Wertsystem (0, 0, 0) dargestellt wird. Nennen wir die Linie, in der ein Punkt durch die Transformationen einer eingliedrigen Gruppe bewegt wird, seine Bahnlinie, so können wir sagen, dafs jede Bahnlinie durch die eingliedrige Gruppe in sich verschoben wird. Da aber der Annahme nach die aus P_1, P_2, P_3 hervorgehenden endlichen Transformationen den Nullpunkt in jeden Punkt seiner Umgebung überführen, so können in der Umgebung dieses Punktes niemals zwei Bahnlinien zusammenfallen, welche von irgend zwei verschiedenen unter den angegebenen drei eingliedrigen Gruppen erzeugt werden.

Um die neuen Koordinaten zu erhalten, legen wir dem Nullpunkt wieder das Wertsystem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ bei und betrachten diejenige Linie, in der dieser Punkt bei der aus P_3 hervorgehenden eingliedrigen Gruppe $y_\varkappa' = \chi_\varkappa (y_1, y_2, y_3; t_3)$ bewegt wird. Für alle Punkte dieser Linie soll $x_1 = x_2 = 0$ sein, während die dritte Variabele x_3 den Wert t_3 für denjenigen Punkt erhalten soll, in den der Nullpunkt durch die zum Parameter t_3 gehörende Transformation übergeführt wird.

Jetzt betrachten wir die aus P_2 hervorgehende eingliedrige Gruppe: $y_\varkappa = \varphi_\varkappa(y_1, y_2, y_3;\, t_2)$. Da diese den Punkt $(0, 0, x_3)$ in einer Linie bewegt, welche von der Linie $x_1 = x_2 = 0$ verschieden ist, so erlangt dieser Punkt durch die zum Parameter t_2 gehörende Transformation für einen von null verschiedenen Wert von t_2 eine Lage, welche der Linie $x_1 = x_2 = 0$ nicht angehört. Wir setzen fest, dafs für die neue Lage sich der Wert von x_3 nicht ändert, dafs aber $x_2 = t_2$, $x_1 = 0$ wird. Indem wir diese Festsetzung für alle Wertsysteme treffen, die dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Gröfse bleiben, können wir allen Punkten der Fläche $x_1 = 0$, die in der Umgebung des Nullpunktes liegen, auf eindeutige Weise Wertsysteme (x_2, x_3) zuordnen.

Endlich gehen wir zu der durch P_1 erzeugten Gruppe: $y_\varkappa = \varphi_\varkappa(y_1, y_2, y_3;\, t_1)$ über. Für einen von null verschiedenen Wert von t_1 wird der Punkt, in den der Punkt $(0, x_2, x_3)$ übergeht, der Fläche $x_1 = 0$ nicht angehören. Wir setzen fest, dafs für die neue Lage die Variabeln x_2 und x_3 ihren Wert nicht ändern, dafs dagegen $x_1 = t_1$ werde.

Hierdurch ist jedem Punkte in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes ein bestimmtes Wertsystem (x_1, x_2, x_3) zugeordnet. In diesen Variabeln wird allgemein $P_1 = p_1$, dagegen $P_2 = p_2$ für $x_1 = 0$ und $P_3 = p_3$ für $x_1 = x_2 = 0$.

19. Diese Wahl der Veränderlichen empfiehlt sich besonders, wenn die Transformationen P_1, P_2, P_3 mit einander vertauschbar sind. Dann verlangen wegen des angegebenen Wertes von P_1 die Beziehungen $(P_1P_2) = 0$ und $(P_1P_3) = 0$, dafs P_2 und P_3 von x_1 unabhängig sind. Es mufs also auch $P_2 = p_2$ und demnach infolge der Gleichung $(P_2P_3) = 0$ auch $P_3 = p_3$ sein. Die weiteren infinitesimalen Transformationen lassen sich aus den Ausdrücken für $(P_\varrho X)$ unter Berücksichtigung ihrer Ordnung leicht ermitteln; bei den in den Nummern 11, 12, 13 behandelten Gruppen erhält man den vollständigen Ausdruck, indem man sich auf die Glieder der niedrigsten Dimension beschränkt, und da diese oben bereits angegeben sind, kann man die Formen unmittelbar niederschreiben. Auch die Ermittlung der Invariante

macht keine Schwierigkeit; da sie eine blofse Funktion aus den Differenzen $x_1 - x_1'$, $x_2 - x_2'$, $x_3 - x_3'$ wird, setzen wir für $\alpha = 1, 2, 3$ jedesmal $x_\alpha - x_\alpha' = u_\alpha$.

Für die in 11. behandelte Gruppe wird

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \; S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha;$$

sie hat keine Invariante zwischen zwei Wertsystemen.

Die Gruppe in 12. wird durch die Transformationen bestimmt:

$$p_1, p_2, p_3, x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3,$$
$$a_1 (x_2 p_3 - x_3 p_2) + a_2 (x_3 p_1 - x_1 p_3) + a_3 (x_1 p_2 - x_2 p_1);$$

ihre Invariante ist:

$$\frac{(a_2 u_3 - a_3 u_2)^2 + (a_3 u_1 - a_1 u_3)^2 + (a_1 u_2 - a_2 u_1)^2}{(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)^2}.$$

Für die zehngliedrige Gruppe, die wir in 13. angegeben haben, wird

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \; S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha,$$
$$V_\alpha = 2x_\alpha \Sigma p_\varkappa x_\varkappa - p_\alpha \Sigma x_\varkappa^2;$$

auch in ihr besteht zwischen zwei Wertsystemen keine Invariante.

Noch möge bemerkt werden, dafs bei einem verschwindenden Werte von k für die in 17. mitgeteilte Gruppe $P_\alpha = p_\alpha$, $S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ wird, und dafs die Invariante alsdann gleich ist $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

20. Bei den drei in den Nummern 14, 15, 16 behandelten Gruppen haben wir Q_1, Q_2, Q_3 als die Transformationen nullter Ordnung zu Grunde gelegt. Da diese vertauschbar sind, dürfen wir wieder $Q_\alpha = p_\alpha$ setzen. Dann wird für die erste dieser Gruppen, wenn man $\omega = -1$ setzt und die weitere darin vorkommende Konstante a nennt:

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \; S = x_1 p_1 - x_3 p_3,$$
$$S' = a x_1 p_2 + x_2 p_3;$$

auch hier giebt es keine invariante Beziehung zwischen zwei Wertsystemen.

Die zweite Gruppe wird durch die Transformationen erzeugt:

$$p_1, p_2, p_3, c_1 x_1 p_1 + c_2 x_2 p_2 + c_3 x_3 p_3, \; e_1 x_1 p_2 + e_2 x_2 p_3,$$

wo wieder $2c_2 = c_1 + c_3$, $2e_2 = c_3 - c_1$ ist; die Invariante kann durch eine leichte Umänderung in die Form gebracht werden:

$$u_1^\lambda (u_2^2 + 2u_1 u_3).$$

Die in 16. behandelte Gruppe hat die folgenden sechs von einander unabhängigen Transformationen:

$$p_1, p_2, p_3, 2x_1 p_1 + x_2 p_2, 2x_1 p_2 + x_2 p_3,$$
$$4x_1^2 p_1 + 4x_1 x_2 p_2 + x_2^2 p_3,$$

und die Invariante:

$$\frac{4u_1 u_3 - u_2^2}{u_1}.$$

21. Weit schwieriger ist es, die infinitesimalen Transformationen der in 17. aufgestellten Gruppe für einen von null verschiedenen Wert von k zu ermitteln. Am einfachsten wird die Herleitung, wenn man einen allgemeinen Satz Lies benutzt, nach welchem alle Gruppen von der angegebenen Struktur ähnlich sind. Wenn wir diesen Satz als richtig voraussetzen, giebt es nach Wahl der Variabeln nur eine einzige Gruppe, die in der mitgeteilten Weise gebaut ist. Um aber die Variabeln so auszuwählen, dafs die Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen einfach und symmetrisch werden, können wir folgende Erwägung anstellen.

Die zehn Transformationen $p_\varkappa$, $x_\varkappa p_\lambda - x_\lambda p_\varkappa$ für $\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, 3$ bestimmen diejenige Gruppe in vier Variabeln, welche der starren Bewegung eines euklidischen vierdimensionalen Raumes entspricht. Beschränken wir uns auf die Gruppe, welche durch die sechs letzten Transformationen erzeugt wird, so erhalten wir nur diejenigen Bewegungen, bei denen der Anfangspunkt in Ruhe verbleibt. Dabei wird jedes dreidimensionale Gebilde in sich verschoben, welches bei beliebigem Werte von a der Gleichung genügt:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2.$$

Jetzt betrachten wir nur die Bewegung eines solchen Gebildes in sich. Die einzelnen Punkte desselben sind, falls wir uns auf einen gewissen Bereich beschränken, durch die Variabeln x_1, x_2, x_3 eindeutig bestimmt; wir können aber auch allgemein x_0 durch die Gleichung: $x_0 = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ eindeutig gegeben denken, wofern wir stetigen Änderungen von x_1, x_2, x_3 auch stetige Änderungen von x_0 entsprechen lassen. Jetzt dürfen wir für die Änderungen von x_1, x_2, x_3 die sechs Transformationen zu Grunde legen:

$$p_1 x_0, p_2 x_0, p_3 x_0, x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3, x_1 p_2 - x_2 p_1.$$

Hier sind die drei ersten Transformationen von der nullten, die drei letzten von der ersten Ordnung. Soll in den ersten die Entwicklung der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3 beginnen, so mufs $a = 1$ sein und dem Wurzelzeichen für kleine Werte von x_1, x_2, x_3 sein positiver Wert beigelegt werden. Setzen wir unter dieser Annahme

$$(13) \quad P_\alpha = p_\alpha x_0, \; S_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha,$$

so wird $(P_\alpha P_\beta) = - S_{\alpha\beta}$, $(P_\alpha S_{\alpha\beta}) = P_\beta$, $(S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\gamma}$.

Das sind aber für $k = 1$ dieselben Beziehungen, die wir in Nr. 17 angegeben haben.

Demnach liegt es nahe, für einen beliebigen Wert von k die Formen (13) beizubehalten, jedoch

$$(14) \quad x_0 = \sqrt{1 - k\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

zu setzen. Dann wird aber die vorangehende Darlegung ganz überflüssig, da man sofort sieht, dafs bei dieser Festsetzung die Gleichungen (11) und (12) gelten.

Indessen müssen wir wünschen, uns ohne die Voraussetzung des angeführten Lieschen Satzes davon überzeugen zu können, dafs dem angegebenen Bau nur eine einzige Gruppe genügt. Das können wir, wenn wir eine umfangreiche Rechnung nicht scheuen, auf folgendem Wege erreichen.

Wir legen für P_1, P_2, P_3 die in 18. angegebene Form zu Grunde, drücken also P_2 und P_3 vermittelst unbekannter Funktionen aus, die nur den dort geforderten Bedingungen genügen. Dann lassen sich wegen der Beziehungen $(P_\alpha P_\beta) = - kS_{\alpha\beta}$ auch die Transformationen $S_{\alpha\beta}$ vermittelst dieser Funktionen darstellen. Nun leite man aus den Gleichungen für $(P_\alpha S_{\varkappa\lambda})$ Differentialgleichungen her, denen die unbekannten Funktionen genügen müssen. Unter Berücksichtigung derjenigen Ausdrücke, in welche P_2 für $x_1 = 0$ und P_3 für $x_1 = x_2 = 0$ übergeht, finden wir eine einzie Lösung. Nachdem wir uns durch diese Rechnung überzeugt haben, dafs alle Gruppen, die auf diese Weise gebaut sind, durch Einführung neuer Variabeln in einander übergeführt werden können, dürfen wir ohne Beweis von der durch die Gleichungen (13) und (14) bestimmten Form ausgehen, da diese offenbar den gestellten Bedingungen genügt.

Hiermit können wir unsere analytischen Entwicklungen beendigen; die dargelegten Sätze genügen für die Anwendungen, welche wir im folgenden von der Theorie der Transformations-Gruppen machen wollen.

§ 7.

Zusammenhang zwischen den allgemeinen Raumformen und den Transformations-Gruppen.

1. Wir haben bereits im vorigen Abschnitt darauf hingewiesen, dafs es grofse Schwierigkeit bietet, die Folgerungen aus den dort (VII § 11 S. 237) angegebenen Grundsätzen auch nur so weit zu verfolgen, dafs wir einen Überblick über alle verschiedenen Raumformen gewinnen. Dagegen wird uns die Untersuchung wesentlich erleichtert, wenn wir die Analysis für die Theorie der Raumformen nutzbar machen können. Wir können daher versucht sein, rein axiomatisch vorauszusetzen, dafs es gestattet ist, allen Punkten eines n-dimensionalen Raumes eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Zahlgröfsen zuzuordnen und die verschiedenen Lagen desselben Körpers durch analytische Formeln darzustellen.[27]) Da bei diesem Verfahren unsere Grundsätze in Kraft bleiben, so sind wir sicher, dafs alle Möglichkeiten, zu denen wir alsdann auf analytischem Wege gelangen, unsern Grundsätzen genügen. Wir erhalten also eine Reihe von allgemeinen Raumformen und gewinnen dadurch einen tiefern Einblick in die Theorie, als die blofse Weiterführung der am Ende des vorigen Abschnitts begonnenen Untersuchung gestattet. Die analytische Darstellung eröffnet uns nämlich mit Leichtigkeit ein sehr weites Gebiet, dessen einzelne Systeme im uneigentlichen Sinne als Raumformen zu bezeichnen sind. Nachdem wir aber den allgemeinen Begriff der Raumformen aufgestellt haben, mufs es unsere erste Aufgabe sein, ihn durch zahlreiche Beispiele zu erläutern, und die Lösung dieser Aufgabe wird uns durch die Anwendung der Analysis überaus leicht gemacht.

2. Immerhin ist es nicht ohne Interesse, die Frage beantworten zu können, ob es Raumformen giebt, die sich der analytischen Behandlung ganz entziehen. Diese Frage mufs verneint werden, sobald es gelingt, in aller Strenge von unseren Grundsätzen aus zu einer analytischen Darstellung zu gelangen. Leider

ist dazu augenblicklich wenig Aussicht vorhanden. Wir müssen uns also damit begnügen, zu unseren Grundsätzen einige weitere Annahmen hinzuzufügen, welche sich ihrem Charakter nach ihnen anschliefsen und mit deren Hilfe es möglich wird, den n-dimensionalen Raum mit einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Zusammenhang zu bringen. Wir wollen im folgenden versuchen, diese Aufgabe zu lösen.[28]) Freilich müssen wir es uns versagen, den Weg in voller Ausführlichkeit darzulegen, da wir einerseits den Umfang unseres Werkes nicht übermäfsig vergröfsern dürfen, andererseits zu befürchten steht, das Interesse an dieser Frage sei nicht so grofs, dafs viele Leser eine eingehende Darlegung in allen Einzelheiten verfolgen würden. Immerhin hoffen wir, dafs es uns gelingt, die wichtigsten Punkte hervortreten zu lassen.

3. Wir benutzen einen beliebigen Körper k und denken uns in seinem Innern einen Punkt π bestimmt. Dem Raumpunkt, welchen der Punkt π in der Anfangslage A_0 des Körpers deckt, ordnen wir das Wertsystem (0, 0 . . . 0) zu, setzen also fest, dafs für ihn alle Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n$ verschwinden. Jetzt betrachten wir eine zweite Lage A_1 des Körpers k, welche folgenden Forderungen genügt: a) der vom Punkte π in der zweiten Lage gedeckte Ort soll von seiner Anfangslage verschieden sein; b) die zweite Lage dieses Punktes soll innerhalb des Raumes liegen, den der Körper in der Anfangslage einnimmt. (Dafs die zweite Forderung nicht wesentlich ist, da es gestattet ist, den Körper k durch einen anderen Körper zu ersetzen, brauchen wir nicht zu erwähnen.) Dann ist es möglich, um den Punkt π einen Teil k_1 des Körpers k derart abzugrenzen, dafs er auch in der Lage A_1 einen Raumteil deckt, den ein anderer Teil k_2 von k in der Anfangslage einnimmt. Die von den kongruenten Körperteilen k_1 und k_2 in der Anfangslage A_0 eingenommenen Raumteile nennen wir B_0 und B_1. Bringt man jetzt, der Lage A_1 entsprechend, den Körperteil k_1 in die Deckung mit B_1, wobei wir, wie auch stets im folgenden, den im Anschlufs an den siebenten Grundsatz entwickelten strengen Begriff der Kongruenz festhalten, so giebt es einen ganz bestimmten Raumteil B_2, welcher alsdann von k_2 eingenommen wird. Wiederum kann man k_1 in die Lage B_2 bringen und dadurch unter Benutzung des Teiles k_2 einen Raumteil B_3 eindeutig bestimmen. In dieser Weise ist es

gestattet, fortzufahren und jeder beliebigen ganzen positiven Zahl ν einen bestimmten mit B_0 kongruenten Raumteil B_ν zuzuordnen. Umgekehrt kann man auch den Körperteil k_2 in die Lage B_0 bringen; dabei wird k_1 eine Lage B_{-1} erhalten. Da man mit dem neuen Raumteil auch wieder k_2 zur Deckung bringen kann, ist eine Methode gewonnen, welche jeder negativen ganzen Zahl ν eine feste Lage B_ν zuordnet. Deckt der Körper k_1 einen Raumteil B_ν, so nimmt der Punkt π einen bestimmten Ort ein, und für diesen soll die Variabele x_1 den Wert ν erhalten, während alle anderen Variabeln $x_2 \ldots x_n$ den Wert null beibehalten.

4. Die Möglichkeit, auch den Zahlen, deren Nenner gleich zwei ist, bestimmte Punkte zuzuordnen, würde sich unmittelbar ergeben, wenn man unter Beibehaltung der soeben benutzten Raumteile B_0 und B_1 folgenden Satz beweisen könnte:

»Es giebt im Körper k einen, und zwar einen einzigen, mit k_1 kongruenten Teil k', der zugleich in die Lage B_1 gelangt, wenn k_1 in die Anfangslage $B_{\frac{1}{2}}$ des Teiles k' gebracht wird.«

Man kann diesem Satze auch folgenden Ausspruch geben:

»Sind A und B irgend zwei Lagen desselben Körpers, so giebt es eine einzige dritte Lage C dieses Körpers von der Eigenschaft, dafs ein mit dem Körper fest verbundener zweiter Körper, der in der ersten Lage des ersten Körpers den Raum C deckt, die Lage B erhält, sobald der erste Körper in die Lage C gebracht wird.«

Bisher ist es freilich nicht möglich gewesen, diesen Satz in voller Strenge zu beweisen; gewisse Betrachtungen, auf die wir hier nicht eingehen möchten, lassen es aber nicht als unmöglich erscheinen, dafs er sich aus unseren Grundsätzen herleiten läfst. Setzen wir seine Richtigkeit voraus, so ergiebt sich nicht nur auf demselben Wege, der uns vorhin gestattete, jeder ganzen Zahl ν eine feste Lage B_ν zuzuordnen, die Möglichkeit, dasselbe für alle Zahlen durchzuführen, deren Nenner gleich zwei ist, sondern wir können auch bei Wiederholung desselben Prozesses, die uns auf die Lagen $B_{\frac{1}{4}}$, $B_{\frac{1}{8}}$ ... führt, für die Variabele x_1 zu allen Zahlen gelangen, deren Nenner eine beliebige Potenz von zwei ist. Indessen bleiben wir auch jetzt noch immer bei diskreten Punkten;

wollen wir zu den Punkten einer Linie gelangen, so müssen wir etwa folgenden Satz voraussetzen:

»Wie wir auch immer vom Körper k Teile l, l′ . . . abgetrennt haben, läfst sich durch Wiederholung des Prozesses, der uns von den Lagen B_0 und B_1 zu einem Raumteil $B_{\frac{1}{2}}$ geführt hat, eine Lage $B_{\frac{1}{2^m}}$ bestimmen, in welcher jeder der Teile l, l′ . . . in teilweiser Deckung mit seiner Anfangslage ist.«

Ein solcher Satz würde bereits das Archimedische Princip als richtig voraussetzen. Mit seiner Hilfe fällt es nicht schwer, auch den irrationalen Werten von x_1 bestimmte Punkte zuzuweisen und zu zeigen, dafs sie eine stetige Mannigfaltigkeit bilden. Die Benutzung der im zweiten Paragraphen des dritten Abschnittes (B. 1. S. 168—172) dargelegten allgemeinen Gesetze ermöglicht es uns aber, zu beweisen, dafs die Punkte einer Linie angehören, und dafs der Prozefs nicht auf ein mehrfach ausgedehntes Gebilde, etwa eine Fläche, führt.

5. Nachdem es auf dem angedeuteten oder irgend einem anderen Wege möglich geworden ist, eine Linie zu finden, für welche die Variabeln $x_2, x_3 \dots x_n$ einen verschwindenden Wert annehmen, und die einzelnen Punkte der Linie durch die Werte der Variabeln x_1 zu bestimmen, macht es kaum noch Schwierigkeit, allen in der Umgebung des Nullpunktes gelegenen Punkten Wertsysteme zuzuordnen.

Um jetzt allen Punkten einer (endlichen) Fläche in ähnlicher Weise Wertsysteme zuzuordnen, braucht man nur eine weitere Lage C_1 des Körpers k in Betracht zu ziehen, bei der der Punkt π nicht in die Linie $(x_2 \dots = x_n = 0)$ hineinfällt. Diese neue Lage in Verbindung mit der Anfangslage A_0 gestattet wieder auf eindeutige Weise, jeder beliebigen Zahl ν eine bestimmte Lage C_ν zuzuordnen. Es ist nun nachzuweisen, dafs, solange man von der Linie $(x_2 = \dots = x_n = 0)$ ein Stück abgrenzt, das in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes liegt, und zugleich den absoluten Betrag der Zahl ν hinreichend klein bleiben läfst, die Punkte des abgegrenzten Linienstückes in keiner Lage C_ν, welche einer von null verschiedenen Zahl ν entspricht, in die Linie $(x_2 = \dots = x_n = 0)$ zu liegen kommen; mit anderen Worten:

bei geeigneter Beschränkung der Bereiche für x_1' und ν kann man erreichen, dafs derjenige Punkt des bewegten Körpers, welcher in der Anfangslage den Raumpunkt $(x_1', 0 \ldots 0)$ deckt, bei der Lage C_ν nur für $\nu = 0$ in die genannte Linie hineinfällt. Wir dürfen daher dem von diesem Punkte in der Lage C_ν gedeckten Orte das Wertsystem $(x_1 = x_1', x_2 = \nu, x_3 = \ldots = x_n = 0)$ zuordnen. Die Gesamtheit der auf diesem Wege erhaltenen Punkte bildet, wie sich ohne Schwierigkeit beweisen lassen dürfte, eine Fläche, aber kein drei- oder mehrfach ausgedehntes Raumgebilde.

Wie man auf diesem Wege weiter fortschreitet, bedarf wohl keiner Darlegung; wir erkennen, dafs es möglich ist, allen Punkten, die in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes liegen, die Wertsysteme einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_n$ zuzuweisen.

6. Nachdem wir jedem Punkte, der in einem gewissen Bereiche liegt, ein bestimmtes Wertsystem oder, wie wir lieber sagen, n Koordinatenwerte zugeordnet haben, betrachten wir wieder zwei Lagen desselben festen Körpers. Derjenige Punkt desselben, welcher in der ersten Lage den Raumpunkt $(x_1 \ldots x_n)$ deckt, möge in der zweiten Lage mit dem Raumpunkt $(y_1 \ldots y_n)$ zusammenfallen. Indem wir hiernach dem Punkte (x) den Punkt (y) entsprechen lassen, ist eine Beziehung aller Punkte, die der Körper in der ersten Lage deckt, zu denjenigen Punkten festgesetzt, welche der Körper in der zweiten Lage einnimmt; die Punkte (x) sind in die Punkte (y) transformiert. Solange wir die Wertsysteme (x) nur auf solche Punkte beschränken, welche dem Körper in seiner ersten Lage angehören, kann jedem einzelnen Wertsystem (x) nur ein einziges Wertsystem (y) entsprechen; die Transformation ist eindeutig. Trennen wir vom Körper einen beliebigen Teil ab und beschränken uns auf solche Punkte (x), welche diesem Teile in der ersten Lage des Körpers angehören, so müssen die entsprechenden Punkte (y) demselben Teile in seiner zweiten Lage angehören. Jeder kontinuierlichen Mannigfaltigkeit (x) entspricht also eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit (y); der Transformation mufs die Stetigkeit beigelegt werden. Wir nehmen jetzt noch an, dafs die Transformation auch auf analytischem Wege darstellbar sei, dafs wir somit setzen dürfen:

$$y_\varkappa = f_\varkappa(x_1 \ldots x_n) \qquad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

7. Wir können aber auch die stetige Folge von Lagenveränderungen ins Auge fassen, welche bei einer Bewegung vor sich geht. Um diese analytisch darzustellen, können wir jeder einzelnen Lage eine gewisse Zahl zuordnen und festsetzen, dafs jedesmal der späteren Lage eine gröfsere Zahl entspricht. Dasselbe kann erreicht werden, wenn es gelingt, die Zeit durch eine einfach unendliche Zahlenmannigfaltigkeit darzustellen. Man thut aber besser, die in 4. durchgeführte Untersuchung für unsern Zweck nutzbar zu machen; statt eine beliebige Bewegung eines Körpers zu betrachten, leiten wir aus zwei Lagen eine einfach unendliche Folge von Lagen in der Weise her, dafs jede einzelne unter ihnen durch eine Zahl bestimmt ist, und dafs die Folge der Zahlen und die der Lagen einander eindeutig entsprechen. Will man aber die Beziehung der in der Lage u gedeckten Koordinaten (y) zu den Anfangskoordinaten (x) analytisch darstellen, so mufs man die Funktionen nicht blofs von $x_1 \ldots x_n$, sondern auch von der neuen Variabeln u abhangen lassen; wir setzen daher:

$$y_\varkappa = \psi_\varkappa (x_1 \ldots x_n; u) \qquad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

Entspricht dem Werte $u = 0$ die Anfangslage, so mufs für $u = 0$ auch $y_1 = x_1 \ldots y_n = x_n$ sein; oder es ist:

$$\psi_\varkappa (x_1' \ldots x_n; 0) = x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

8. In ähnlicher Weise kann man alle verschiedenen Lagen in Betracht ziehen, welche der zu Grunde gelegte feste Körper annehmen kann. Alle diese Lagen mögen von einer gewissen Zahl r von veränderlichen Gröfsen $u_1 \ldots u_r$ abhängig gemacht sein. Dafs diese Zahl auch unendlich grofs sein kann, soll hier nicht weiter betrachtet werden; wir dürfen es dem Leser überlassen, sich von den Änderungen, welche an den folgenden Darlegungen für einen unendlich grofsen Wert von r nötig werden, selbst Rechenschaft zu geben. Was die Wahl der Gröfsen $u_1 \ldots u_r$, der Parameter, anbetrifft, so müssen wir voraussetzen, dafs jeder stetigen Folge von verschiedenen Lagen desselben Körpers auch eine stetige Mannigfaltigkeit von Wertsystemen $(u_1 \ldots u_r)$ entspricht. Um zu einer speciellen Wahl dieser Art zu gelangen, können wir wieder die in 4. durchgeführte Untersuchung berücksichtigen; wir erkennen dabei, dafs die dort gemachten Voraussetzungen auch für den vorliegenden Zweck genügen.

Nachdem in geeigneter Weise die Parameter $u_1 \ldots u_r$ gewählt sind, wird die Gesamtheit der verschiedenen Lagen desselben Körpers durch ein System von Transformationen

$$(1) \quad y_\varkappa = \varphi_\varkappa (x_1 \ldots x_n; u_1 \ldots u_r) \qquad (\varkappa = 1 \ldots n)$$

dargestellt. Hierbei werden die Parameter als wesentlich vorausgesetzt; wir verlangen nämlich, dafs sie sich nicht auf eine geringere Zahl zurückführen lassen. Auch sollen sie im folgenden stets so gewählt werden, dafs dem Wertsystem $u_1 = u_2 = \ldots = u_r = 0$ die Anfangslage des Körpers entspricht; dann mufs sein:

$$(2) \quad x_\varkappa = \varphi_\varkappa (x_1 \ldots x_n; 0 \ldots 0); \qquad (\varkappa = 1 \ldots n)$$

wir sagen, das System enthalte die identische Transformation.

Eine weitere Eigenschaft des Systems ergiebt sich durch folgende Betrachtung: Ist der Körper aus der Anfangslage in diejenige Lage übergeführt, welche durch das Wertsystem $(u_1 \ldots u_r)$ bestimmt wird, so kann man ihn auch aus dieser Lage in die Anfangslage durch eine Bewegung zurückführen; man kann also auch von den Gröfsen $y_1 \ldots y_n$ aus durch eine dem System angehörende Transformation die Variabeln $x_1 \ldots x_n$ gewinnen. Mit anderen Worten: Wenn die Variabeln (y) aus den Variabeln (x) für irgend ein Wertsystem (u) der Parameter vermittelst der Gleichungen (1) hergeleitet sind, so giebt es jedesmal ein System $(v_1 \ldots v_r)$ der Parameter, für welches sich die Gröfsen (x) in ganz entsprechender Weise vermittelst der Gröfsen (y) darstellen lassen; oder mit den Gleichungen (1) sind jedesmal die Gleichungen

$$x_\varkappa = \varphi_\varkappa (y_1 \ldots y_n; v_1 \ldots v_r) \qquad (\varkappa = 1 \ldots n)$$

für zu bestimmende Werte von $v_1 \ldots v_r$ verbunden. Das System der Transformationen ist demnach umkehrbar; es enthält zu jeder Transformation auch die inverse. Wie die Erweiterung der in 4. angestellten Betrachtung zeigt, kann man die Parameter $u_1 \ldots u_r$ stets so wählen, dafs die Gröfsen $u_\varkappa$ und $v_\varkappa$, welche zu inversen Transformationen gehören, in der Beziehung stehen:

$$u_1 + v_1 = 0 \ldots u_r + v_r = 0.$$

9. Unser dritter Grundsatz führt uns auf eine besonders wichtige Eigenschaft dieses Systems von Transformationen. Nachdem die Beziehung zwischen der ersten und zweiten Lage desselben Körpers durch die Gleichung (1) bestimmt ist, wo die Gröfsen $u_1 \ldots u_r$ feste, die Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ veränderliche Werte

annehmen, denke ich mir einen zweiten Körper, der mit dem ersten kongruent ist und dessen Anfangslage mit der zweiten Lage des ersten Körpers identisch ist. Dann werden die einzelnen Punkte dieses Körpers durch die Variabeln $y_1 \ldots y_n$ bestimmt. Gebe ich diesem Körper irgend eine neue Lage und bestimme ich die hierbei eingenommenen Örter der einzelnen Punkte des Körpers durch die Variabeln $z_1 \ldots z_n$, so kommt dies darauf hinaus, in den Gleichungen (1) die $y_\varkappa$ durch $z_\varkappa$, die $x_\varkappa$ durch $y_\varkappa$ zu ersetzen und statt $(u_1 \ldots u_r)$ andere Parameter $(v_1 \ldots v_r)$ zu wählen; es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$(3) \quad z_\varkappa = \varphi_\varkappa (y_1 \ldots y_n;\ v_1 \ldots v_r).$$

Nun kann ich aber den ersten Körper in jede Lage bringen, welche der zweite annimmt; es mufs also möglich sein, neue Parameter $(w_1 \ldots w_r)$ derartig zu bestimmen, dafs man mit ihrer Hilfe von den Variabeln (x) zu den Variabeln (z) gelangt. Mit den Gleichungen (1) und (3) müssen jedesmal die Gleichungen verbunden sein:

$$(4) \quad z_\varkappa = \varphi_\varkappa (x_1 \ldots x_n;\ w_1 \ldots w_r),$$

wo die $w_1 \ldots w_r$ blofse Funktionen von $u_1 \ldots u_r$ und $v_1 \ldots v_r$ sind. Wollen wir diese Eigenschaft rein analytisch aussprechen, so können wir sagen: Sind vermittelst der Gleichungen (1) für ein festes System (u) der Parameter die Variabeln (x) in die (y) übergeführt, wendet man auf die Variabeln (y) eine Transformation (3) des Systems an, welche durch die Parameter $v_1 \ldots v_r$ bestimmt ist, und gelangt man dadurch zu den Werten (z), so führt die Elimination der Variabeln (y) auf eine Beziehung zwischen den Variabeln (x) und (z), welche wiederum eine Transformation unseres Systems ist und nur von neuen Parametern abhängt. Unsere Transformationen bilden also im Lieschen Sinne eine Gruppe und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit eine s t e t i g e T r a n s f o r m a t i o n s - G r u p p e.

10. Der vierte Grundsatz verlangt, dafs jeder Punkt eines Körpers mit jedem Punkte des Raumes zur Deckung gebracht werden kann; demnach sind nur die transitiven Gruppen geeignet, die Bewegung in einer Raumform darzustellen.

Was die weitere analytische Behandlung betrifft, so brauchen wir nicht daran zu erinnern, dafs es von vornherein als notwendig erscheint, die ganze Untersuchung auf einen gewissen Bereich zu beschränken; die schon früher bevorzugte Methode, zunächst die Gesetze für ein endliches, allseitig begrenztes Gebiet herzuleiten und erst später zur unbegrenzten Erweiterung überzugehen, erweist sich hier geradezu als allein berechtigt.

Bei den folgenden Anwendungen der Transformations-Gruppen auf die allgemeinen Raumformen müssen wir für die Funktionen, welche in den Gleichungen (1) auftreten, die Differentiierbarkeit voraussetzen und annehmen, dafs sie in gewöhnliche Potenzreihen entwickelt werden können, da sich die früher gefundenen Resultate auf diese beiden Annahmen stützen. Ob diese Forderung neue Annahmen nötig macht, läfst sich nicht übersehen.

11. Wie jede Raumform unter den gemachten Voraussetzungen auf eine Transformations-Gruppe führt, kann umgekehrt jede stetige transitive Gruppe von Transformationen als Raumform im allgemeinen Sinne aufgefafst werden. Zwar haben wir erkannt, dafs eine Gruppe, welche zur Darstellung einer Raumform geeignet sein soll, die identische Transformation enthalten mufs; indessen liegt hierin keine Beschränkung, wie wir in § 1 erwähnen konnten; es ist also nicht notwendig, neben der Transivität auch diese Eigenschaft der Gruppe eigens beizulegen.

Wenn die Gruppe in n Variabeln transitiv ist, so können wir immer ein Wertsystem finden, welches in alle Wertsysteme seiner Umgebung transformiert werden kann; es giebt daher einen endlichen Bereich, für dessen Wertsysteme die gleiche Eigenschaft gilt. Von einem solchen Gebiete gehen wir aus und beschränken es, wenn das nötig sein sollte, durch die weitere Forderung, dafs auch alle der Gruppe angehörenden Transformationen eindeutig bleiben, wofern man diesen Bereich nicht verläfst. Eine stetige n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Wertsystemen, die einen Teil des ausgewählten Gebietes bildet, nennen wir einen Raumteil oder auch einen Raum im Sinne unserer Grundsätze. Machen wir die Parameter der Gruppe in stetiger Weise abhängig von einer einzigen Variabeln, so entsteht eine kontinuierliche Folge von Transformationen, welche als eine Bewegung bezeichnet wird. Nach diesen Festsetzungen werden alle Gesetze befriedigt, welche durch unsere Grundsätze ausgesprochen werden; wir dürfen also sagen, die Gruppe stelle eine Raumform dar. Wir brauchen diesen Gedanken nicht weiter durchzuführen; es genügt, auf die im Anfange von VII § 11 (S. 232 ff.) angegebenen Beispiele zu verweisen.

12. Um jetzt zu allen Raumformen zu gelangen, welche eine analytische Behandlung zulassen, brauchen wir nur alle transitiven Gruppen aufzusuchen. Dafs das neue Problem bedeutend einfacher ist als das ursprüngliche, erkennen wir schon, wenn wir uns auf die kleinsten Zahlen von Dimensionen beschränken. Eine Gruppe, durch welche eine einzige Variabele transformiert wird, kann allerdings unendlich viele Parameter enthalten; ist aber die Gliederzahl endlich, so kommen, wie Lie sehr früh nachgewiesen hat, alle Transformationen auf projektive Umgestaltungen hinaus; die Zahl der Parameter ist höchstens gleich drei; es giebt aber auch für eine Variabele ein- und zweigliedrige Gruppen. Lie hat aber auch schon die Aufgabe erledigt, für zwei und drei Variabele sämtliche Gruppen zu ermitteln, deren Gliederzahl endlich ist; es bietet also keine Schwierigkeit, für eine, zwei und drei Dimensionen alle Raumformen anzugeben, deren Beweglichkeit von einer endlichen Zahl von willkürlichen Gröfsen abhängt. Natürlich müssen wir hierbei alle Gruppen als identisch auffassen, welche im Sinne Lies einander ähnlich sind, welche also durch Einführung neuer Variabeln in einander übergeführt werden können. Es kommt dies darauf hinaus, dafs wir in einer n-dimensionalen Raumform die zunächst gewählten Koordinaten $x_1 \dots x_n$ durch beliebige n von einander unabhängige Funktionen $\varphi_1 (x_1 \dots x_n) \dots \varphi_n (x_1 \dots x_n)$ ersetzen können.

Dabei dürfen wir aber nicht vergessen, dafs die Transformations-Gruppen uns nur die Gesetze liefern, welche in einem gewissen endlichen Bereiche des Raumes gelten, für die unbegrenzte Erweiterung aber an sich nichts bieten. Es ist, wie wir mehrmals gesehen haben, ganz wohl möglich, dafs zwei Raumformen in allen Eigenschaften übereinstimmen, solange man sich auf einen gewissen endlichen Bereich beschränkt, dafs sie also zu derselben Gruppe gehören, während sie in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtet ganz verschiedene Eigenschaften besitzen. Demnach mufs man, nachdem man vermittelst der zugehörigen Gruppe die Gesetze erforscht hat, die für jeden endlichen, hinreichend begrenzten Bereich gelten, in eine eigene Untersuchung darüber eingehen, ob das zu Grunde gelegte Gebiet in verschiedener

Weise erweitert werden könne. Indessen gehört die Durchführung dieses Gedankens nicht hierher. Wir sind hier bis zu dem Punkte gelangt, zu dem wir unsere allgemeinen Erörterungen führen mufsten; wir dürfen also jetzt zu dem Problem übergehen, welches uns in den folgenden Untersuchungen beschäftigen soll. Indessen glauben wir dem Leser einen Gefallen zu erweisen, wenn wir mehrere Raumformen, auf welche wir durch einige besondere Gruppen geführt werden, etwas weitläufiger charakterisieren. Die wichtigsten Eigenschaften der beiden ersten Raumformen sind bereits von Lie[29]) angegeben; das dritte Beispiel giebt nur allbekannte Sätze in einer Form, die für den vorliegenden Zweck besonders geeignet ist; das letzte Beispiel habe ich früher zu einem ganz speciellen Zwecke entwickelt.

13. Am Schlufs von § 6, 20 (S. 312) haben wir eine früher von Lie behandelte Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen bestimmt:

$$(5) \quad p_1,\ p_2,\ p_3,\ 2x_1p_1 + x_2p_2,\ 2x_1p_2 + x_2p_3,$$
$$4x_1^2p_1 + 4x_1x_2p_2 + x_2^2p_3.$$

Da der Nullpunkt durch die drei ersten Transformationen in eine ganz beliebige Lage übergeführt werden kann, so besitzt er dieselben Eigenschaften wie jeder andere Punkt des Raumes. Bleibt aber der Punkt (0, 0, 0) in Ruhe, so sind noch alle diejenigen Bewegungen möglich, welche der durch die drei letzten Transformationen (5) erzeugten Gruppe genügen. Diese Gruppe hängt von drei Parametern ab; wollte man aber nur die linearen Glieder berücksichtigen, so würde man zu der unrichtigen Meinung geführt werden, dafs diese Gruppe nur zwei Parameter enthielte.

In den drei letzten Symbolen (5) werden die Koefficienten von p_1, p_2, p_3 gleich null, wenn $x_1 = x_2 = 0$ gesetzt wird; alle Punkte dieser Linie bleiben also unbewegt, sobald der Nullpunkt in Ruhe gehalten wird. Die Punkte der Fläche $x_1 = 0$ erleiden alsdann diejenigen Veränderungen, welche der aus den Transformationen x_2p_2, x_2p_3, $x_2^2p_3$ hervorgehenden Gruppe entsprechen; jeder Punkt dieser Fläche, welcher nicht auf der unbewegten Linie liegt, kann in alle Punkte eines zweifach ausgedehnten Gebietes übergeführt werden. Auch jede Fläche $4x_1(x_3 - c) = x_2^2$ bleibt bei der Drehung um den Nullpunkt in

Deckung mit ihrer Anfangslage. Bei der Ruhe eines Punktes wird somit jede Fläche eines Büschels in sich verschoben; alle diese Flächen berühren sich längs einer Linie, und alle Punkte dieser Linie bleiben unbewegt.

Von diesen Flächen wird unter Vermittlung der eingeführten Koordinaten x_1, x_2, x_3 im euklidischen Raume eine als Ebene, die anderen als Kegel zweiter Ordnung abgebildet; der aus den Bildflächen bestehende Büschel hat die Eigenschaft, dafs alle seine Flächen Kegel sind, die sich längs einer Geraden berühren; jeder Punkt der gemeinsamen Tangente ist die Spitze eines Kegels, und unter den Kegeln ist einer, der in ein Ebenenpaar zerfällt.

Soll aufser dem Nullpunkte noch ein zweiter Punkt a_1, a_2, a_3 in Ruhe gehalten werden, so dürfen die Koordinaten a_1 und a_2 nicht beide verschwinden. Natürlich bleibt jetzt auch jeder Punkt der Linie $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ unbewegt. Diejenige Bewegung, welche jetzt noch möglich ist, wird beschrieben durch die eingliedrige Gruppe, welche aus der Transformation

$$(6)\quad 4(x_1 - a_1)\, x_1 p_1 + (4x_1 x_2 - 2a_1 x_2 - 2a_2 x_1)\, p_2 + (x_2 - a_2)\, x_2 p_3$$

hervorgeht; jeder einzelne Punkt bewegt sich nur auf einer Linie. Nur die Punkte der beiden Linien $(x_1 = x_2 = 0)$ und $(x_1 = a_1$, $x_2 = a_2)$ bleiben in Ruhe.

Jede Bahnlinie genügt den beiden Gleichungen:

$$(7)\quad 4x_1(x_3 - c) = x_2^2 \text{ und}$$
$$4(x_1 - a_1)(x_3 - c') = (x_2 - a_2)^2,$$

wo die Konstanten c und c' durch die Anfangslage des Punktes bestimmt werden. Ist für die Anfangslage $x_1 = 0$, so mufs die erste Gleichung durch $x_1 = 0$ ersetzt werden; in entsprechender Weise mufs statt der zweiten Gleichung (7) die Bedingung $x_1 = a_1$ erfüllt werden, wenn dies für die Anfangslage gilt. In diesen beiden Fällen wird die Bahnlinie durch eine Parabel abgebildet. Auch im allgemeinen fallen durch Subtraktion der Gleichungen (7) die Glieder zweiter Ordnung weg; der Bahnlinie entspricht also immer eine ebene Kurve des euklidischen Raumes. Dafs keine dieser Kurven geschlossen ist, leitet man am einfachsten aus den Differentialgleichungen her, welche aus dem Symbol (6) hervorgehen; nur mufs man beim Beweise die beiden Fälle unterscheiden, dafs a_1 verschwindet und dafs a_1 von null verschieden ist.

14. Für das folgende Beispiel ersetzen wir der einfacheren Schreibweise wegen die Variabeln x_1, x_2, x_3 der Reihe nach durch x, y, z und die Symbole p_1, p_2, p_3 durch p, q, r. Dementsprechend gehen wir mit Lie von den Transformationen aus:

$$(8)\quad p,\ q,\ px + qy + r,\ py - qx,\ (x^2 - y^2)\,p + 2xyq + 2xr,$$
$$2xyp + (y^2 - x^2)\,q + 2yr.$$

Um die Gesetze herzuleiten, die bei der Drehung um einen beliebigen Punkt gelten, dürfen wir wiederum den Nullpunkt als ruhend voraussetzen. Hierbei bleiben alle Punkte der Linie $x = y = 0$ in Ruhe; alle anderen Punkte bewegen sich in Flächen, deren Gleichungen sind:

$$(9)\quad (x^2 + y^2)\,e^{-z} = (x_0^2 + y_0^2)\,e^{-z_0},$$

wo x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Punktes in seiner Anfangslage und x, y, z die Koordinaten denselben Punkt in irgend einer anderen Lage darstellen. Alle Bewegungen, welche jetzt noch statthaben, hangen von drei willkürlichen Gröfsen ab; unter ihnen ist diejenige besonders bemerkenswert, welche aus der infinitesimalen Transformation $py - qx$ hervorgeht und welche ganz der gewöhnlichen Drehung um eine Gerade entspricht.

Soll aufser dem Nullpunkte noch ein zweiter Punkt (a, b, c) in Ruhe verbleiben, so dürfen die Koordinaten a und b nicht beide verschwinden. Die Bewegung wird in diesem Falle durch eine eingliedrige Gruppe dargestellt, welche aus der Transformation hervorgeht:

$$(10)\quad \left(y + \frac{b\,(x^2 - y^2) - 2axy}{a^2 + b^2}\right) p + \left(-x + \frac{a(x^2 - y^2) + 2bxy}{a^2 + b^2}\right) q$$
$$- 2\,\frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\,r.$$

Wohl wird jetzt auch jeder Punkt der Linie $(x = a,\ y = b)$ in Ruhe verbleiben; aber jeder Punkt, der weder dieser Linie noch der Linie $(x = y = 0)$ angehört, wird bewegt werden, und zwar eine in sich verschiebbare Linie beschreiben.

Um eine besonders interessante Eigenschaft dieser Linie herzuleiten, schlägt Lie folgenden Weg ein. Aus (10) folgen für x und y die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{b(x^2 - y^2) - 2axy}{a^2 + b^2},$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + \frac{a(x^2 - y^2) + 2bxy}{a^2 + b^2},$$

und daraus ergiebt sich weiter:

$$\frac{d(x + yi)}{dt} = -i(x + yi) + i\frac{(x + yi)^2}{a + bi}.$$

Da für $t = 0$ zugleich $x = x_0$, $y = y_0$ sein mufs, so ist die Lösung dieser Gleichung:

$$(11) \quad x + yi = \frac{(a + bi)(x_0 + y_0 i)}{x_0 + y_0 i - [(x_0 - a) + i(y_0 - b)] e^{ti}}.$$

Hieraus geht hervor, dafs für $t = 2\pi$ allgemein $x + yi = x_0 + y_0 i$, also $x = x_0$, $y = y_0$ wird. Nun lehrt die Gleichung (9), dafs dann auch $z = z_0$ wird, oder dafs alle Punkte bei fortschreitender Drehung um zwei beliebige feste Punkte gleichzeitig in ihre Anfangslage zurückkehren. Zugleich folgt aus der letzten Gleichung, dafs, abgesehen von den Punkten (0, 0, z) und (a, b, z) irgend ein Punkt nur dann seine Anfangslage wieder einnimmt, wenn $e^{ti} = 1$ ist.

Wollte man sich in den Ausdrücken (8) auf die Glieder erster Ordnung beschränken, so würde man zu einer Gruppe gelangen, die von der soeben beschriebenen wesentlich verschieden ist.

15. Einiges Interesse dürfte es gewähren, nochmals einen Blick auf die allgemeinsten projektiven Umgestaltungen des dreidimensionalen Raumes zu werfen. Halten wir einen Punkt fest, so können wir jeden zweiten Punkt in alle Lagen bringen mit einziger Ausnahme derjenigen, welche der ruhende Punkt einnimmt. Bleibt noch ein zweiter Punkt in Ruhe, so kann ihre Verbindungs-Gerade nur noch in sich bewegt werden, dagegen kann jeder Punkt, der dieser Geraden nicht angehört, abgesehen von dieser Linie an jede Stelle des Raumes gebracht werden. Bei der Ruhe dreier nicht in gerader Linie liegender Punkte kann die durch sie hindurchgelegte Ebene nur in sich verschoben werden; auch kann in diese Ebene kein Punkt während der Bewegung hineinfallen, der ihr nicht in der Anfangslage angehört; aber im übrigen ist die Bewegung noch unbeschränkt. Läfst man vier

Punkte in Ruhe, die nicht in einer Ebene liegen, so behält jeder Punkt seine Lage gegen das Tetraeder bei, das die ruhenden Punkte zu Eckpunkten hat; eine weitere Beschränkung seiner Bewegung findet aber nicht statt. Erst bei der Ruhe von fünf Punkten, von denen keine vier in einer Ebene liegen, behält jeder Punkt seine Lage bei.

16. Zum Schlufs betrachten wir eine zweidimensionale Raumform, für deren Bewegungen von Lie die sechs infinitesimalen Transformationen p, px, px^2, q, qy, qy^2 zu Grunde gelegt werden; Lie behauptet, dafs bei passender Wahl der Koordinaten aus diesen Transformationen die allgemeinste ebene Gruppe hervorgehe, durch welche alle Kreise in einander übergeführt werden. Wir gehen von einer anderen Darstellung aus, welche es uns möglich macht, bekannte Sätze der Raumgeometrie zu benutzen. Zu dem Ende setzen wir x_0, x_1, x_2, x_3 als projektive Raumkoordinaten voraus, beschränken die projektive Umgestaltung des Raumes durch die Forderung, dafs die durch die Gleichung

$$(12) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2$$

dargestellte reelle nicht-geradlinige Fläche zweiter Ordnung in sich verbleibt, und untersuchen die Veränderungen, welche jetzt auf der Fläche vor sich gehen. Die zweidimensionale Raumform stellen wir demnach durch die vier veränderlichen Gröfsen x_0, x_1, x_2, x_3 dar, verlangen aber, dafs zwischen ihnen die Gleichung (12) besteht und dafs bei einem von null verschiedenen, sonst ganz beliebigen Werte von μ durch das Wertsystem (μx_0, μx_1, μx_2, μx_3) derselbe Punkt dargestellt wird, wie durch (x_0, x_1, x_2, x_3). Für die Untersuchung können wir von den sechs Transformationen ausgehen:

$$p_0 x_1 + p_1 x_0,\; p_0 x_2 + p_2 x_0,\; p_0 x_3 - p_3 x_0,$$
$$p_2 x_3 - p_3 x_2,\; p_3 x_1 - p_1 x_3,\; p_1 x_2 - p_2 x_1;$$

wir können aber auch die bekannten Eigenschaften der projektiven Umgestaltung des dreidimensionalen Raumes zu Grunde legen.

Die Lage dreier Punkte ist durchaus willkürlich; werden aber drei Punkte in Ruhe gehalten, so ist keine Bewegung möglich. Bei der Ruhe zweier Punkte kann jeder dritte noch an jeden beliebigen Ort gebracht werden, natürlich mit Ausnahme der von den ruhenden Punkten eingenommenen Örter. Die in sich verschiebbaren Linien, welche ein dritter Punkt bei der Drehung um zwei Punkte beschreiben kann, sind entweder geschlossen, oder sie umlaufen die ruhenden Punkte unendlich oft und nähern sich ihnen unbegrenzt. Die geschlossenen Linien nennen wir Kreise; für sie gelten folgende Sätze:

a) Es giebt nur einen einzigen Kreis, der zwei gegebene Punkte zu Mittelpunkten hat und durch einen vorgeschriebenen Punkt geht.

b) Alle Kreise sind kongruent.

c) Wenn bei der Drehung um zwei Punkte zwei Kreise beschrieben werden, so bewegen sich alle Punkte in Kreisen, und alle Punkte kehren gleichzeitig in ihre Anfangslagen zurück.

Für den Beweis all dieser Behauptungen genüge folgende Andeutung. Werden zwei Punkte der Fläche in Ruhe gehalten, so bleiben bei der projektiven Umgestaltung des Raumes die beiden Tangentialebenen, also auch ihre Schnittlinie, in Deckung mit ihrer Anfangslage. Hierbei können zwei (und damit alle) weiteren Ebenen des Büschels, welcher diese Gerade zur Achse hat, in Deckung mit der Anfangslage bleiben; es kann aber aufser den Tangentialebenen eine oder keine Ebene des Büschels die Anfangslage beibehalten. Berücksichtigt man diese, so kann man den Beweis der aufgestellten Sätze leicht führen.

§ 8.

Helmholtz' Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.

1. Nachdem wir gezeigt haben, dafs die Theorie der allgemeinen Raumformen eng mit der der Transformations-Gruppen zusammenhängt, müssen wir nach denjenigen Eigenschaften fragen, welche zur Charakterisierung der eigentlichen Raumformen geeignet sind. Mit dieser Frage hat sich v. Helmholtz[30]) bereits beschäftigt, ehe die Habilitations-Vorlesung Riemanns gedruckt war, und die Resultate kurz nach dem Erscheinen des Riemannschen Aufsatzes veröffentlicht. Da ihm die Transformations-Gruppen unbekannt waren, konnte er die scharfe Beweisführung, welche durch diese Theorie ermöglicht wird, nicht erreichen. Trotzdem bietet seine Lösung noch jetzt hohes Interesse, da erstens seine Arbeit der erste Versuch war, der in der angegebenen

Richtung unternommen wurde, zweitens seine Principien im wesentlichen richtig sind, und drittens die Ausführung trotz einzelner Mängel einen richtigen Kern enthält. Bei der Darlegung schliefsen wir uns der Arbeit an, welche er im Juni 1868 in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht hat.

2. Helmholtz fafst seine Voraussetzungen, »die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen«, in vier Sätze zusammen, von denen die meisten an sich wieder in eine Reihe von Annahmen zerfallen. An erster Stelle verlangt er, dafs der Raum von n Dimensionen eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist. Er fafst also den Raum als Zahlenmannigfaltigkeit auf und verlangt, dafs den einzelnen Punkten auf irgend eine Weise die Wertsysteme einer Mannigfaltigkeit von n unbeschränkt veränderlichen Gröfsen x_1, x_2 . . . x_n stetig und eindeutig zugeordnet werden können.

An zweiter Stelle wird die Existenz von beweglichen, aber in sich festen Körpern (oder Punktsystemen) vorausgesetzt. Demnach stellt er folgende Definition auf: »Zwischen den 2n Koordinaten eines jeden Punktepaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle kongruenten Punktepaare die gleiche ist.« Hierbei sollen alle Punktepaare kongruent sein, welche gleichzeitig oder nach einander mit demselben Punktepaare des Raumes zusammenfallen können.

Drittens setzt Helmholtz die vollkommen freie Beweglichkeit fester Körper voraus; d. h. er verlangt, dafs jeder Punkt eines solchen an den Ort jedes andern kontinuierlich übergehen könne, soweit er nicht durch die Gleichungen, die zwischen ihm und den übrigen Punkten des festen Systems bestehen, zu dem er gehört, gebunden ist. Der erste Punkt eines in sich festen Systems soll absolut beweglich sein. Wenn er festgestellt ist, besteht für den zweiten Punkt eine Gleichung, und eine seiner Koordinaten wird Funktion der n — 1 übrigen. Nachdem auch der zweite festgetellt ist, bestehen zwei Gleichungen für den dritten u. s. w.

Ehe die vierte Voraussetzung formuliert wird, giebt Helmholtz zwei Definitionen. Er charakterisiert die Drehung dadurch, dafs eine gewisse Anzahl von Punkten des bewegten Körpers während der Bewegung unveränderte Koordinaten behalten, und die Umkehr einer Bewegung dadurch, dafs früher durchlaufene kontinuierlich in einander übergehende Wertkomplexe der Koordinaten rückwärts durchlaufen werden. Hiernach fügt er den drei ersten Voraussetzungen die folgende bei: Wenn ein fester Körper sich um n — 1 seiner Punkte dreht und diese so gewählt sind, dafs seine Stellung nur noch von einer unabhängigen Veränderlichen abhängt, so führt die Drehung ohne Umkehr schliefslich in die Anfangslage zurück, von der sie ausgegangen ist. Die letzte Eigenschaft, das »Axiom der Monodromie«, wird, wie Helmholtz hervorhebt, von der gewöhnlichen Geometrie dadurch stillschweigend vorausgesetzt, dafs sie den Kreis als geschlossene Linie behandelt.

3. Die Folgerungen aus seinen Annahmen entwickelt Helmholtz nur für den Raum von drei Dimensionen. Er läfst einen Punkt des Raumes in Ruhe und betrachtet die Bewegung derjenigen Punkte, welche ihm unendlich nahe sind. Demnach setzt er die Unterschiede der Koordinaten dieser Punkte von denen des ruhenden Punktes gleich εx, εy, εz, wo ε eine unendlich kleine Gröfse bedeuten soll. Dann glaubt er aus seinen drei ersten Hypothesen folgern zu können, dafs die Änderungen der Gröfsen x, y, z sich unter Einführung einer neuen Variabeln η durch Auflösung der Differentialgleichungen ergeben:

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= a_0 x + b_0 y + c_0 z \\ \frac{dy}{d\eta} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \frac{dz}{d\eta} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \end{aligned}$$

wo die neun Koefficienten drei willkürlich veränderliche Gröfsen einschliefsen.

Indem er jetzt sein viertes Axiom hinzunimmt, leitet er aus diesen Gleichungen den Satz her, dafs bei der Ruhe eines zweiten Punktes die Punkte einer Linie in Ruhe bleiben; ferner zeigt er, dafs bei allen Drehungen um einen festen Punkt ein gewisser quadratischer Ausdruck der Differentiale denselben Wert beibehält.

4. Wir müssen aber davon Abstand nehmen, sein Beweisverfahren mitzuteilen, da der Satz, von dem Helmholtz ausgeht,

nicht richtig ist. Für seinen Beweis ist es nämlich wesentlich, daſs die Differentialgleichungen (1) drei willkürliche Parameter enthalten. Nun hängt allerdings die Drehung des Körpers um einen Punkt von drei willkürlichen Gröſsen ab; die vollständigen Differentialgleichungen, durch welche alle bei der Ruhe eines Punktes möglichen Bewegungen charakterisiert werden, enthalten somit drei Parameter. Man darf also annehmen, daſs die Drehung durch drei Gleichungen bestimmt wird, welche die Form haben:

$$(2) \quad \frac{dx_\alpha}{d\eta} = \psi_\alpha (x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3). \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Auch müssen, wofern man den ruhenden Punkt zum Nullpunkt der Koordinaten nimmt, die Funktionen ψ_1, ψ_2, ψ_3 für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ bei beliebiger Wahl der Gröſsen u_1, u_2, u_3 verschwinden; die Entwicklungen dieser drei Funktionen fangen also mit den ersten Potenzen der Variabeln an. Man darf aber nicht mit Helmholtz schlieſsen, daſs die Parameter u_1, u_2, u_3 sämtlich bereits in die Glieder der ersten Dimension eingehen, da es, wie Lie bemerkt, wohl denkbar ist, daſs in diesen Gliedern nur eine oder zwei Funktionen der Parameter vorkommen.

Um dies Bedenken als berechtigt nachzuweisen, betrachtet Lie eine gröſsere Zahl von Gruppen und vergleicht darin die vollständigen Ausdrücke für $\frac{dx_\alpha}{d\eta}$ mit den verkürzten, d. h. mit denjenigen, welche man erhält, wenn man sich darin nur auf die linearen Glieder beschränkt. Hierbei zeigt sich, daſs zu den verkürzten Gruppen vielfach ganz andere Gruppen gehören, als zu den vollständigen, daſs somit die Beschränkung auf die linearen Glieder häufig die Eigenschaften einer Gruppe wesentlich verändert.

5. Einer derartigen allgemeinen Untersuchung bedarf es aber im vorliegenden Falle nicht. Helmholtz glaubt nachweisen zu können, daſs für jeden dreidimensionalen Raum, welcher seinen drei ersten Voraussetzungen genügt, die Gleichungen (1) drei Parameter besitzen. Sein Beweis wird also nicht als streng angesehen werden können, wenn es möglich ist, eine Raumform anzugeben, für welche die drei ersten Axiome Helmholtz' richtig bleiben, während die Gleichungen (1) nur zwei willkürliche Konstanten enthalten. Eine solche Raumform ist aber, worauf Lie

hingewiesen hat, diejenige, welche durch die Gruppe bestimmt wird:

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ 2x_1p_1 + x_2p_2,\ 2x_1p_2 + x_2p_3,$$
$$4x_1^2p_1 + 4x_1x_2p_2 + x_2^2p_3.$$

Von dieser Raumform haben wir in § 7, 13 (S. 324) bewiesen, dafs sie den drei ersten Helmholtzschen Axiomen genügt, dafs aber in die Glieder der ersten Dimension, zu denen die Gleichungen (2) führen, nicht, wie Helmholtz meint, drei, sondern nur zwei willkürliche Parameter eintreten. Die Grundlage der von Helmholtz durchgeführten Rechnung ist also unrichtig.

6. Lie findet in den Helmholtzschen Voraussetzungen eine gewisse Unklarheit, indem man nicht erkennt, ob sie nur im allgemeinen gelten oder für alle Punkte in der Umgebung gewisser Punkte richtig sein sollen. Läfst man, um im dreidimensionalen Raume zu bleiben, einen Punkt in Ruhe, so verlangt Helmholtz, dafs für einen zweiten Punkt eine Gleichung besteht; seine Worte können so gedeutet werden, als fordere er, dafs der zweite Punkt in alle Lagen übergeführt werden kann, die der für ihn geltenden Gleichung genügen. Lie selbst bezeichnet diese Auffassung als unwahrscheinlich; ich möchte aber glauben, sie ganz ausschliefsen zu sollen. Am Schlufs der Arbeit, die wir hier besonders berücksichtigen, erwähnt Helmholtz zwei Raumformen, welche seinen drei ersten Hypothesen, aber nicht dem Monodromie-Axiom genügen. Bei dem zweiten Beispiel nimmt er für zwei Dimensionen die gleichseitige Hyperbel als die Linie gleichwertiger Entfernung von einem festen Punkte an. In diesem Falle wird die zugehörige Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen bestimmt: p, q, $py + qx$. Lassen wir einen Punkt in Ruhe, so bewegen sich alle Punkte der Ebene in Hyperbeln, und diese haben dieselben Asymptoten, welche sich im ruhenden Punkte schneiden. Wir sehen also, dafs die Abstandsfunktion die Lage des bewegten Punktes auf eine Hyperbel beschränkt, während er bei der Umgestaltung der Ebene auf demselben Zweige bleiben mufs. Indessen hangen die beiden Zweige der Hyperbel auch geometrisch nicht zusammen; die Liesche Auffassung wird also hierdurch noch nicht ganz ausgeschlossen. Dagegen kann ein Punkt, der bei Beginn der Bewegung auf einer Asymptote liegt, niemals mit dem ruhenden Punkte, der doch ebenfalls auf

der Linie liegt, zusammenfallen; er mufs auch während der ganzen Bewegung auf derjenigen, vom ruhenden Punkte ausgehenden Halbgeraden verbleiben, der er in der Anfangslage angehört. Dies Beispiel läfst also die Liesche Deutung nicht zu.

7. Nun zeigt Lie, dafs bei der strengen Deutung die ersten drei Helmholtzschen Axiome für sich ohne das Monodromie-Axiom ausreichen, aber bei anderer Deutung seine Hypothesen noch Möglichkeiten zulassen, welche ausgeschlossen werden sollen. Da wir wegen des einen von Helmholtz beigefügten Beispiels seine Worte nicht in der ersten Weise deuten können, so müssen wir leider anerkennen, dafs seine Axiome nicht genügen, um die eigentlichen Raumformen den uneigentlichen gegenüber zu charakterisieren. Der Begründung wegen erinnern wir an die in § 7, 14 (S. 326) behandelte Raumform. Auch hier bleibt bei der Ruhe eines Punktes jeder Punkt einer Linie in Ruhe, aber jeder andere Punkt kann noch in einer Fläche derartig bewegt werden, dafs die Gesamtheit der Bewegungen von drei Parametern abhängt. Wird noch ein zweiter Punkt und damit eine zweite Linie in Ruhe gehalten, so bewegen sich alle anderen Punkte in geschlossenen Linien und kehren gleichzeitig in ihre Anfangslage zurück. Diese Möglichkeit wurde von Helmholtz deshalb übersehen, weil die Differential-Gleichungen der Bewegung eine wesentliche Veränderung erleiden, wenn man sich in ihrem Ausdruck auf die Glieder der ersten Dimension beschränkt.

8. So sehen wir denn, dafs die Axiome, von denen Helmholtz ausgeht, nicht ausreichen, und dafs sein Beweis eine Lücke enthält. Dennoch hüte man sich, die Bedeutung seiner Arbeit zu unterschätzen. Seine Axiome stellen trotz ihrer Mangelhaftigkeit das Urbild dar, nach welchem alle späteren Versuche, die eigentlichen Raumformen den allgemeinen gegenüber zu charakterisieren, ohne Ausnahme gebildet sind. Auch die Lücken im Beweise lassen sich auf dem von Helmholtz selbst eingeschlagenen Wege beseitigen; indessen ist es nicht nötig, darauf einzugehen, da mittlerweile die Theorie der Transformations-Gruppen uns einfachere Methoden darbietet.

§ 9.

Lies Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

1. Lies Arbeiten [31]) auf diesem Gebiete bedeuten nach mehreren Richtungen hin einen Fortschritt; denn erstens giebt er dem Problem eine schärfere Fassung, zweitens geht er von einfacheren Voraussetzungen aus, und drittens genügt sein Beweis den strengsten Anforderungen. Der zu lösenden Aufgabe, die Lie als das Riemann-Helmholtzsche Problem bezeichnet, giebt er folgenden Ausdruck: »Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der Schar der euklidischen, wie den beiden Scharen von nicht-euklidischen Bewegungen zukommen, und durch die diese beiden Scharen vor allen anderen möglichen Scharen von Bewegungen einer Zahlenmannigfaltigkeit ausgezeichnet sind.«

Von diesem Problem giebt er zwei Lösungen, von denen sich die erste auf unendlich benachbarte, die andere auf endlich entfernte Punkte bezieht. Die erste Lösung geht von der Definition aus:

»Eine reelle kontinuierliche Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes besitzt in dem reellen Punkte P freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, wenn sie die folgenden Forderungen erfüllt: Hält man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement fest, so soll stets noch kontinuierliche Bewegung möglich sein; hält man dagegen aufser P und jenem Linienelemente noch ein beliebiges reelles Flächenelement fest, das durch beide geht, so soll keine kontinuierliche Bewegung mehr möglich sein.«

Dementsprechend charakterisiert Lie die euklidischen und die nicht-euklidischen Bewegungen im dreifach ausgedehnten Raume durch freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, indem er das Theorem beweist:

»Besitzt eine reelle kontinuierliche Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie sechsgliedrig und transitiv und durch eine reelle Punkttransformation dieses Raumes ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen dieses Raumes oder mit einer der beiden Gruppen von nicht-euklidischen Bewegungen dieses Raumes, also im zweiten Falle entweder mit der sechsgliedrigen reellen kontinuierlichen projektiven Gruppe, bei der die imaginäre Fläche: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1=0$ invariant bleibt, oder mit der reellen kontinuierlichen projektiven Gruppe der reellen nichtgeradlinigen Fläche: $x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0$.«

Auf den Beweis können wir hier nicht eingehen, da aus der Theorie der Transformations-Gruppen zahlreiche Sätze benutzt werden, die wir vorhin nicht haben mitteilen können.

2. Lie überträgt seine Theorie der freien Bewegung im Infinitesimalen auf Räume von beliebig vielen Dimensionen. Dabei macht er von folgenden Ausdrücken Gebrauch. Durch jeden Punkt eines n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \ldots x_n$ gehen ∞^{n-1} Linienelemente $dx_1 : \ldots : dx_n$, die eine $(n-1)$-fach ausgedehnte projektive Mannigfaltigkeit bilden; jedes ebene Büschel von ∞^1 solchen Linienelementen im R_n wird Element einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen oder kürzer M_2-element genannt. Ebenso soll jedes ebene Bündel von ∞^2 Linienelementen als Element einer Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen oder kurz als M_3-element bezeichnet werden, und so weiter. Für Linienelement soll zuweilen die Benennung M_1-element angewandt werden.

Hiernach wird folgende Definition aufgestellt:

»Eine reelle Gruppe von Punkttransformationen des R_n besitzt in dem reellen Punkte P freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, wenn sie folgende Forderungen erfüllt: Wird der Punkt P festgehalten, ferner ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1-element, ein beliebiges durch beide gehendes reelles M_2-element, ein beliebiges durch alle drei gehendes reelles M_3-element, und so fort, schliefslich ein reelles M_q-element, das durch jedes der vorherigen Elemente geht, so soll kontinuierliche Bewegung möglich sein, so lange, aber auch nur so lange, als $q < n-1$ ist.«

Im Anschlufs an diese Definition fordert Lie, dafs diejenigen Räume ermittelt werden sollen, welche in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen. Er findet, dafs nur der euklidische Raum und die beiden nicht-euklidischen Räume (im engern Sinne) dieser Forderung genügen, indem er das Theorem beweist:

»Besitzt eine reelle kontinuierliche Gruppe des R_n $(n > 3)$ in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig und transitiv und durch eine reelle Punkttransformation des R_n ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen dieses Raumes oder mit einer der beiden Gruppen von nicht-euklidischen Bewegungen, also im zweiten Falle entweder mit der reellen kontinuierlichen projektiven Gruppe der Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1 = 0$$

oder mit der reellen kontinuierlichen Gruppe der Mannigfaltigkeit:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0.«$$

Über den Beweis bemerken wir nur, dafs Lie seinen Satz für den Raum von $n > 3$ Dimensionen als bewiesen annimmt, dann alle reellen kontinuierlichen Gruppen des R_{n+1} aufsucht, die in irgend einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen, und daraus den Nachweis dafür herleitet, dafs sein Theorem auch im Raume von $n+1$ Dimensionen gültig ist.

3. Lie giebt aber noch eine zweite Lösung des Problems. Dabei geht er für den dreidimensionalen Raum von folgenden vier Axiomen aus:

I. Der R_3 ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.

II. Die Bewegungen des R_3 bilden eine reelle kontinuierliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe.

III. Hält man einen beliebigen reellen Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte: x_1, x_2, x_3, in die ein anderer reeller Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:

$$W(y_1^0, y_2^0, y_3^0; x_1^0, x_2^0, x_3^0; x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die für $x_1 = y_1^0$, $x_2 = y_2^0$, $x_3 = y_3^0$ nicht erfüllt ist und die (im allgemeinen) eine reelle, durch den Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 gehende Fläche darstellt.

IV. Um den Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 herum läfst sich ein endlicher dreifach ausgedehnter Bereich derart abgrenzen, dafs nach Festhaltung des Punktes: y_1^0, y_2^0, y_3^0 jeder andere reelle Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 des Bereiches noch kontinuierlich in jeden dem Bereiche angehörenden reellen Punkt übergehen kann, der die Gleichung $W = 0$ befriedigt und der mit dem Punkte: x_1^0, x_2^0, x_3^0 durch eine irreducible kontinuierliche Reihe von Punkten verbunden ist.«

Lie glaubt, dafs diese Axiome auch genügen, wenn man die eingeklammerten Worte: »im allgemeinen« beibehält; indessen will er hierauf kein Gewicht legen.

Die Schar der Punkte (x), welche der Gleichung $W = 0$ genügen, bildet im allgemeinen eine Fläche, die »Pseudokugel« mit dem Mittelpunkt (y^0), welche durch den Punkt (x^0) geht; nach dem dritten Axiom geht sie niemals durch den Mittelpunkt. Jetzt verlangt das vierte Axiom, dafs jeder Punkt (x^0), der in einer gewissen Umgebung des Punktes (y^0) liegt, sich bei der Ruhe von (y^0) frei auf der durch ihn gehenden Pseudokugel bewegen kann, die den Punkt (y^0) zum Mittelpunkte hat.

Lie selbst weist darauf hin, dafs seine Axiome weit weniger verlangen, als die von Helmholtz zu Grunde gelegten; darin wird man ihm unbedingt beistimmen. Der Beweis zerfällt in mehrere Teile. An erster Stelle wird gezeigt, dafs die zugehörige Gruppe transitiv und reell-primitiv ist, d. h. keine reelle Fläche oder Kurve in Ruhe läfst; daran schliefst sich der Nachweis, dafs die Gruppe von sechs Parametern abhängt, dafs zwischen zwei endlich von einander entfernten Punkten eine einzige Invariante besteht, und dafs bei der Ruhe eines Punktes die von ihm ausgehenden Linienelemente dreigliedrig transformiert werden. Indem Lie jetzt die Untergruppe untersucht, welche die Bewegung der von dem ruhenden Punkte ausgehenden Linienelemente regelt, gelangt er zu dem Satze, dafs nur die euklidischen und die Scharen der nicht-euklidischen Bewegungen seinen Forderungen genügen.

4. Auch für vier Dimensionen führt Lie seine Entwicklungen vollständig durch. Seine Axiome sind in diesem Falle die folgenden:

»I. Der R_4 ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.

II. Die Bewegungen des R_4 bilden eine reelle, kontinuierliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe.

III. Hält man einen beliebigen reellen Punkt: $y_1^0 \dots y_4^0$ von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte: $x_1 \dots x_4$, in die ein anderer reeller Punkt: $x_1^0 \dots x_4^0$ dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:

$$W(y_1^0 \dots y_4^0;\ x_1^0 \dots x_4^0;\ x_1 \dots x_4) = 0,$$

die für: $x_1 = y_1^0 \dots x_4 = y_4^0$ nicht erfüllt ist und die im allgemeinen eine reelle durch den Punkt: $x_1^0 \dots x_4^0$ gehende dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit darstellt.

IV. Um den Punkt: $y_1^0 \dots y_4^0$ herum läſst sich ein endlicher vierfach ausgedehnter Bereich derart abgrenzen, daſs die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Hält man den Punkt: $y_1^0 \dots y_4^0$ fest, so kann jeder andere reelle Punkt: $x_1^0 \dots : x_4^0$ des Bereichs noch kontinuierlich in alle reellen Punkte: $x_1 \dots x_4$ übergehen, die der obigen Gleichung $W = 0$ genügen. Hält man auſser dem Punkte: $y_1^0 \dots y_4^0$ noch einen zweiten reellen Punkt: $z_1^0 \dots z_4^0$ des Bereichs fest, so kann jeder andere reelle Punkt: $x_1^0 \dots x_4^0$ des Bereichs noch kontinuierlich in alle reellen Punkte: $x_1 \dots x_4$ des Bereichs übergehen, die der obigen Gleichung und der Gleichung:

$$W\,(z_1^0 \dots z_4^0;\; x_1^0 \dots x_4^0;\; x_1 \dots x_4) = 0$$

genügen. Dabei wird jedesmal vorausgesetzt, daſs die beiden Punkte: $x_1^0 \dots x_4^0$ und $x_1 \dots x_4$ durch eine irreducible kontinuierliche Reihe von Punkten derselben Art verbunden sind.«

Das dreidimensionale Gebilde, auf dem ein Punkt bei der Drehung um einen festen Punkt verbleibt, läſst Bewegungen in sich zu, für welche die beim dreidimensionalen Raume vorausgesetzten Axiome ausnahmslos gelten. Diese Bemerkung gestattet, mit besonderer Leichtigkeit für den vierfach ausgedehnten Raum die Folgerung aus den angegebenen Axiomen zu ziehen und nachzuweisen, daſs ihnen nur die Bewegungen des euklidischen, des Lobatschewskyschen und des Riemannschen Raumes genügen.

5. Für den mehrdimensionalen Raum begnügt sich Lie mit einigen Andeutungen; indessen sind diese vollständig genügend, erstens ein System von ausreichenden Forderungen aufzustellen und zweitens den Gang der Beweise übersehen zu lassen. Wohl weist er darauf hin, daſs seine Voraussetzungen einfacher sind als die von Helmholtz aufgestellten; dennoch neigt er der Meinung zu, daſs auch seine Axiome noch mehr voraussetzen, als unbedingt notwendig ist.

§ 10.

Eine andere Charakterisierung der eigentlichen Raumformen.

1. Dem Raume legen wir wiederum von vornherein die durch unsere Grundsätze ausgesprochenen Eigenschaften bei; wir

nehmen ferner an, dafs seine Punkte den Wertsystemen einer Mannigfaltigkeit stetig entsprechen und dafs die in ihnen möglichen Bewegungen durch die Transformationen einer Gruppe dargestellt werden können. Um unsere allgemeinen Gesetze über Transformations-Gruppen anwenden zu können, müssen wir ferner voraussetzen, dafs die Ausdrücke für die unendlich kleinen Transformationen, aus denen die Gruppe hervorgeht, diejenigen Differentiationen zulassen, auf die sich der Beweis der in § 1 zusammengestellten Sätze stützt. Nachdem wir allen Raumformen diese Eigenschaften beigelegt haben, suchen wir diejenigen Raumformen, welche unserer Erfahrung genügen, allen übrigen gegenüber zu charakterisieren. Dementsprechend fügen wir zu den allgemeinen Eigenschaften der Raumformen neue Axiome hinzu und fordern, dafs diese nur in denjenigen Raumformen gelten, die in allen ihren Eigenschaften mit der Erfahrung vereinbar sind. Die neuen Axiome dürfen daher a) den allgemeinen Grundsätzen nicht widersprechen, b) keine blofse Folge aus ihnen sein, müssen c) selbst der Erfahrung genügen, und d) nur solchen Raumformen zukommen, die in allen ihren Eigenschaften mit der Erfahrung übereinstimmen. Zugleich mufs unser Bestreben darauf gerichtet sein, die Zahl der neu einzuführenden Voraussetzungen möglichst zu beschränken.

2. Der Aufstellung der neuen Axiome[32]) schicken wir mehrere Erklärungen voraus. Wir sagen, eine dreidimensionale Raumform habe freie Beweglichkeit, wenn es bei der Ruhe eines Punktes noch möglich ist, jede durch ihn gehende Linie oder Fläche aus ihrer Anfangslage zu entfernen. In diesem Falle mufs es möglich sein, jede Linie und Fläche, die durch einen festen Punkt geht, bei der Drehung um diesen Punkt in eine von der Anfangslage verschiedene Lage zu bringen. Wir müssen also erstens den Fall ausschliefsen, dafs mit einem Punkt jedesmal die sämtlichen Punkte einer Linie oder einer Fläche, auf der der Punkt liegt, in Ruhe gehalten werden, und zweitens dürfen wir nicht gestatten, dafs bei allen dann noch möglichen Bewegungen eine solche Linie oder eine solche Fläche regelmäfsig in sich verschoben wird. Für jede vom ruhenden Punkte ausgehende Linie gelten daher die beiden Gesetze, dafs bei einer gewissen Drehung diese Linie einen Flächenteil beschreibt, und dafs bei einer andern Drehung

um denselben Punkt der durch die erste Drehung gewonnene Flächenteil einen Raumteil beschreibt.

Der freien Beweglichkeit legen wir den niedrigsten Grad bei, wenn der Raum aufser der soeben aufgestellten Forderung noch der weiteren Bedingung genügt, dafs bei der Ruhe eines Punktes kein zweiter alle Lagen innerhalb eines Raumteiles erhalten kann. Für eine dreidimensionale Raumform, welche freie Beweglichkeit im niedrigsten Grade besitzt, gelten demnach folgende Gesetze:

a) Läfst man einen Punkt in Ruhe und konstruiert man irgend eine Linie oder Fläche, welche durch den ruhenden Punkt hindurchgeht, so giebt es stets eine Bewegung, bei der diese Linie oder Fläche ihre Anfangslage verläfst.

b) Bei der Ruhe eines Punktes kann jeder zweite Punkt im allgemeinen noch in einer Fläche bewegt werden.

Die Richtigkeit des zweiten Gesetzes erkennt man auf folgendem Wege. Man ziehe vom ruhenden Punkte π aus irgend eine Kurve c. Dafs bei der Drehung um π kein Punkt dieser Kurve in alle Lagen gebracht werden kann, welche einem gewissen Raumteil angehören, folgt unmittelbar daraus, dafs wir der Beweglichkeit den niedrigsten Grad beigelegt haben. Wofern sich aber jeder ihrer Punkte nur auf einer einzigen Linie l bewegen kann, mufs jede Linie l bei allen Drehungen um den Punkt π in sich verschoben werden; die Fläche, auf der alle auf diese Weise erhaltenen Linien l liegen, kann also bei der Ruhe von π ihre Anfangslage nicht verlassen.

Jetzt beschränken wir uns auf diejenigen Raumformen, welche 1. drei Dimensionen haben und 2. freie Beweglichkeit vom niedrigsten Grade besitzen; wir wollen beweisen, dafs eine Raumform, für welche diese Forderungen erfüllt werden, allen unseren Erfahrungen genügt.

Wollen wir die neu hinzugefügten Voraussetzungen nochmals im einzelnen aufzählen, so können wir die folgenden Axiome aufstellen:

I. Der Raum hat drei Dimensionen.

II. Bei der Ruhe eines Punktes kann man jede durch ihn gelegte Linie oder Fläche noch so bewegen, dafs sie ihre Anfangslage verläfst.

III. Wird ein Punkt eines Körpers in Ruhe gehalten, so kann kein zweiter Punkt des Körpers alle Lagen erhalten, die einem Raumteile angehören.

Wir behaupten, dafs jede Raumform, in der diese Gesetze gelten, entweder parabolisch oder elliptisch oder hyperbolisch ist.

3. Dem Nachweise schicken wir einige kurze Bemerkungen voraus. Zunächst erinnern wir daran, dafs unsere Axiome durch die Erfahrung gefordert werden. Über die Dreizahl der Dimensionen haben wir uns schon öfters, namentlich im ersten Bande (S. 267—270) ausgesprochen. Die Berechtigung der weiteren Annahmen brauchen wir wohl nicht näher zu begründen. Es würde nicht schwer sein, sie in einer Form auszusprechen, bei der wir von den Grenzgebilden (Fläche, Linie und Punkt) gar keinen Gebrauch machen; indessen glauben wir, davon Abstand nehmen zu können.

Was die gebrauchten Ausdrücke betrifft, so wolle man beachten, dafs wir uns von vornherein auf solche Punkte beschränken, die in einem gewissen Bereiche liegen, und dafs wir ihnen reelle Koordinaten beilegen. Wir brauchen daher die Gültigkeit der Axiome nicht, wie Lie, eigens auf einen endlichen Bereich einzuschränken; auch haben wir weder die Realität der Variabeln noch die allgemeine Lage der Wertsysteme ausdrücklich hervorzuheben. Die sachliche Vergleichung der Lieschen Axiome mit den unsrigen behalten wir uns für eine spätere Stelle vor.

4. Jetzt gehen wir zum Beweise über, den wir auf analytischem Wege führen wollen. Dabei müssen wir, wie das erste Axiom verlangt, eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu Grunde legen. Der vierte Grundsatz nötigt uns, die Transformations-Gruppe, durch welche alle Bewegungen dargestellt werden, als transitiv vorauszusetzen; dagegen können wir von vornherein nicht wissen, ob die Gruppe endlich oder unendlich ist. Da bei der Drehung um einen Punkt ein zweiter Punkt noch alle Lagen auf einer Fläche (oder wenigstens auf einem Flächenteile), aber nicht alle Lagen in einem Raumteile annehmen kann, so mufs zwischen zwei Punkten eine, und zwar eine einzige Invariante bestehen. Wenn nämlich erst für drei Punkte eine Invariante existierte, so würde bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter noch mit allen Lagen zur Deckung gebracht werden können, die einen Raumteil anfüllen; gäbe es aber zwei verschiedene Invarianten

zwischen zwei Punkten, so wäre bei der Drehung um einen Punkt die Lage eines jeden anderen Punktes auf eine Linie beschränkt. Demnach läſst die zu der Raumform gehörende Gruppe eine einzige Funktion

$$J\,(x_1,\; x_2,\; x_3;\; y_1,\; y_2,\; y_3)$$

zwischen zwei beliebigen Wertsystemen (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) ungeändert. Wir wissen aber keineswegs, ob dies die einzige wesentliche Invariante der Gruppe ist, oder ob zwischen mehr als zwei Wertsystemen noch invariante Beziehungen bestehen, die von der angegebenen unabhängig sind.

5. Es ist jetzt unsere Aufgabe, aus denjenigen Gruppen, in denen zwischen zwei Wertsystemen eine invariante Beziehung besteht, diejenigen auszuwählen, welche unseren Axiomen genügen. Dabei dürfen wir auf die in § 4 gefundenen Resultate zurückgehen. Wir müssen nur annehmen, daſs, wofern es mehrere Invarianten für unendlich benachbarte Punkte gäbe, doch die dort gefundene Form wenigstens für eine unter ihnen gewahrt bliebe. Thun wir dies, so belehrt uns das Schluſsergebnis von § 4, daſs die Invariante entweder in der Form $L^{\lambda} M^{\mu} N^{\nu}$ oder in der Form $L^{\lambda} M^{\mu} e^{\mu \frac{N}{M}}$ oder in der Form $L^{\lambda} Q$ erscheint, wo L, M, N lineare Formen der Differentiale sind und Q in ihnen vom zweiten Grade ist, und wo die Exponenten λ, μ, ν auch von den Variabeln x_1, x_2, x_3 unabhängig sind. Wenn $\mu = \nu = 0$ ist, so ist die lineare Form $L = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ die Invariante. Die Verbindung der Resultate, zu denen wir in § 5, 4 und 5 geführt sind, zeigt uns, daſs alsdann bei der Drehung um einen Punkt eine durch den ruhenden Punkt gehende Fläche in sich verschoben wird. Sind aber zwei der Exponenten λ, μ, ν oder alle drei von null verschieden, so können bei der Ruhe eines Punktes nach § 5, 7 mindestens zwei durch den Punkt gelegte Flächen nur so bewegt werden, daſs sie in Deckung mit der Anfangslage verbleiben. Der Fall, daſs diese Flächen reell sind, muſs von vornherein ausgeschlossen werden. Wenn aber für reelle Variabele x_1, x_2, x_3 die Differentialgleichung (13) in § 5 für $C = 0$ nur durch komplexe Funktionen befriedigt wird, so müssen diese einander konjugiert sein; die Flächen, welche durch das Verschwinden der einzelnen Bestandteile dargestellt werden, behalten dann ihre

Anfangslage nicht bei; aber, wie man leicht sieht, haben sie eine reelle Linie gemeinschaftlich, und diese wird nur noch in sich verschoben, sobald man einen ihrer Punkte in Ruhe läfst. Da aber durch jeden Punkt des Raumes eine derartige Linie hindurchgeht, so müssen wir auch diesen Fall ausschliefsen. Dieselbe Betrachtung läfst sich anwenden, wenn unter den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 zwei konjugiert komplex sind. Unseren Voraussetzungen genügt also keine Invariante, welche für unendlich benachbarte Wertsysteme in der ersten oder zweiten Form erscheint, welche also in den Differentialen nur Formen ersten Grades enthält.

6. Demnach nimmt die Invariante die Form $L^\lambda Q$ an, wo L eine lineare, Q eine quadratische Form in den Differentialen ist. Auch dürfen wir annehmen, dafs Q eine eigentliche Form zweiten Grades darstellt, weil wir sonst auf den soeben erledigten Fall kämen. Aus den in § 6 gefundenen Gruppen sind diejenigen sofort auszuschliefsen, welche keine Invariante zwischen zwei Wertsystemen besitzen. Dann bleiben die folgenden übrig:

(1) $p_1,\ p_2,\ p_3;\ c_1p_1x_1 + c_2p_2x_2 + c_3p_3x_3,\ e_1p_1x_2 + e_2p_2x_3;$

(2) $p_1,\ p_2,\ p_3,\ 2x_1p_1 + x_2p_2,\ 2x_1p_2 + x_2p_3,\ 4x_1^2p_1 + 4x_1x_2p_2 + x_2^2p_3;$

(3) $x_0p_1,\ x_0p_2,\ x_0p_3,\ x_2p_3 - x_3p_2,\ x_3p_1 - x_1p_3,\ x_1p_2 - x_2p_1,$ wo ist $x_0 = \sqrt{1 - k\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$.

Bei der Herleitung ist ausdrücklich vorausgesetzt, dafs das Wertsystem (0, 0, 0) analytisch keinem Ausnahme-Gebilde angehört; wir dürfen daher, um die allgemeinen Gesetze für die Drehung um einen Punkt zu ermitteln, den Nullpunkt als ruhend voraussetzen. Dieser Festsetzung entspricht es, bei der dritten Gruppe das Gebiet so abzugrenzen, dafs in ihr die Hilfsgröfse x_0 einen positiven Wert hat; für $k = 0$ ist überhaupt $x_0 = 1$.

Legen wir jetzt die erste oder die zweite Gruppe zu Grunde, so finden wir, dafs bei der Drehung um den Nullpunkt die Fläche $x_1 = 0$ in sich verbleibt. Da wir aber in diesen beiden Gruppen alle Variabeln als reell voraussetzen müssen, so sehen wir, dafs bei der Ruhe eines Punktes eine durch ihn hindurchgehende Fläche in sich verschoben wird; diese beiden Gruppen entsprechen also unseren Axiomen nicht.

7. Wir haben nur noch die letzte Gruppe zu untersuchen. Dafs diese für reelle Werte von x_1, x_2, x_3, wo auch k reell sein mufs, allen unseren Forderungen genügt, leuchtet sofort ein. Es fragt sich nur, ob nicht zwei der Variabeln konjugiert komplex sein dürfen. Nun bleibt bei der Drehung um den Nullpunkt offenbar jede Fläche, deren Gleichung ist:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{Const.}$$

in Deckung mit ihrer Anfangslage. Sind hier aber die Variabeln x_2 und x_3 konjugiert komplex, so kann man leicht reelle Variabele y_1, y_2, y_3, welche mit x_1, x_2, x_3 zugleich verschwinden, derartig einführen, dafs die vorstehende Gleichung die Form annimmt:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = \text{Const.}$$

Speciell wird die Fläche $y_1^2 + y_2^2 = y_3^2$ bei allen Drehungen um den Nullpunkt in sich bewegt. Da diese Fläche aber durch den ruhenden Punkt geht, genügt diese Möglichkeit unseren Voraussetzungen nicht. Wir dürfen daher den Variabeln x_1, x_2, x_3 und der Konstanten k nur reelle Werte beilegen. Nun macht es geometrisch einen Unterschied, ob die Konstante k positiv, negativ oder gleich null ist. Demnach sind nur die elliptische, die hyperbolische und die parabolische Geometrie geeignet, unsere Axiome zu befriedigen.

8. Die im Anfange dieses Paragraphen angegebene Formulierung setzt von vornherein die Zahl der Dimensionen gleich drei fest. Wollen wir auch den mehrdimensionalen Raum berücksichtigen, so müssen wir entweder unsere Fassung in entsprechender Weise ändern oder auf die Liesche Fassung zurückgehen. Wir begnügen uns mit der letzteren, da es uns nur darauf ankommt, einen Unterschied zwischen dem Raume von drei und von vier Dimensionen anzugeben. Suchen wir eine neue Lösung des Problems für den mehrfach ausgedehnten Raum, so werden wir gut thun, den Begriff der »freien Beweglichkeit vom niedrigsten Grade« zu übertragen. Danach legen wir einer n-dimensionalen Raumform freie Beweglichkeit bei, wenn bei der Ruhe eines Punktes jedes durch den Punkt gelegte Grenzgebilde (von einer bis zu $n - 1$ Dimensionen) gezwungen werden kann, seine Anfangslage zu verlassen. Wollte man jetzt den niedrigsten Grad der freien Beweglichkeit dadurch charakterisieren, dafs bei der

Ruhe eines Punktes kein zweiter in alle ein n-dimensionales Gebiet anfüllende Lagen gelangen kann, so würde die freie Beweglichkeit vom niedrigsten Grade noch anderen Raumformen als den eigentlichen zukommen. Um das zu erkennen, betrachten wir die siebengliedrige Gruppe in vier Variabeln, welche aus den infinitesimalen Transformationen hervorgeht:

$$(4)\quad \begin{aligned} &p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ x_1p_2 - x_2p_1 + x_3p_4 - x_4p_3, \\ &x_1p_3 - x_3p_1 + x_4p_2 - x_2p_4,\ x_1p_4 - x_4p_1 + x_2p_3 - x_3p_2. \end{aligned}$$

Alle bei der Ruhe des Nullpunktes möglichen Bewegungen entsprechen der Gruppe, welche durch die drei letzten infinitesimalen Transformationen (4) erzeugt wird. Um die hierzu gehörenden endlichen Transformationen anzugeben, gehen wir von vier reellen Gröfsen a_1, a_2, a_3, a_4 aus, welche durch die Gleichung:

$$(5)\quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$$

mit einander verbunden sind, und setzen:

$$(6)\quad \begin{aligned} y_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \\ y_2 &= -a_2x_1 + a_1x_2 + a_4x_3 - a_3x_4 \\ y_3 &= -a_3x_1 - a_4x_2 + a_1x_3 + a_2x_4 \\ y_4 &= -a_4x_1 + a_3x_2 - a_2x_3 + a_1x_4. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dafs

$$(7)\quad \Sigma y_\iota^2 = \Sigma x_\iota^2$$

ist. Variiert man aber die Parameter $a_1 \ldots a_4$ unter der durch die Gleichung (5) geforderten Bedingung:

$a_1\delta a_1 + a_2\delta a_2 + a_3\delta a_3 + a_4\delta a_4 = 0$, so darf man setzen:

$$\delta a_1 = a_2\varkappa + a_3\lambda + a_4\mu,\ \delta a_2 = -a_1\varkappa + a_4\lambda - a_3\mu,$$

$$\delta a_3 = -a_1\varkappa - a_1\lambda + a_2\mu,\ \delta a_4 = a_3\varkappa - a_2\lambda - a_1\mu,$$

wo $\varkappa$, λ, μ unendlich kleine Gröfsen sein sollen. Diese Werte für $a_\nu + \delta a_\nu$ setze man in die Gleichungen (6) ein, indem man die der Anfangslage entsprechenden Koordinaten (x) unverändert läfst, aber y_ν durch $y_\nu + \delta y_\nu$ ersetzt; dadurch erhält man

$$\delta y_1 = -\varkappa y_2 - \lambda y_3 - \mu y_4,\ \delta y_2 = \varkappa y_1 + \lambda y_4 - \mu y_3,$$

$$\delta y_3 = -\varkappa y_4 + \lambda y_1 + \mu y_2,\ \delta y_4 = \varkappa y_3 - \lambda y_2 + \mu y_1,$$

was mit den drei letzten Symbolen (4) übereinstimmt. Somit sind die Gleichungen (6) die endlichen Transformationen, durch welche die Drehungen um den Nullpunkt dargestellt werden.

Aus den Gleichungen (6) gehen folgende Beziehungen hervor:

$$a_1 \Sigma x_\nu^2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

$$a_2 \Sigma x_\nu^2 = -x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3$$

$$a_3 \sum x_i^2 = -x_1 y_3 + x_2 y_4 + x_3 y_1 - x_4 y_2$$
$$a_4 \sum x_i^2 = -x_1 y_4 - x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1 .$$

Läſst man also einem festen Wertsystem (x) irgend ein Wertsystem (y) entsprechen, welches nur der Bedingung (7) genügt, so ergeben sich vermittelst der vorstehenden Gleichungen die Koefficienten $a_1 \ldots a_4$ in der Weise, daſs die Beziehung (5) befriedigt wird. Die Untergruppe gestattet demnach, einen Punkt (x) in einen Punkt (y) überzuführen, wofern nur für ihre Koordinaten die Summe der Quadrate denselben Wert besitzt. Jede vom Nullpunkt ausgehende Linie kann bei der Ruhe desselben noch so bewegt werden, daſs sie einen (vierdimensionalen) Raumteil beschreibt. Bei der Drehung um einen Punkt kann man somit jedes durch ihn hindurchgelegte Grenzgebilde so bewegen, daſs es seine Anfangslage verläſst. Für vier Dimensionen genügt es hiernach nicht, vorauszusetzen, daſs bei der Ruhe eines Punktes jeder andere Punkt alle Lagen in einem dreidimensionalen Grenzgebilde annehmen kann, und daſs kein Grenzgebilde, das durch den ruhenden Punkt geht, bei allen Drehungen in Deckung mit seiner Anfangslage verbleibt.

§ 11.
Rückblick.

Schon im dritten Abschnitt (B. 1. S. 176—178) haben wir auf Graſsmanns Ausdehnungslehre hingewiesen und in ihr einen recht umfassenden Wissenszweig kennen gelernt, der die Geometrie Euklids als speciellen Teil einschlieſst und der direkt auf die euklidischen Raumformen von einer beliebig hohen Zahl von Dimensionen führt, während darin die Riemannschen Raumformen ebenfalls ihre Stelle finden. Indem wir den Raumbegriff in derjenigen Weise erweitert haben, die in § 10 des siebenten Abschnitts durchgeführt ist, haben wir bloſs das zum vollen Abschluſs gebracht, was Graſsmann vor mehr als fünfzig Jahren angebahnt hatte.

Indessen beruht die Bedeutung der Ausdehnungslehre hauptsächlich in den eigentümlichen Methoden, vermittelst deren es ihr möglich wird, nicht nur weite Partieen der Geometrie, sondern auch schwierige Probleme der Analysis auf eine einheitliche und übersichtliche Weise zu bewältigen. Dennoch gewährt es einiges

Interesse, zu sehen, dafs sie in ihren Grundlagen manche Ähnlichkeit zeigt mit einem System, welches Veronese vor wenigen Jahren aufgestellt hat (VII § 9 S. 294 ff.). Zwar haben wir der Art und Weise, in welcher der italienische Mathematiker die Geometrie begründet, und die er als die allein berechtigte hinstellen möchte, aus vielen Gründen nicht zustimmen können. Ganz abgesehen von den schweren Bedenken gegen seine unendlich grofsen und unendlich kleinen Segmente können wir der allgemeinen Einführung der Gleichheit in seinem Sinne nicht beipflichten. Dennoch haben wir die Bedeutung seines Werkes recht hoch anschlagen müssen. Indem Veronese in jeder Figur je zwei Punkte durch eine gerade Strecke verbindet und die daraus entstehende neue Figur der Untersuchung zu Grunde legt, gelingt es ihm, eine einheitliche Methode zu schaffen, die ihm sogar gestattet, kongruente und symmetrische Figuren zu unterscheiden, ohne die Bewegung zu benutzen. Veronese legt dem Raum an sich unendlich viele Dimensionen bei; der n-dimensionale Raum für jede Zahl n ist für ihn blofs eine Figur im allgemeinen Raume. Wäre er in gleicher Weise von einem allgemeineren Begriff der Gleichheit ausgegangen, so würde er nicht gezwungen worden sein, sich auf einzelne Raumformen zu beschränken, die weder theoretisch noch für die Erfahrung vor den von ihm ausgeschlossenen einen Vorzug besitzen.

Auch Tillys Versuch (VII § 8. S. 208 ff.) kann als befriedigend nicht angesehen werden, darf aber keineswegs vollständig verworfen werden. Der wesentlichste Punkt seines Hauptaxioms besteht in der Forderung, dafs die Abstandsfunktion zweier Punkte nur dann gleich null wird, wenn die Punkte zusammenfallen. Dadurch tritt dasselbe in enge Beziehung zu den Voraussetzungen, die wir in VIII § 10 zu Grunde gelegt haben; somit bietet auch sein Aufbau Anknüpfungspunkte mit den allgemeinen Ideen, von denen wir ausgegangen sind.

Das »Experiment«, vermittelst dessen Überweg (VII § 7. S. 204) eine einheitliche Grundlage für die Geometrie glaubt schaffen zu können, kann nicht als ausreichend angesehen werden; wie nahe es aber bereits an die Wahrheit herankommt, zeigt die Ähnlichkeit mit den »Thatsachen«, die nach Helmholtz' Ansicht der Geometrie zum Grunde liegen.

Die von Wundt aufgestellte Definition des Raumes (VII § 6) ist nicht streng; auch wird es nie gelingen, von ihr aus die fundamentalen Eigenschaften des Raumes zu beweisen. Dennoch müssen wir dem zu Grunde liegenden Gedanken unbedingt zustimmen. Wundt geht von Begriffen aus, die in ihrer weiteren Bedeutung über alles Räumliche hinausreichen; er sucht sie aber in solcher Weise zu verbinden und dadurch zu beschränken, dafs der neue Begriff mit dem des Raumes zusammenfällt. Dies Verfahren kommt im Wesen ganz auf dasjenige hinaus, welches wir in den letzten Paragraphen eingeschlagen haben. Unseren allgemeinen Raumformen liegen Begriffe zu Grunde, welche durchaus nicht auf den Raum beschränkt sind, da den Grundsätzen, wenngleich sie zuvörderst durch räumliche Abstraktionen gewonnen sind, an sich nichts Räumliches anhaftet. Das von uns gewählte Wort Raumform thut, wie aus den beigefügten Erläuterungen hervorgeht, nichts zur Sache, da wir diese Wahl nur getroffen haben, um anzudeuten, dafs unter allen Wissenszweigen, denen diese Bezeichnung beigelegt werden kann, der Raum (im wahren Sinne) der wichtigste ist. Demnach kommt Lies Fassung des von ihm nach Riemann und Helmholtz benannten Problems im wesentlichen auf die Aufgabe hinaus, die sich Wundt bei seiner Definition stellt; es handelt sich ja in beiden Fällen nur darum, eine derartige Verknüpfung allgemeinerer Begriffe zu finden, dafs der neu gewonnene Begriff mit dem des Raumes identisch wird. Vielleicht tritt die Übereinstimmung zwischen den beiden Problemen bei der in VIII § 10 angegebenen Formulierung noch deutlicher hervor.

Wir dürfen jedoch in diesen Erörterungen nicht weiter gehen, ohne uns auf den Boden der Philosophie zu begeben, den wir glauben hier nicht betreten zu sollen. Demnach wenden wir uns den übrigen Untersuchungen zu, welche in den beiden letzten Abschnitten angestellt sind. Auf die Darlegungen über Winkel, Gerade und Ebene gehen wir nicht nochmals ein, weil sie nur orientieren sollen und nicht als abschliefsend angesehen werden können. Im zehnten Paragraphen des siebenten Abschnitts haben wir ein System von Begriffen und Sätzen aufgestellt, von dem wir glauben, dafs es eine geeignete Grundlage für die Geometrie bildet. Aber diese Grundsätze werden aufser dem Raume auch von sehr vielen anderen Wissenszweigen befriedigt; jedes System von Begriffen und Urteilen, für das dieselben gelten, wurde als Raumform im uneigentlichen Sinne bezeichnet (VII § 11). Wir haben noch die Grenzgebilde allgemein definiert; im übrigen begnügten wir uns damit, an einigen Beispielen zu zeigen, dafs unsere Grundsätze keineswegs auf den Raum (im eigentlichen Sinne) beschränkt sind. Für den weiteren Fortschritt aber glaubten wir die Hilfe der Analysis in Anspruch nehmen zu sollen. Indessen stellt sich uns hier eine grofse Schwierigkeit entgegen.

Zwar hat man schon seit langem die Analysis benutzt, um geometrische Eigenschaften aufzufinden und zu begründen. Aber bei der analytischen Geometrie sowohl des euklidischen wie der nicht-euklidischen Räume (im engern Sinne) pafst man die Koordinaten den einzelnen Raumformen eng an, damit ihre Eigentümlichkeiten durch die Formeln schon zum deutlichen Ausdruck kommen. In einer solchen Weise kann man aber die Koordinaten erst aufstellen, wenn man die charakteristischen Eigenschaften der Raumform kennt. Demnach ist dieser Weg hier ausgeschlossen, da die einzelnen Raumformen erst aufgefunden werden sollen. Wir müssen daher, wenn der Ausdruck gestattet ist, ein Koordinatensystem zu Grunde legen, das sich für alle Raumformen in gleicher Weise eignet. Haben wir schon im fünften Abschnitt gesehen, welche Schwierigkeiten die Messung in der euklidischen Geometrie selbst dann noch bietet, wenn man ihre Eigenschaften als bekannt voraussetzt, so kann man ermessen, dafs der Übergang von den allgemeinen Grundsätzen zur analytischen Darstellung nicht einfach sein kann.

Andererseits besitzt die rechnende Methode ganz besondere Vorzüge. Fast bei allen Versuchen, die bisher angestellt sind, um von wenigen Annahmen aus durch blofse Überlegung zu den ersten Sätzen der Geometrie zu gelangen, hat man, ohne es zu bemerken, mehr in die Voraussetzungen hineingelegt, als sie wirklich enthalten. Diese Wahrnehmung machten wir schon auf den ersten Seiten des ersten Bandes, als wir die angeblichen Beweise des Parallelaxioms besprachen. An demselben Mangel kranken nahezu ohne Ausnahme die bisher angegebenen Methoden, die Existenz der Geraden und der Ebene aus der der Kugel herzuleiten. Dieser Fehler trat uns auch in Überwegs und Tillys

Arbeiten (VII § 7 u. 8) entgegen. Bei der analytischen Behandlung ist man in einer weit günstigeren Lage, weil im Verlaufe der Rechnung kein neues Moment hinzutreten kann. Das durch eine fehlerlose analytische Herleitung gewonnene Resultat stützt sich auf diejenigen Voraussetzungen, welche der Rechnung selbst zu Grunde liegen. Ein Fehler in einem analytisch durchgeführten Beweise wird, sobald er einmal nachgewiesen ist, allgemein anerkannt; dagegen ist es schwer, jemanden davon zu überzeugen, dafs sich in seine begriffliche Entwicklung fremde Bestandteile eingemischt haben.

Von diesem Gesichtspunkte aus ist es nur zu billigen, dafs Riemann und Helmholtz ohne vorangehende Prüfung auf die vorliegende Frage die Analysis anwandten und dafs andere ihnen hierin nachgefolgt sind. Andererseits mufs man wünschen, die Erlaubtheit der Rechnung in aller Strenge begründen zu können, wie dies in der euklidischen Geometrie von jeher Sitte gewesen ist. Da aber die Schwierigkeit dieser Aufgabe sehr grofs ist, haben wir einen Mittelweg eingeschlagen, indem wir nur die leitenden Gedanken angaben, ohne sie nach allen Richtungen hin durchzuführen. Auf diese Weise hofften wir dem Leser einen Einblick in die wesentlichsten Punkte zu ermöglichen, ohne seine Geduld zu sehr in Anspruch zu nehmen. Dabei mufsten wir ausdrücklich zwei Voraussetzungen beifügen, die sich unseren Grundsätzen in etwa anpassen, ihnen aber nicht nahe genug stehen, um ihnen zugezählt zu werden. Der angedeutete Beweis läfst sich aber erst dann zum vollen Abschlufs bringen, nachdem gewisse Untersuchungen, zu denen G. Cantor und Peano den Grund gelegt haben, und die im ersten Bande (S. 168—172) erwähnt worden sind, eine Fortentwicklung gefunden haben. Aber selbst bei der unvollendeten Form, in der die Herleitung geboten wurde, tritt die nahe Beziehung der allgemeinen Raumformen zu den Lieschen Transformations-Gruppen deutlich zu Tage. Wir sind also berechtigt, die Theorie dieser Gruppen für unsern Zweck anzuwenden. Nur dürfen wir nicht vergessen, dafs die Herleitung der Grundgesetze für die Transformations-Gruppen mehrfach von Differentiationen Gebrauch macht; demnach müssen wir endlich noch annehmen, dafs die auftretenden Funktionen die ersten und zweiten Differentialquotienten nach den Variabeln besitzen.

Der Nachweis derjenigen Sätze, auf denen die Theorie der Transformations-Gruppen beruht, ist nicht so einfach, dafs wir ihn hätten aufnehmen können. Wir mufsten uns also damit begnügen, diese Sätze in VIII § 1 rein historisch mitzuteilen, ohne in ihre Begründung einzugehen, und sie in § 2 durch Beispiele zu erläutern. Vielleicht wäre es besser gewesen, das ganze Gebäude in dem von Lie entwickelten Umfange als bekannt vorauszusetzen; dann hätten die Beweise an Einfachheit und vielleicht an Strenge gewonnen. Zu einem solchen Verfahren haben wir uns aber nicht entschliefsen können und es vorgezogen, alle Sätze, deren wir weiter benötigten, in den §§ 3—6 herzuleiten. Dadurch wurden wir befähigt, die in § 10 angegebene Charakterisierung bei der Beschränkung auf drei Variabele zu beweisen; auch konnten wir die Mängel würdigen, welche Lie in Helmholtz' Beweisverfahren gefunden hat; nur mufsten wir darauf verzichten, Lies Begründung seiner Axiome wiederzugeben.

Die Anwendung der Transformations-Gruppe für unsere Theorie kann sich nach drei verschiedenen Richtungen hin erstrecken: an erster Stelle kann man von einer einzelnen Gruppe ausgehen und die ihr entsprechende Raumform untersuchen; zweitens könnte man versuchen, mit Hilfe der Transformations-Gruppen einen Überblick über alle Raumformen zu gewinnen; man kann drittens verschiedene Klassen von Raumformen mit einander vergleichen. Aufgaben der ersten Art haben wir mehrfach erledigt, indem wir die Eigenschaften einer Raumform vermittelst der zugehörigen Gruppe hergeleitet haben. Die zweite Aufgabe aber ist zu umfassend, als dafs sie, abgesehen von der Unmöglichkeit, sie mit den jetzt gebotenen Hilfsmitteln zu bewältigen, von uns hätte in Angriff genommen werden können. Was die dritte Art von Problemen betrifft, so erinnern wir unter anderem daran, dafs die Theorie der Transformations-Gruppen zuweilen Raumformen, die scheinbar ganz verschiedener Natur sind, eng mit einander verknüpft. Betrachtet man z. B. statt des Punktes die Gerade oder die Ebene als Element im dreidimensionalen euklidischen Raume, so erhalten wir zwei neue Raumformen; ihre Verwandtschaft mit der ursprünglich gegebenen tritt uns analytisch in der Gleichartigkeit des Baues der zugehörigen Transformations-Gruppen entgegen. Auch die parabolische, elliptische und hyperbolische Geometrie dürfen, wie wir an zahlreichen früheren Stellen erkannt haben, als Glieder einer einzigen Klasse betrachtet werden. Schon der erste Band hat uns gezeigt, dafs wir ihrer analytischen Untersuchung dieselben Formeln zu Grunde legen dürfen, wofern wir darin eine gewisse Konstante, das Riemannsche Krümmungsmafs, aufnehmen; einem positiven Werte dieser Konstante entspricht die elliptische, einem negativen die hyperbolische Geometrie, während diese Konstante für die parabolische Geometrie den Wert null annimmt. Auch die zu diesen drei Raumformen gehörenden Gruppen kann man einheitlich darstellen, sobald man diese Konstante benutzt.

Unter den Problemen der dritten Klasse besitzt eins ganz hervorragende Wichtigkeit, nämlich die Aufgabe, die drei eigentlichen Raumformen allen anderen gegenüber zu charakterisieren. In dieser Hinsicht sind noch immer von hoher Bedeutung die Arbeiten von Helmholtz (VIII § 8) trotz der Mängel, die Lie in ihnen nachweisen konnte. Lie selbst hat uns mit zwei Lösungen (VIII § 9) bekannt gemacht, die beide grofse Vorzüge besitzen. Seine Axiome sind zunächst einfacher als die von Helmholtz aufgestellten; sie reichen zudem vollständig aus, während jene noch Möglichkeiten zulassen, die ausgeschlossen werden sollen; endlich genügt Lies Beweisverfahren den Anforderungen der Strenge in vollem Mafse. Auch gelingt es ihm, seine Axiome und seine Beweise auf jede beliebige Zahl von Dimensionen zu übertragen.

Was uns an Lies Axiomen weniger gefällt, ist der gänzliche Mangel an Anschaulichkeit; die analytische Seite tritt vor der geometrischen gar zu sehr hervor. Seine Voraussetzungen für den dreidimensionalen Raum an der Erfahrung zu prüfen, ist selbst bei seiner zweiten Lösung ausgeschlossen. Bei seiner ersten Lösung, wo er nur mit Linien- und Flächenelementen operiert, fällt die geometrische Deutung ganz weg; aber es dürfte sogar schwer sein, in exakter Weise die Bedeutung der Axiome nach ihrer rein analytischen Seite hin anzugeben. Diese Aufgabe kann erst dann für erledigt angesehen werden, wenn die in dem Worte »Element« bezw. »unendlich klein« liegenden Grenzübergänge deutlich beschrieben sind. Das ist wenigstens bis jetzt noch nicht geschehen.

Deshalb haben wir geglaubt, im letzten Paragraphen wenigstens für drei Dimensionen ein System von Axiomen angeben zu sollen, das sich der Erfahrung durchaus anschliefst. Es ist sogar möglich, die neuen Voraussetzungen in einer Form auszusprechen, bei der die Worte Punkt, Linie und Fläche ganz vermieden werden und bei der nur von der Bewegung fester Körper die Rede ist; indessen haben wir es nicht für nötig gehalten, dies durchzuführen.

In einem Punkte verlangen allerdings unsere Axiome mehr als die Lieschen; wir setzen nämlich die Transitivität der Gruppe von vornherein voraus, während sie von Lie aus seinen Voraussetzungen hergeleitet wird. Dafs hierin bei unserm Ausgangspunkte keine Beschränkung liegt, ist sofort klar. Indessen haben wir ausdrücklich unsere Grundsätze nur als erlaubt, nicht als notwendig hingestellt. Man könnte daher denken, dafs man bei einem anderen Verfahren auch auf Raumformen geführt würde, denen intransitive Gruppen genügten. Aber das ist ausgeschlossen, weil die Aufstellung von Koordinaten irgend eine Messung voraussetzt, diese aber nur möglich ist, wenn die sämtlichen Wertsysteme eines Bereiches zu einander in Beziehung treten können, was bei den intransitiven Gruppen ausgeschlossen ist. Wir vermögen es daher nicht als einen wirklichen Vorzug anzusehen, dafs Lie die Transitivität nicht in die Axiome aufgenommen hat.

Zum Schlufs möge noch folgende Bemerkung gestattet sein. Lie glaubt, durch seine erste Lösung das Problem für jede beliebige Zahl von Dimensionen endgültig erledigt zu haben; dasselbe möchte er für den dreidimensionalen Raum in gewissem Sinne auch von seiner zweiten Lösung behaupten, während er für eine gröfsere Zahl von Dimensionen nur zeigen will, dafs seine Voraussetzungen ausreichen, aber der Ansicht hinneigt, dafs sie noch überflüssige Elemente enthalten. Demgegenüber glaube ich, dafs die einfachste Lösung des vorliegenden Problems überhaupt noch nicht gefunden ist, und dafs es sich durchaus lohnt, nach einfacheren Axiomen zu suchen. Doch kann hier nicht der geeignete Ort sein, auf die Begründung meiner Ansicht einzugehen.

Litteratur-Nachweis.

[1]) V § 3. S. 9. Burkhardt, Beiträge zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Göttinger Berichte 1895 Heft 1.

[2]) V § 4. S. 15. Die hier aus Proklus mitgeteilte Stelle findet sich in der Friedleinschen Ausgabe auf S. 194, 195; sie ist weitläufig besprochen in zwei Arbeiten, welche Tannery in Darboux' Bulletin B. XVI S. 124 und B XIX S. 162 veröffentlicht hat; die Lobsprüche, welche Tannery darin dem Apollonius spendet, sind gewifs voll verdient.

Die Theorie der Rektifikation, wie sie hier für den Fall entwickelt wird, dafs die Linie überall Tangenten und Schmiegungsebenen besitzt, dürfte schon lange bekannt sein, ohne dafs sich gerade der erste Begründer angeben läfst. Unsere Darlegung lehnt sich eng an Scheeffer an (allgemeine Untersuchungen über die Rektifikation der Kurven, Acta math. V S. 49—82). Dieser (leider zu früh verstorbene) Geometer betrachtet aber auch den Fall, dafs die Kurve keine Tangenten hat in der Weise, welche im weiteren Verlaufe des Paragraphen mitgeteilt wird. Die gegen seine Theorie von P. du Bois-Reymond (Acta math. VI S. 167) erhobenen Einwände kann ich für begründet nicht anerkennen, wenn auch Pringsheim (Münchener Berichte 1895 S. 55) meint, sie seien bisher nicht widerlegt. Die zum Schlufs des Paragraphen benutzte Funktion ist, wie Sch. selbst angiebt, von Weierstrafs aufgestellt und von G. Cantor in der Arbeit, Condensation der Singularitäten, math. Annalen B. 19, veröffentlicht.

[3]) V § 5. S. 22. Über die Zerlegung flächengleicher Polygone in kongruente Flächen vergleiche man folgende Arbeiten: W. Bolyai, tentamen juventutem . . . introducendi, Maros Vásárhelyini 1832 u. 1833; Gerwien, Zerschneidung flächengleicher Polygone, Crelles Journal B 10; Göpel, Teilung ebener Figuren, Grunerts Archiv B. 4; Réthy, endlich-gleiche Flächen, math. Ann. B. 38. Man vergleiche auch Paolis, elementi di Geometria, und Stolz, allgem. Arithmetik B. 1.

[4]) V § 5. S. 23. Hierauf dürfte zuerst der Verf. hingewiesen haben, und zwar in einer Anzeige von Stolz' Arithmetik I (Schlömilchs Zeitschrift) und in seinen »nicht euklidischen Raumformen« (Leipzig 1885). In dem zuletzt genannten Werke ist bereits der hier durchgeführte Beweis kurz skizziert. Demselben Gedanken sind auch zwei kleinere Arbeiten gewidmet, eine von F. Schur, Berichte der Dorpater Naturf.-Gesellschaft, eine zweite von Stolz, Monatshefte für Math. u. Phys., B. 5; beide führen ein neues Axiom ein, ohne die Begründung zu versuchen.

[5]) V § 5. S. 32. Schwarz, sur une définition erronée des surfaces Brief an Hrn. Hermite, mitgeteilt in dessen Cours 1883 und in Schwarz' gesammelten Werken B. II).

[6]) V § 6. S. 35. Auch die hier angegebene Methode, beliebige Körper zu messen, ist die Durchführung eines bereits in meinen »nicht-euklidischen Raumformen« angegebenen Gedankens.

[7]) V § 10. S. 49. Für den Inhalt dieses Paragraphen kommen zahlreiche Arbeiten G. Cantors in Betracht, wenngleich hier nur die ersten Sätze seiner Theorie mitgeteilt werden konnten und alle tieferen Untersuchungen unbeachtet bleiben mufsten. Man vergleiche folgende Arbeiten: Journal für die Math., B. 77, S. 258—262; B. 84, S. 242—258; math. Annalen: B. 4, S. 139—143; B. 5, S. 123—132; B. 15, S. 1—8; B. 17, S. 255—258; B. 20, S. 113—122; B. 21, S. 51—58 u. S. 545—591; B. 23, S. 453—488; B. 46, S. 480—504; B. 49, S. 207—246; Acta math. B. 2, S. 305—414; B. 4, S. 381—392; B. 7, S. 105—124. Die beiden letzten in den Annalen veröffentlichten Arbeiten konnten leider für die vorliegende Skizze nicht mehr benutzt werden.

[8]) V § 11. S. 54. Man vergleiche eine kleine Programmarbeit: Einige Bedenken gegen Veroneses transfinite Zahlen (Münster 1895), sowie die Note: Über transfinite Zahlen, math. Ann. B. 48, S. 425—432.

[9]) V § 12. S. 59. Veronese, Fondamenti di Geometria (Padova 1891), auch in deutscher Übersetzung, besorgt von Schepp (Leipzig 1894); für den Inhalt des Paragraphen vergl. S. 67—166 der italienischen, S. 77—184 der deutschen Ausgabe.

Levi-Cività, Sugli infiniti ed infinitesimi attuali, Atti del R. Istituto Veneto, 1893. Auf einen bedenklichen Punkt der Veroneseschen Theorie weist Cantor, math. Ann. B. 46, S. 500, 501 hin. Hiergegen und gegen meine eben angeführte Programmarbeit wendet sich Veronese in dem Aufsatz: Intorne ad alcune asservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi, math. Ann. B. 47, S. 423—432. Über die Veroneseschen Zahlen handelt auch Schönflies in einem Vortrage, den er auf der Mathematiker-Versammlung 1896 gehalten hat. Wenn Herr Veronese in seiner neuesten Publikation, sul postulato della continuità, Rendiconti dell' Accad. dei lincei, vol. VI p. 161—168, einen Gegensatz zwischen Cantor, Schönflies und mir hinstellt, so dürfte er im Irrtum sein; speciell mit Herrn Cantor stimme ich vollständig überein. Auf den Inhalt dieser Arbeit, die erst nach dem Druck der ersten Bogen meines Buches erschienen ist, brauche ich nicht einzugehen.

[10]) VI § 1. S. 73. Für den Inhalt dieses Paragraphen vergleiche man die früher citierten Arbeiten von Klein über die nicht-euklidische Geometrie im 4., 6. und 7. Bande der math. Annalen, sowie die im ersten Bande unter 6. angeführten Abhandlungen Beltramis. Aufser den angeführten Arbeiten Kleins sind auch seine autographierten Vorlesungen über die nicht-euklidische Geometrie wohl zu beachten; bei der Herausgabe des ersten Bandes standen sie mir nicht zu Gebote und konnten deshalb nicht citiert werden. Ich möchte hier nur erwähnen, dafs diese Vorlesungen auch für die selbständige Begründung der Projektivität von Bedeutung sind.

[11]) VI § 2. S. 81. Staudt, Geometrie der Lage und Beiträge zur Geometrie der Lage; Klein, die früher angeführten Aufsätze. Eine sehr genaue Theorie liefert Pasch in seinen Vorlesungen über die neuere Geometrie (Leipzig 1882), sowie in zahlreichen spateren Aufsätzen, die in den math. Ann. veröffentlicht sind. Weiter vergleiche man: Schur, Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projektive Geometrie, math. Ann. B. 39; Burkhardt, die unter 1. citierte Arbeit, namentlich § 2 derselben.

[12]) VI § 3. S. 112. Das Schlufsresultat dieses Paragraphen war bereits angegeben in § 1 der Arbeit: Zur projektiven Geometrie, math. Ann. B. 43, S. 573 ff.; dort war ausdrücklich die Annahme gemacht, dafs alle projektiven Transformationen für einen fest gewählten Bereich eindeutige Resultate liefern. Das dort unter dieser Annahme für den eindimensionalen Raum gewonnene Ergebnis habe ich geglaubt, hier nicht wiederholen zu sollen

[13]) VI § 4 S. 112. Man vergleiche § 2 der Arbeit: Zur projektiven Geometrie, math. Ann. B. 43. In vieler Hinsicht wäre es besser gewesen, die §§ 5 u. 6 dem § 4 vorangehen zu lassen; da aber in § 6 einige Sätze über Transformations-Gruppen nicht wohl entbehrt werden können, welche mit dem in § 4 gegebenen Beweise besonders eng zusammenhangen, so schien es angebracht, diesen voranzustellen.

[14]) VI § 7. S. 156. Amodeo, quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno S_r, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXVI.

Fano, sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni, Giornale di matematiche, vol. XXX.

[15]) VII § 2. S. 171. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie unter Benutzung der Vorträge von Clebsch. B. 2, S. 547, 548.

Über den Inhalt dieses Paragraphen möchte ich noch bemerken, dafs manche Geometer glauben, die durch zwei Strahlen gebildete Figur nicht als Winkel bezeichnen zu dürfen, und deshalb dieser Figur einen eigenen Namen beilegen.

[16]) VII § 3. S. 181, 182, 183. Schotten, planimetrischer Unterricht B. 1, S. 261.

Crelle, Zur Theorie der Ebene (Journal für Math. B. 45).

Deahna, demonstratio theorematis, esse superficiem planam. Marburg 1837.

[17]) VII § 4. S. 190. Durch das hier angegebene Beispiel beweist Weierstrafs die Unrichtigkeit des sog. Dirichletschen Princips (Werke, B 2, S. 49—54).

[18]) VII § 4. S. 190. Bettazzi, il concetto di lunghezza e la retta, annali di matem. S^e II. T. XX.

[19]) VII § 6. S. 198. Wundt, Logik B. I. In den Darlegungen der ersten und der zweiten Auflage habe ich keinen wesentlichen Unterschied gefunden.

[20]) VII § 7. S. 204. Überweg, Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt; Archiv für Philologie und Pädagogik B. 17 (1851). Die französische Übersetzung, welche Delboeuf verfaſst und seinen Prolégomènes philosophiques de la géométrie (Liège 1860) beigegeben hat, führt den Titel: Exposition scientifique des principes de la géométrie, précédée d'une discussion sur le fondement de la certitude des propositions premières de cette science.

Wegen der beabsichtigten Neubearbeitung vergleiche man die Erinnerungen, welche Theod. Toeche der dritten Auflage des dritten Teiles von Überwegs Geschichte der Philosophie vorausschickt.

Die erwähnten Arbeiten von Helmholtz sind unter 30. angegeben.

[21]) VII § 8. S. 208. Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique, par J. M. de Tilly, Bordeaux 1879. Meine Bemerkung (math. Ann. B. 35, S. 430), Tillys Voraussetzungen kämen darauf hinaus, zu fordern, dafs die entsprechende Transformations-Gruppe eine einzige wesentliche Invariante zwischen zwei Punkten hätte, ist nicht zutreffend; als ich sie machte, war es mir unmöglich, die Arbeit selbst einzusehen. Das Bedenken Lies, die Forderung der Stetigkeit habe keine Berechtigung, ehe der Raum als Zahlenmannigfaltigkeit vorausgesetzt werde, kann ich als berechtigt nicht anerkennen.

[22]) VII § 9. S. 214. Das Werk Veroneses wurde unter 9. angegeben; man vergleiche die Besprechung durch Schönflies (Göttinger Anzeigen 1896). Für den Wortlaut habe ich geglaubt mich ganz an die Übersetzung des Herrn Schepp anschliefsen zu sollen, auch da, wo ich eine andere Fassung gern vorgezogen hätte.

Wenn Veronese meint, Klein habe zuerst den Unterschied zwischen den beiden Formen des Riemannschen Raumes angegeben, so ist er in einem Irrtum, der um so weniger verstanden werden kann, da er meine beiden Arbeiten im 86. und 89. Bande des Journals erwähnt und auf Kleins Arbeit im 37. Bande der Annalen hinweist.

[23]) VIII § 1. S. 243. Nachdem Lie die Theorie der Transformations-Gruppen in zahlreichen Abhandlungen begründet hatte, hat er die Ergebnisse seiner Forschung in dem dreibändigen Werke: Theorie der Transformations-Gruppen, bei dessen Abfassung ihn Engel unterstützt hat, vereinigt (Leipzig 1888, 1890, 1893).

[24]) VIII § 3. S. 264. Über die Invarianten im weiteren Sinne vergleiche man S. 218—220 im ersten Bande von Lies Werk, sowie meine Arbeit: Erweiterung des Begriffs der Invarianten von Transformations-Gruppen (math. Annalen B. 35, S. 423 ff.).

[25]) VIII § 4. S. 270. Lie hat bereits in den Leipziger Berichten (Okt. 1890) und dann im dritten Bande seines grofsen Werkes alle Invarianten bestimmt, welche eine transitive Gruppe in drei Variabeln zwischen zwei Wertsystemen besitzen kann, falls alle ihre Invarianten auf eine einzige zurückgeführt werden können. Die vorliegende Aufgabe geht insofern weiter, als ich zulasse, dafs in der Gruppe noch andere Invarianten vorkommen; dagegen bestimme ich die Form der Invariante nur unter der Annahme, dafs die beiden

Wertsysteme unendlich wenig von einander verschieden sind, während Lie diese beschränkende Annahme nicht macht.

[26]) VIII § 6. S. 296. Die Aufgabe, alle Gruppen zu bestimmen, welche einer in den Differentialen quadratischen Gleichung genügen, hat Lie vor langem unter der Bedingung gelöst, dafs bei der Ruhe eines Punktes die von ihm ausgehenden Differentiale auf die allgemeinste Weise in einander transformiert werden; meine Herleitung geht von einer anderen Forderung aus.

Wenn wir auch in 15. die Behandlung einiger specieller Fälle dem Leser überlassen durften, so dürfte es doch angebracht sein, die entsprechenden Gruppen wenigstens mitzuteilen. Wir setzten bei unserer Herleitung voraus, dafs keine der Gröfsen c_α, $c_\alpha - \omega$, $c_\alpha + c_\beta - c_\gamma$, $c_\alpha + c_\beta - \omega$ gleich null ist. Damit aber eine dieser Gröfsen verschwindet, mufs a_0 entweder gleich -2ω oder $= -\omega$ oder $= \frac{\omega}{2}$ oder $= 2\omega$ oder $= \omega$ oder $= 0$ sein. Nun zeigt man leicht, dafs in den drei ersten Fällen die angegebene Form ungeändert bleibt. Für $a_0 = 2\omega$ gelten folgende Beziehungen:

$$(S'S) = \omega S',\ (Q_\nu S) = \nu\omega Q_\nu,\ (Q_1 S') = aQ_2,\ (Q_2 S') = -\omega Q_3,\ (Q_3 S') = 0,$$
$$(Q_2 Q_3) = 0,\ (Q_1 Q_3) = 0,\ (Q_1 Q_2) = 2bQ_3;$$

die Gruppe wird durch die fünf Transformationen erzeugt:

$$p_1 - 2bx_2p_3,\ p_2,\ p_3,\ \omega x_1 p_1 + 2\omega x_2 p_2 + 3\omega x_3 p_3,\ ax_1 p_2 + (\omega x_2 + abx_1^2)p_3.$$

Wird $a_0 = \omega$, so erhält man für die Kombinationen folgende Gesetze:

$$(Q_\nu S) = (\nu - 1)\omega Q_\nu,\ (Q_1 S') = aQ_2 + bS',\ (Q_2 S') = \omega Q_3,\ (Q_3 S') = 0,$$
$$(Q_2 Q_3) = 0,\ (Q_1 Q_2) = cQ_2 + 2eS',\ (Q_1 Q_3) = (c + b) Q_3.$$

Um die Komponenten der infinitesimalen Transformationen aufzustellen, beachte man, dafs S und S′ von der ersten Ordnung sind, also den Nullpunkt in Ruhe lassen; dadurch wird man auf folgende Ausdrücke geführt:

$$Q_3 = p_3,\ Q_2 = p_2,\ Q_1 = p_1 - (b + c) p_3 x_3 - cp_2 x_2 + \omega e x_2^2 p_2 - 2eAp_2 x_2,$$
$$S = \omega p_2 x_2 + 2\omega p_3 x_3,\ S' = -\omega p_3 x_2 + Ap_2,$$

wo A eine blofse Funktion von x_1 ist, welche der Differentialgleichung genügt: $\frac{dA}{dx_1} + (c - b) A + 2eA^2 = a$, und für $x_1 = 0$ verschwindet.

Endlich ergeben sich für $a_0 = 0$ folgende Relationen:

$$(Q_\nu S) = (\nu - 2)\omega Q_\nu,\ (Q_1 S') = 2aQ_2,\ (Q_2 S') = -\omega Q_3,\ (Q_3 S') = 0,$$
$$(Q_2 Q_1) = bQ_1,\ (Q_3 Q_2) = bQ_3,\ (Q_1 Q_3) = \frac{2ab}{\omega} Q_2,$$

denen für $\omega = -1$ die Transformationen entsprechen:

$$Q_3 = p_3,\ Q_2 = p_2 + bx_3 p_3,\ Q_1 = e^{bx_2} p_1 + 2abx_2 p_3 + ab^2 x_3^2 p_3,$$
$$S = x_1 p_1 - x_3 p_3,\ S' = abx_1^2 p_1 + 2ax_1 p_2 + \frac{1}{b}(e^{bx_2} - 1) p_3.$$

Alle diese Gruppen haben die Eigenschaft, dafs bei der Ruhe des Nullpunktes die Ebene $x_1 = 0$ in sich bewegt wird; demnach brauchen wir in § 10 auf sie keine Rücksicht zu nehmen. Ebenso dürfen wir in § 10, 6 die zweite in § 6, 19 mitgeteilte Gruppe ausschliefsen, da erstens bei der Ruhe des Nullpunktes die Ebene $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ in sich verschoben wird und zweitens die quadratische Form in zwei Faktoren zerfällt.

[27]) VIII § 7. S. 314. Über diejenigen Axiome, welche man durch Einführung der Koordinaten macht, handelt die unter 1. erwähnte Arbeit von Burkhardt.

[28]) VIII § 7. S. 315. Die folgende Darlegung ist eine Umarbeitung des ersten Paragraphen meiner Programmarbeit: Erweiterung des Raumbegriffes (Braunsberg 1884). Wenn ich auch auf die Kritik des Herrn Lie, die er an meinen Arbeiten ausübt, in ihren Einzelheiten nicht eingehen mag, da ich einerseits darin die (vielleicht unbewufste) Absicht sehen mufs, das von mir Geleistete zu verkleinern, andererseits einen Mann, der in Kleins Entdeckungen nur die Popularisierung eines Cayleyschen Gedankens erblickt, für einen kompetenten Beurteiler nicht halten kann, so mufs ich doch der Besprechung dieser Arbeit, bei deren Abfassung mir Lies Untersuchungen über die Transformations-Gruppen ganz unbekannt waren, einige Worte widmen. Die allgemeine Theorie des Raumes hatte mich auf die Transformations-Gruppen geführt, und es war mir gelungen, mehrere Grundgesetze der Theorie selbständig zu finden. Als mich Herr Klein auf Lies Arbeiten verwies, sah ich, dafs mir der norwegische Gelehrte nicht blofs in der Zeit vorangegangen war, sondern mich auch in der Bewältigung des Stoffes weit überholt hatte. In der Freude darüber, dafs hierdurch auch die allgemeine Theorie der Raumformen sehr gefördert war, erklärte ich, dafs der Inhalt mehrerer Paragraphen meiner Arbeit zuvor von Lie gefunden sei. Diese Erklärung war ungenau und mufste deshalb später dahin richtig gestellt werden, dafs einige darin enthaltene kleinere Einzelheiten zuerst von mir angegeben seien. So war dort der Satz mitgeteilt, dafs jede Gruppe, die von mehr als drei Parametern abhängt, vertauschbare Transformationen enthält. Für diesen Satz, der doch auch in meiner ersten Erklärung Herrn Lie beigelegt war, giebt dieser meine Priorität ausdrücklich zu. Von den übrigen darin enthaltenen, mir eigentümlichen Sätzen behauptet er aber, sie seien ausnahmslos falsch. Um das zu beweisen, ersetzt er das von mir gebrauchte Wort Raumform durch Transformations-Gruppe und stellt Gruppen auf, für welche die von ihm mitgeteilten, mir zugeschriebenen Sätze nicht gelten. Dieser Beispiele hätte es aber nicht bedurft; es genügte, darauf hinzuweisen, dafs die Sätze nur auf transitive Gruppen führen. Darin liegt aber auch der Grund für den Irrtum des Herrn Lie. Ich habe nirgends Raumformen und Transformations-Gruppen identifiziert, vielmehr ausdrücklich hervorgehoben, dafs zur Darstellung der Raumformen nur transitive Gruppen geeignet seien. Meine Sätze betreffen Raumformen, sollen also für intransitive Gruppen, aus denen Lie seine Beispiele entnimmt, gar nicht gelten. Dabei kann ich nur meine Freude darüber ausdrücken, dafs Lie die Sätze selbst jetzt noch nicht kennt, da ich glaube, dafs sie einige Wichtigkeit besitzen; für drei Variabele habe ich sie in VIII § 6, 18 wieder mitgeteilt.

[29]) VIII § 7. S. 324. Diese Beispiele sind von Lie angegeben, um die Unrichtigkeit gewisser von Helmholtz gemachten Angaben zu beweisen. Ich darf wohl erwähnen, dafs die Gleichung (27) auf S. 459 des dritten Bandes

von Lies Werk durch einen Druckfehler entstellt ist; die richtige Form findet man im vorliegenden Werke auf S. 327 unter (11).

[30]) VIII § 8 S. 329. Über die Grundlagen der Geometrie handelt Helmholtz aufser in einigen populär-wissenschaftlichen Vorträgen in den Abhandlungen:

a) Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie; Verhandlungen des naturhist.-mediz. Vereins zu Heidelberg, 1866.

b) Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen; Göttinger Nachrichten 1868.

c) Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, in englischer Übersetzung im »Mind« 1879 veröffentlicht.

Diese drei Aufsätze sind mit kleineren späteren Zusätzen in den zweiten Band der wissenschaftlichen Abhandlungen (S. 610—662) aufgenommen.

Die geometrischen und mechanischen Anschauungen Helmholtz' hat Königsberger vor kurzem in einer eigenen Schrift behandelt.

Lies Kritik findet man u. a. im dritten Bande seines grofsen Werkes.

[31]) VIII § 9. S. 335. Lies Untersuchungen sind zuerst in den Leipziger Berichten und dann im dritten Bande seiner Theorie der Transformations-Gruppen mitgeteilt.

[32]) VIII § 10. S. 340. Ich verweise auf meine Abhandlung: Über die Grundlagen der Geometrie, im 109. Bande des Journals. Die in dieser Arbeit angegebene Charakterisierung der eigentlichen Raumformen reicht nicht für jede Zahl von Dimensionen aus, wie das auf S. 346 mitgeteilte Beispiel zeigt; dafs mein Beweis nicht befriedigen konnte, hat bereits Lie hervorgehoben. Dabei bemerke ich, dafs mir bei ihrer Abfassung Lies in den Leipziger Berichten erschienene Arbeiten unbekannt waren, dafs wahrscheinlich auch seine letzte darauf bezügliche Arbeit (vom Okt. 1890) überhaupt noch nicht erschienen war.